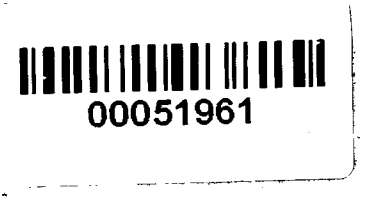
NOT TO BE ISSUED
OUT OF THE LIBRARY.




Digitized with financial assistance from
Shri Brihad Bhartiya Samaj
on 20 February, 2020

# TRAITÉ
# D'ARITHMÉTIQUE,

A L'USAGE

## DE LA MARINE ET DE L'ARTILLERIE,

PAR BEZOUT;

AVEC DES NOTES ET DES TABLES DE LOGARITHMES,

PAR LE BARON REYNAUD,

Chevalier de la Légion-d'Honneur, etc.; Examinateur pour l'admission à l'École Polytechnique, à l'École spéciale Militaire et à l'École de Marine, Docteur de la Faculté des Sciences, Membre de plusieurs Académies, etc.

OUVRAGE ADOPTÉ PAR L'UNIVERSITÉ.

DIX-HUITIÈME ÉDITION.

STÉRÉOTYPE.

51961

PARIS,

BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

POUR LES MATHÉMATIQUES,

QUAI DES AUGUSTINS, N° 55.

1835.

## OUVRAGES DU BARON REYNAUD.

1°. *Traité d'Arithmétique*, à l'usage des Ingénieurs du Cadastre, 5 fr.
2°. *Traité d'Arithmétique*, à l'usage des Élèves qui se destinent aux Écoles royales Polytechnique, Militaire, de Marine et des Forêts, 18e édit. 1835, 4 fr. 50 c.
3°. *Élémens d'Algèbre* (8e édition), 1830, 7 fr. 50 c.
4°. *Traité d'Application* de l'Algèbre à la Géométrie, 2e édition. (Sous-presse.)
5°. *Manuel de l'Ingénieur du Cadastre*, in-4°, 12 fr.
6°. *Problèmes et Développemens* sur les diverses parties des Mathématiques, 6 fr.
7°. *Traité élémentaire de Mathématiques et de Physique*, suivi de quelques notions de *Chimie* et d'*Astronomie*, à l'usage des Élèves qui se préparent aux examens pour le Baccalauréat ès-lettres; 2e édition, considérablement augmentée, 2 vol. in-8, avec 22 pl., 1832, 12 fr. 50 c.
8°. *Théorèmes et Problèmes de Géométrie*, suivis des *Élémens de la Géométrie descriptive*, etc.; 1832. 5 fr.
9°. *Trigonométrie rectiligne et sphérique*, suivie des Tables de Logarithmes de M. Lalande (2e édition), 3 fr.
10°. *Traité de Trigonométrie* de Lagrive, avec les Notes de Reynaud, 7 fr.

*Notes sur Bezout.*

Sur l'*Arithmétique*, 15e édition, 1832. 2 fr. 50 c.
Sur la *Géométrie*, 8e édition, 1832. 5 fr.
Sur l'*Algèbre* et Application de l'Algèbre à la Géométrie, 7e édit., 1833, 4 fr. 50 c.

*Tous ces ouvrages se trouvent aussi à Bordeaux, chez* GASSIOT *fils aîné, libraire, Fossés de l'Intendance, n° 61.*

God
Fre
510
Bez/Tra
51961

IMPRIMERIE DE BACHELIER,
du rue Jardinet, n° 12.

# PRÉFACE DE BEZOUT.

Le Cours de Mathématiques dont nous donnons, aujourd'hui la première partie, doit rassembler les connaissances élémentaires nécessaires aux Gardes du Pavillon et de la Marine, pour être admis au rang d'officier de vaisseau.

Quelque utile qu'il soit d'instruire de bonne heure ces jeunes Élèves dans la pratique d'un art aussi étendu que celui de la Navigation, on ne peut douter que la connaissance préliminaire des principes sur lesquels portent les règles de l'art, ne doive contribuer beaucoup à faire fructifier les leçons qu'ils recevront ensuite de l'expérience, ne les dispose à y être plus attentifs, et par conséquent n'accélère beaucoup leurs progrès.

D'ailleurs, il est si rare qu'un esprit accoutumé à obéir servilement *aux seules* règles de la pratique se replie ensuite assez sur lui-même, pour revenir avec succès à l'étude de la théorie qu'on ne peut trop tôt le disposer à profiter des avantages qu'il peut retirer de celle-ci.

Presque toutes les méthodes de la navigation-pratique sont fondées sur des connaissances mathématiques; comment pourrait-on différer d'instruire des principes de cette science, ceux qui sont destinés à en diriger un jour l'application ?

Pour me conformer, autant qu'il est en moi, aux vues des personnes qui ont bien voulu me confier l'examen des études des Gardes du Pavillon et de la Marine, ainsi que la composition d'un Cours de Mathématiques à leur usage, j'ai cru devoir m'attacher à concilier ces deux points : la nécessité d'instruire ces Élèves sur les connaissances mathématiques relatives à leur objet, et celle de les en instruire dans un intervalle de temps qui ne leur fît rien perdre de l'avantage qu'il doit y avoir à aller de bonne heure à la mer.

Pour satisfaire à ces deux objets, je me suis proposé, 1°. de borner le cours des études d'obligation aux propositions directement utiles de la Navigation, et à celles qui seraient indispensables pour l'intelligence de celles-là; 2°. de faciliter cette étude, en la rendant plus intéressante par de fréquentes applications à la pratique, prises principalement dans la Marine; ce qui réunit encore l'avantage de disposer l'esprit des Com-

mençans à saisir de bonne heure les liens qui unissent la théorie à la pratique.

Mais dans la vue de concourir, autant qu'il est possible, aux progrès d'un art aussi important, j'ai cru devoir ne pas perdre de vue ceux de ces jeunes Elèves qui, joignant à une noble émulation des dispositions plus marquées que les autres, auraient le désir de s'instruire plus parfaitement. C'est dans cette vue que j'aurai soin de répandre dans ce Cours des connaissances plus étendues, et spécialement celles qui peuvent faciliter l'intelligence des ouvrages de feu M. Bouguer, et de quelques autres ouvrages non moins utiles à la Marine, dont on n'a pas encore retiré, à beaucoup près, tout le fruit qu'en peut en espérer, parce que les études des Gardes n'y étaient pas dirigées aussi pleinement qu'on se propose de le faire.

Ces connaissances qu'il est louable d'acquérir et auxquelles on ne peut trop inviter les Gardes du Pavillon et de la Marine de s'appliquer, ces connaissances, dis-je, ne seront point d'obligation, et nous aurons soin de les distinguer de celles-ci par un *caractère* dont nous avertirons.

Le *Cours de Mathématiques* dont il s'agit ici, sera divisé en quatre parties :

La première traitera de l'Arithmétique

La seconde traitera de la Géométrie, dans laquelle on comprendra la Trigonométrie rectiligne et la Trigonométrie sphérique;

La troisième aura pour objet l'Algèbre et l'application de l'Algèbre à la Géométrie;

La quatrième comprendra la Statique et le Mouvement, avec quelque propositions d'Hydrostatique et d'Hydraulique.

Nous avons préféré de faire succéder l'Algèbre à la Géométrie plutôt qu'à l'Arithmétique, parce que outre que l'Algèbre nous eût été d'une utilité très-médiocre dans la Géométrie élémentaire, les Commençans ne sont d'ailleurs pas encore assez exercés dans les raisonnemens mathématiques pour sentir la force des démonstrations algébriques, quoique celles-ci soient souvent plus simples que les démonstrations synthétiques; au lieu que dans la disposition que nous avons choisie, ou a lieu de croire que les Commençans, déjà fortifiés par l'étude des deux premières Parties, en auront d'autant plus de facilité à généraliser leurs idées, et saisiront mieux les usages nombreux qu'on peut faire de l'Algèbre; d'ailleurs, ayant plus de connaissances acquises, ils seront plus à portée de se familiariser avec cette science par un plus grand nombre d'objets auxquels ils pourront l'appliquer.

Nous n'entrerons ici dans aucun détail sur l'exécution des trois dernières parties du Cours; nous nous bornerons à rendre compte de celle-ci. Elle renferme sous un volume assez peu considérable, ce qu'il est nécessaire de savoir, non-seulement pour appliquer les connaissances mathématiques que nous enseignerons par la suite, mais encore pour satisfaire à divers autres usages. En exposant les méthodes, nous avons évité de les multiplier pour un même objet, parce qu'on ne peut veiller trop soigneusement à ne pas partager l'attention dans les commencemens; c'est un abus de dire, en faveur de l'opinion contraire, qu'il est utile d'envisager un objet sous différens aspects: cela n'est vrai que lorsqu'on a acquis une certaine somme de connaissances. C'est par ce même principe que nous avons cru devoir resserrer les raisonnemens et les discours dans beaucoup d'endroits; les Commençans, peu ou point du tout faits à raisonner méthodiquement, perdent, en parcourant un long échafaudage de logique, la force de tête qui leur est nécessaire pour saisir l'esprit d'une démonstration.

On a donc fait en sorte de ne donner aux raisonnemens, que l'étendue nécessaire pour être bien entendus, et d'en élaguer ces attentions scrupuleuses qui vont jusqu'à démontrer des axiomes, et qui, à force de supposer le lecteur inepte, conduisent enfin à le rendre tel.

J'ai tâché d'aplanir la route, soit en simplifiant des raisonnemens déjà employés, soit en leur en substituant de nouveaux qui m'ont paru plus clairs, soit enfin en employant un langage familier et simple. C'est au public à juger si j'ai réussi; mais on ne doit pas s'attendre que le lecteur soit dispensé d'un certain degré d'attention: on ne fera jamais un livre de Mathématiques qui puisse être lu comme on lit un livre d'histoire.

Je ne suppose d'autres connaissances à mon lecteur, que celle des noms de nombres et quelques autres idées aussi familières, sur lesquelles j'établis les principes de la numération, tant des nombres entiers que des décimales. Je passe de là aux quatre opérations fondamentales, dont je donne le procédé et dont j'explique la nature et les principes, de manière à en faciliter l'application aux opérations plus composées qui en dépendent. A la suite de ces opérations, j'en indique quelques usages. Les fractions sont traitées à peu près de la même manière.

Les nombres complexes dont le calcul suppose, à la rigueur, la connaissance des fractions, succèdent à celles-ci. Quoique je n'aie pas parlé du Toisé, les règles que j'ai établies ne le renferment pas moins, mais la connaissance de la nature des unités des facteurs et du produit appartenant à la Géomé-

trie, j'ai différé pour cette raison, d'en parler jusqu'à ce temps

Quoique je ne désapprouve pas qu'on emprunte d'une science les notions qui peuvent faciliter celle que l'on traite (quelque subordination qu'on ait d'ailleurs coutume de mettre entre ces deux sciences), néanmoins je pense qu'on ne doit prendre ce parti, que lorsqu'il ne s'en offre pas de plus simple. Comme l'Arithmétique m'a paru fournir des ressources suffisantes pour l'explication des opérations de la racine carrée et de la racine cubique, je n'ai pas été puiser ailleurs que dans les principes mêmes de cette science.

Ce que j'expose des Rapports, Proportions et Progressions quoique court, me paraît renfermer ce qui nous sera nécessaire pour les trois parties qui doivent suivre. Cependant, comme nous pouvons, sans nous écarter de la loi que nous nous sommes imposée, revenir sur quelques propriétés des Progressions, que quelques lecteurs pourraient désirer, nous avertissons que nous les avons réservées pour application de l'Algèbre.

Les Logarithmes sont d'un trop grand usage dans la pratique de la Navigation, pour que nous n'ayons pas dû nous en *occuper* spécialement. Aussi, *après avoir exposé la nature, la formation* et ceux des usages de ces nombres, que nous pouvions exposer sans anticiper sur aucune autre science, nous avons donné les moyens d'étendre, dans le besoin, les secours qu'on peut tirer des tables ordinaires.

Quoiqu'on puisse faire un grand nombre d'applications de l'Arithmétique à la Navigation, ce n'est cependant pas dans l'Arithmétique même qu'elles peuvent trouver leur place, parce qu'elles supposent presque toutes, au moins la *Géométrie*. Néanmoins, dans le nombre des applications que nous avons données, nous avons pris quelques exemples dans le métier même. A mesure que nous avancerons, elles deviendront et plus nombreuses et plus importantes : on en trouvera d'ailleurs un très-grand nombre dans le *Traité de Navigation* qui forme la suite de ce Cours.

# TABLE
# DES MATIÈRES.


NOMBRES ENTIERS ET DÉCIMAUX.

| | |
|---|---|
| DÉFINITION, nos. 1...6 | Pages 1...2 |
| *Numération* et *décimales*, nos. 7...30. | 2...9 |
| Opérations fondamentales de l'Arithmétique, nos. 31. 32. | 9 |
| *Addition* des nombres entiers et décimaux, nos. 33...34. | 9...12 |
| *Soustraction*, nos. 35...37. | 12...15 |
| *Preuves* de l'addition et de la soustraction, nos. 38...39. | 15...16 |
| *Multiplication* des nombres entiers et décimaux, nos. 40.. 58 | 16...28 |
| *Division* des nombres entiers et décimaux, nos. 59...73. | 28...43 |
| *Preuves* de la multiplication et de la division, no. 74 | 44 |
| Preuves par 9, no 75. | 45...46 |
| Usage de la *division*, no. 76. | 46 ..48 |

FRACTIONS.

| | |
|---|---|
| Définition et Numération des fractions, nos. 77...83. | 48...49 |
| Entiers considérés sous la forme de fractions, nos. 84...86. | 50 |
| Changemens qu'on peut faire subir aux deux termes d'une fraction sans changer sa valeur, nos. 87...89. | 51 |
| Réduction des fractions au même dénominateur, nos. 90...91. | 52...53 |
| Réduction des *fractions* à leur plus simple expression, par la considération des nombres premiers, et par la méthode du *plus grand commun diviseur*, nos. 92...95. | 53. .56 |
| Points de vue sous lesquels on peut considérer les fractions, par la conversion des fractions ordinaires en décimales, nos. 96...99. | 56...57 |
| Calcul des fractions, nos. 106...111. | 57...61 |
| Application des règles précédentes. Fractions de fractions, nos. 112 à 114. | 61...64 |
| Méthode pour exprimer la valeur approchée d'une fraction irréductible par une fraction plus simple, no. 115. | 64...65 |

NOMBRES COMPLEXES

| | |
|---|---|
| Numération et addition, nos. 116...117. | 65...67 |
| Soustraction, no. 118. | 67...68 |
| Multiplication, nos. 119...123. | 68...74 |
| Division, nos. 124...128. | 74...78 |

PUISSANCES ET RACINES

Formation des *carrés*, et extraction de la *racine carrée*, nos 129 à 148. 78....89
Formation des *cubes*, et extraction de la *racine cubique*, nos. 149 à 161. 89....98

RAPPORTS, PROPORTIONS ET PROGRESSIONS.

*Rapports* arithmétiques et géométriques, nos. 162...171. 99...100
*Proportions*, nos. 172...175. 100...102
Propriétés des proportions arithmétiques, nos. 176...177. 102...103
Proprietés des proportions géométriques, nos. 178.. 192. 103 ..109
Règle de Trois, nos. 193...196. 110.. 115
Règle de Société, nos. 197...198. 116...119
Règles de *fausse position*, d'*intérêt*, de *change*, d'*escompte*, d'*alliage*, etc., nos. 199...203. 119...122
*Progressions arithmétiques*, nos. 204...210. 122 ..125
*Progressions géométriques*, nos. 211..215. 125...129

THÉORIE DES LOGARITHMES.

Définition et calcul des *logarithmes*, nos. 216...221. 129...132
Table de logarithmes. 133
Propriétés des logarithmes, nos. 222...226. 134...135
Usages des logarithmes, nos. 227...233 136.. 138
Nombres dont les logarithmes ne se trouvent point dans les tables, nos. 234...241. 138.. 142
Logarithmes dont les nombres ne se trouvent pas dans les tables, nos. 242...245. 142...144
Application des logarithmes à quelques exemples : usage des *Complémens arithmétiques*, nos. 246. 144...152

FIN DE LA TABLE

# ARITHMÉTIQUE

## A L'USAGE

# DE LA MARINE ET DU COMMERCE

## *Notions préliminaires sur la nature et les différentes espèces de Nombres.*

1. On appelle, en général, *quantité*, tout ce qui est susceptible d'augmentation ou de diminution. L'étendue, la durée, le poids, etc., sont des quantités. Tout ce qui est quantité est de l'objet des Mathématiques; mais l'Arithmétique, qui fait partie de ces sciences, ne considère les quantités qu'en tant qu'elles sont exprimées en nombres.

2. L'Arithmétique est donc la science des nombres, elle en considère la nature et les propriétés. Son but est de donner des moyens aisés, tant pour représenter les nombres que pour les composer et décomposer; ce qu'on appelle *calculer*.

3. Pour se former une idée exacte des nombres, il faut d'abord savoir ce qu'on entend par *unité*.

4. L'unité est une quantité que l'on prend (le plus souvent arbitrairement) pour servir de terme de comparaison à toutes les quantités d'une même espèce : ainsi, lorsqu'on dit, un tel corps pèse *cinq* livres, la livre est l'unité, c'est la quantité à laquelle on compare le poids de ce corps; on aurait pu également prendre l'once pour unité, et alors le poids de ce corps eût été marqué par quatre-vingts.

5. Le nombre exprime de combien d'unités ou de parties d'unité une quantité est composée.

Si la quantité est composée d'unités entières, le nombre qui l'exprime s'appelle *nombre entier*; et si elle est composée d'unités entières et de parties de l'unité, ou simplement de parties de l'unité, alors le nombre est dit *fractionnaire* ou *fraction*; *trois et demi* font un nombre fractionnaire; *trois quarts* est une fraction.

6. Un nombre qu'on énonce sans désigner l'espèce des unités, comme quand on dit simplement *trois* ou *trois fois*, *quatre* ou *quatre fois*, s'appelle un *nombre abstrait*; et lorsqu'on énonce en même temps l'espèce des unités, comme quand on dit *quatre livres, cent tonneaux*, on l'appelle *nombre concret*.

Nous définirons les autres espèces de nombres à mesure qu'il en sera question.

## *De la Numération et des Décimales.*

7. La numération est l'art d'exprimer tous les nombres par une quantité limitée de noms et de caractères : ces caractères s'appellent *chiffres*.

Nous nous dispenserons de donner ici le nom des nombres; c'est une connaissance familière à tout le monde.

Quant à la manière de représenter les nombres par des chiffres, plusieurs raisons nous engagent à en exposer les principes.

8. Les caractères dont on fait usage dans la numération actuelle, et les noms des nombres qu'ils représentent sont tels qu'on les voit ici :

| zéro, | un, | deux, | trois, | quatre, | cinq, | six, | sept, | huit, | neuf. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |

Pour exprimer tous les autres nombres avec ces caractères, on est convenu que de dix unités on en ferait une seule, à laquelle on donnerait le nom de *dixaine*, et que l'on compterait par dixaines comme on compte par unités, c'est-à-dire que l'on compterait 2 dixaines, 3 dixaines, etc., jusqu'à 9; que pour représenter ces nouvelles unités, on emploierait les mêmes chiffres que pour les unités simples, mais qu'on les en

distinguerait par la place qu'on leur ferait occuper, en les mettant à la gauche des unités simples.

Ainsi, pour représenter *cinquante-quatre*, qui renferment cinq dixaines et quatre unités, on est convenu d'écrire 54. Pour représenter *soixante*, qui contiennent un nombre exact de dixaines et point d'unités, on écrit 60, en mettant un zéro qui marque qu'il n'y a point d'unités simples et détermine le chiffre 6 à marquer un nombre de dixaines. On peut, par ce moyen, compter jusqu'à *quatre-vingt-dix-neuf* inclusivement.

9. Remarquons, en passant, cette propriété de la numération actuelle, savoir : qu'un chiffre placé à la gauche d'un autre, ou suivi d'un zéro, représente un nombre dix fois plus grand que s'il était seul.

10. Depuis 99 on peut compter jusqu'à *neuf cent quatre-vingt dix-neuf*, par une convention semblable. De dix dixaines on composera une seule unité qu'on nommera *centaine*, parce que dix fois dix font cent; on comptera ces centaines depuis un jusqu'à neuf, et on les représentera par les mêmes chiffres, mais en plaçant ces chiffres à la gauche des dixaines.

Ainsi, pour marquer *huit cent cinquante-neuf*, qui contiennent huit centaines, cinq dixaines et neuf unités, on écrira 859. Si l'on avait *huit cent neuf*, qui contiennent huit centaines, point de dixaines, et neuf unités, on écrirait 809, c'est-à-dire que l'on mettrait un zéro pour tenir la place des dixaines qui manquent. Si les unités manquaient aussi, on mettrait deux zéro; ainsi, pour marquer *huit cents*, on écrirait 800.

11. Remarquons encore qu'en vertu de cette convention, un chiffre suivi de deux autres, ou de deux zéro, marque un nombre cent fois plus grand que s'il était seul.

12. Depuis *neuf cent quatre-vingt-dix-neuf*, on peut compter, par le même artifice, jusqu'à *neuf mille neuf cent quatre-vingt-dix-neuf*, en formant de dix centaines une unité qu'on appelle *mille*, parce que dix fois cent font mille; comptant ces unités comme ci-devant, et les représentant par les mêmes chiffres placés à la gauche des centaines.

Ainsi, pour marquer *sept mille huit cent cinquante-neuf*, on écrira 7859; pour marquer *sept mille neuf*, on écrira 7009; et pour *sept mille*, on écrira 7000. D'où l'on voit qu'un chiffre suivi de trois autres, ou de trois zéro, marque un nombre mille fois plus grand que s'il était seul.

13. En continuant ainsi de renfermer dix unités d'un certain ordre dans une seule unité, ou de placer ces nouvelles unités dans des rangs de plus en plus avancés sur la gauche, on parvient à exprimer d'une manière uniforme, et avec dix caractères seulement, tous les nombres entiers imaginables.

14. Pour énoncer facilement un nombre exprimé par tant de chiffres qu'on voudra, on le partagera, par la pensée, en tranches de trois chiffres chacune, en allant de droite à gauche; on donnera à chaque tranche les noms suivans, en partant de la droite, *unités*, *mille*, *millions*, *billions*, *trillions*, *quatrillions*, *quintillions*, *sextillions*, etc. Le premier chiffre de chaque tranche, en partant toujours de la droite, aura le nom de la tranche, le second celui de dixaines, et le troisième celui de centaines.

Ainsi, en partant de la gauche, on énoncera chaque tranche comme si elle était seule, et l'on prononcera à la fin de chacune le nom de cette même tranche : par exemple, pour énoncer le nombre suivant :

| quatrillions, | trillions, | billions, | millions, | mille, | unités, |
|---|---|---|---|---|---|
| 23 | 456 | 789 | 234 | 565 | 456, |

On dira vingt-trois *quatrillions*, quatre cent cinquante-six *trillions*, sept cent quatre-vingt-neuf *billions*, deux cent trente-quatre *millions*, cinq cent soixante-cinq *mille*, quatre cent cinquante-six *unités*.

15. De la numération que nous venons d'exposer, et qui est purement de convention, il résulte qu'à mesure qu'on avance de droite à gauche, les unités dont chaque nombre est composé sont de dix en dix fois plus grandes, et que par conséquent,

pour rendre un nombre dix fois, cent fois, mille fois plus grand, il suffit de mettre à la suite du chiffre de ses unités, un, deux, trois zéro : au contraire, à mesure qu'on rétrograde de gauche à droite, les unités sont de dix en dix fois plus petites.

16. Telle est la numération actuelle : elle est la base de toutes les autres manières de compter, quoique dans plusieurs arts on ne s'assujétisse pas toujours à compter uniquement par dixaines, par dixaines de dixaines, etc.

17. Pour évaluer les quantités plus petites que l'unité qu'on a choisie, on partage celle-ci en d'autres unités plus petites. Le nombre en est indifférent en lui-même, pourvu qu'on puisse mesurer les quantités qu'on a dessein d'évaluer ; mais ce qu'on doit avoir principalement en vue dans ces sortes de divisions, c'est de rendre les calculs le plus commodes qu'il sera possible ; c'est pour cette raison qu'au lieu de partager l'unité en un grand *nombre de parties*, *afin de pouvoir évaluer les* plus petites, on ne la partage d'abord qu'en un certain nombre de parties, et qu'on subdivise celles-ci en d'autres plus petites. C'est ainsi que dans les monnaies on partage la livre en 20 parties qu'on appelle *sous*, le sou en 12 parties que l'on appelle *deniers*. De même dans les mesures de poids, on partage la livre en 2 *marcs*, le marc en 8 *onces*, l'once en 8 *gros*, etc. ; en sorte que dans le premier cas on compte par vingtaines et par douzaines ; dans le second, par deuxaines et par huitaines, etc.

18. Un nombre qui est composé de parties rapportées ainsi à différentes unités, est ce qu'on appelle un nombre *complexe* ; et, par opposition, celui qui ne renferme qu'une seule espèce d'unités, s'appelle *nombre incomplexe*. $8^{\#}$, ou 8 livres, sont un nombre incomplexe. $8^{\#}\ 17^{s}\ 8^{d}$ ou 8 livres 17 sous 8 deniers, sont un nombre complexe.

19. Chaque art subdivise à sa manière l'unité principale qu'il s'est choisie. Les subdivisions de la toise sont différentes de celles de la livre ; celles de la livre différentes de celles du jour, de l'heure ; celles-ci différentes de celles du marc, et ainsi

de suite : nous les ferons connaître lorsque nous traiterons des nombres complexes.

20. Mais de toutes les divisions et subdivisions qu'on peut faire de l'unité, celle qui se fait par décimales, c'est-à-dire en partageant l'unité en parties de dix en dix fois plus petites, est incontestablement la plus commode dans tous les calculs (*). Elle est fort en usage dans la pratique des Mathématiques ; la formation et le calcul des décimales sont absolument les mêmes que pour les nombres ordinaires ou entiers : nous allons les faire connaître.

21. Pour évaluer en décimales les parties plus petites que l'unité, on conçoit que cette unité, telle qu'elle soit, livre, toise, etc., est composée de dix parties, comme on imagine la dixaine composée de dix unités simples, ou comme on imagine la livre composée de 20 sous. Ces nouvelles unités, par opposition aux dixaines, sont nommées *dixièmes* ; on les représente par les mêmes chiffres que les unités simples, et comme elles sont dix fois plus petites que celles-ci, on les place à la droite du chiffre qui représente les unités simples.

Mais pour prévenir l'équivoque, et ne point donner lieu de prendre ces dixièmes pour des unités simples, on est convenu en même temps de fixer, une fois pour toutes, la place des unités par une marque particulière : celle qui est le plus en usage est une virgule que l'on met à la droite du chiffre qui représente les unités, ou, ce qui est la même chose, entre les unités et les *dixièmes* ; ainsi, pour marquer *vingt-quatre unités et trois dixièmes*, on écrira 24,3.

22. On peut, de même, regarder actuellement les *dixièmes* comme des unités qui ont été formées de dix autres, chacune dix fois plus petite que les *dixièmes*, et par la même raison d'analogie, les placer à la droite des *dixièmes*. Ces nouvelles unités, dix fois plus petites que les *dixièmes*, seront cent fois

(*) Telles sont les nouvelles divisions des poids et mesures adoptées par le Gouvernement, divisions dont nous donnerons plus tard les dénominations et le calcul. (*Note de l'Éditeur.*)

plus petites que les unités principales; et, pour cette raison, seront nommées *centièmes*. Ainsi, pour marquer *vingt-quatre unités trois dixièmes et cinq centièmes*, on écrira 24,35.

23. Concevons pareillement les *centièmes* comme formés de dix parties; ces parties seront mille fois plus petites que l'unité principale, et pour cette raison seront nommées *millièmes*; et comme dix fois plus petites que les *centièmes*, on les placera à la droite de celles-ci. En continuant de subdiviser ainsi de dix en dix, on formera de nouvelles unités qu'on nommera successivement des *dix-millièmes*, *cent-millièmes*, *millionièmes*, *dix-millionièmes*, *cent-millionièmes*, *billionièmes*, etc., et qu'on placera dans les rangs de plus en plus reculés sur la droite de la virgule.

24. Les parties de l'unité que nous venons de décrire, sont ce qu'on appelle les *décimales*.

25. Quant à la manière de les énoncer, elle est la même que pour les autres nombres. Après avoir énoncé les chiffres qui sont à la gauche de la virgule, on énonce les décimales de la même manière, mais on ajoute à la fin le nom des unités décimales de la dernière espèce ainsi, pour énoncer ce nombre 34,572, on dirait trente-quatre unités et cinq cent soixante et douze *millièmes*; si c'étaient des toises, par exemple, on dirait trente-quatre toises et cinq cent soixante et douze *millièmes* de toise.

La raison en est facile à apercevoir, si l'on fait attention que dans le nombre 34,572, le chiffre 5 peut indifféremment être rendu ou par cinq *dixièmes*, ou par cinq cent *millièmes*, puisque le *dixième* (22) valant dix *centièmes*, et le *centième* (23) valant dix *millièmes*, le *dixième* contiendra dix fois dix *millièmes*, ou cent *millièmes*; ainsi les cinq *dixièmes* valent cinq cents *millièmes*. Par une raison semblable, le chiffre 7 pourra s'énoncer en disant soixante et dix *millièmes*, puisque (23) chaque *centième* vaut dix *millièmes*.

26. A l'égard de l'espèce des unités du dernier chiffre, on le trouvera toujours facilement en comptant successivement de

gauche à droite sur chaque chiffre depuis la virgule, les noms suivans : *dixièmes, centièmes, millièmes, dix-millièmes,* etc.

27. Si l'on n'avait pas d'unités entières, mais seulement des parties de l'unité, on mettrait un zéro pour tenir la place des unités; ainsi, pour marquer cent vingt-cinq *millièmes*, on écrirait 0,125. Si l'on voulait marquer 25 *millièmes*, on écrirait 0,025 en mettant un zéro entre la virgule et les autres chiffres, tant pour marquer qu'il n'y a point de *dixièmes*, que pour donner aux parties suivantes leur véritable valeur. Par la même raison, pour marquer six *dix-millièmes*, on écrirait 0,0006.

28. Examinons maintenant les changemens qu'on peut faire naître dans un nombre par le déplacement de la virgule.

Puisque la virgule détermine la place des unités, et que tous les autres chiffres ont des valeurs dépendantes de leurs distances à cette même virgule, si l'on avance la virgule d'une, deux, trois, etc., places sur la gauche, on rend le nombre 10, 100, 1000, etc., fois plus petit; et au contraire on le rend 10, 100, 1000, etc., fois plus grand, si l'on recule la virgule d'une, deux, trois, etc., places sur la droite.

En effet, si l'on a 4327,5264, et qu'en avançant la virgule d'une place sur la gauche, on écrive 432,75264, il est visible que les mille du premier nombre sont des centaines dans le nouveau; les centaines sont des dixaines; les dixaines, des unités; les unités, des dixièmes; les dixièmes, des centièmes; et ainsi de suite. Donc chaque partie du premier nombre est devenue dix fois plus petite par ce déplacement. Si, au contraire, en reculant la virgule d'une place sur la droite, on eût écrit 43275,264, les mille du premier nombre se trouveraient changés en dixaines de mille, les centaines en mille, les dixaines en centaines, les unités en dixaines, les dixièmes en unités, et ainsi de suite. Donc le nouveau nombre serait dix fois plus grand que le premier.

29. Un raisonnement semblable fait voir qu'en avançant, sur la gauche, de deux ou de trois places, on rendrait le nombre, cent ou mille fois plus petit, et, au contraire, cent ou mille fois

plus grand, en reculant la virgule de deux ou trois places sur sa droite.

3o. La dernière observation que nous ferons sur les décimales, est qu'on ne change point la valeur en mettant à la suite du dernier chiffre décimal tel nombre de zéro qu'on voudra. Ainsi 43,25 est la même chose que 43,250, ou que 43,2500, ou que 43,25000, etc.

Car chaque *centième* valant dix *millièmes* ou cent *dix-millièmes*, etc., les vingt-cinq *centièmes* vaudront deux cent cinquante *millièmes* ou deux mille cinq cent *dix-millièmes*, etc. En un mot, c'est la même chose que lorsqu'au lieu de dire 25 pistoles, on dit 250 livres; et que lorsqu'au lieu de dire 25 quintaux, on dit 2500 livres.

## *Des opérations de l'Arithmétique.*

31. Ajouter, soustraire, multiplier et diviser, sont les quatre opérations fondamentales de l'Arithmétique. Toutes les questions qu'on peut proposer sur les nombres se réduisent à pratiquer quelques-unes de ces opérations, ou toutes ces opérations. Il est donc important de se les rendre familières, et d'en bien saisir l'esprit.

32. Le but de l'Arithmétique est, comme nous l'avons déjà dit, de donner des moyens de calculer facilement les nombres. Ces moyens consistent à réduire le calcul des nombres les plus composés à celui de nombres plus simples, ou exprimés par le plus petit nombre de chiffres possible. C'est ce qu'il s'agit d'exposer actuellement.

## *De l'Addition des Nombres entiers et des Parties décimales.*

33. Exprimer la valeur totale de plusieurs nombres, par un seul, est ce qu'on appelle *faire une addition.*

Quand les nombres qu'on se propose d'ajouter n'ont qu'un seul chiffre, on n'a pas besoin de règle; mais lorsqu'ils ont plu-

sieurs chiffres, on trouve leur valeur totale qu'on appelle *somme*, en observant la règle suivante :

Écrivez, les uns sous les autres, tous les nombres proposés, de manière que les chiffres des unités de chacun soient dans une même colonne verticale, qu'il en soit de même des dixaines, de même des centaines, etc. Soulignez le tout.

Ajoutez d'abord tous les nombres qui sont dans la colonne des unités; si la somme ne passe pas 9, écrivez-la au-dessous; si elle surpasse neuf, elle renfermera des dixaines; n'écrivez au-dessous que l'excédant du nombre des dixaines : comptez ces dixaines pour autant d'unités, et ajoutez-les avec les nombres de la colonne suivante : observez, à l'égard de la somme des nombres de cette seconde colonne, la même règle qu'à l'égard de la première, et continuez ainsi de colonne en colonne jusqu'à la dernière, au-dessous de laquelle vous écrirez la somme telle que vous la trouverez. Éclaircissons cette règle par des exemples

EXEMPLE I.

Qu'il soit question d'ajouter 54925 avec 2023 : j'écris ces deux nombres comme on le voit ici :

54925
2023
56948 somme.

Et après avoir souligné le tout, je commence par les unités, en disant : 5 et 3 font 8, que j'écris sous cette même colonne.

Je passe à celle des dixaines, dans laquelle je dis 2 et 2 font 4, que j'écris au-dessous.

A la colonne des centaines, je dis : 9 et 0 font 9, que j'écris sous cette même colonne.

Dans la colonne des mille, je dis : 4 et 2 font 6, que j'écris sous cette colonne.

Enfin, dans la colonne des dixaines de mille, je dis : 5 et rien font 5, que j'écris de même au-dessous.

Le nombre 56948, trouvé par cette opération, est la somme des deux nombres proposés, puisqu'il en renferme les unités,

les dixaines, les centaines, les mille, les dixaines de mille que nous avons rassemblés successivement.

EXEMPLE II.

On demande la somme des quatre nombres suivans... 6903, 7854, 953, 7327; je les écris comme on les voit ici :

6903
7854
953
7327
23037 somme.

Et en commençant comme ci-dessus par la droite, je dis : 3 et 4 font 7, et 3 font 10, et 7 font 17; j'écris les 7 unités sous la première colonne, et je retiens la dixaine pour la joindre, comme unité, aux nombres de la colonne suivante, qui sont aussi des dixaines.

Passant à cette seconde colonne, je dis : 1 que je retiens et 0 font 1, et 5 font 6, et 5 font 11, et 2 font 13; j'écris 3 sous la colonne actuelle, et je retiens pour la dixaine une unité que j'ajoute à la colonne suivante : en disant : une et 9 font 10, et 8 font 18, et 9 font 27, et 3 font 30; je pose 0 sous cette colonne, et je retiens, pour les trois dixaines, trois unités que j'ajoute à la colonne suivante, en disant pareillement : 3 et 6 font 9, et 7 valent 16, et 7 font 23; j'écris 3 sous cette colonne, et comme il n'y a plus d'autre colonne, j'avance d'une place les deux dixaines qui appartiendraient à la colonne suivante, s'il y en avait une. Le nombre 23037 est la somme des quatre nombres proposés.

34. S'il y a des parties décimales, comme elles se comptent, ainsi que les autres nombres, par dixaines, à mesure qu'on avance de droite à gauche, la règle pour les ajouter est absolument la même, en observant de mettre toujours les unités de même ordre dans une même colonne.

Ainsi, si l'on propose d'ajouter les trois nombres 72,95, 12,8 et 124,03, j'écrirai

72,957
12,8
124,03
209,787 somme.

En suivant la règle ci-dessus, j'aurai 209,787 pour la somme.

## *De la Soustraction des Nombres entiers et des Parties décimales.*

35. La soustraction est l'opération par laquelle on retranche un nombre d'un autre nombre. Le résultat de cette opération s'appelle *reste*, *excès* ou *différence*.

Pour faire cette opération, on écrira le nombre qu'on veut retrancher au-dessous de l'autre, de la même manière que dans l'addition, et ayant souligné le tout, on retranchera, en allant de droite à gauche, chaque nombre inférieur de son correspondant supérieur; c'est-à-dire les unités des unités, les dixaines des dixaines, etc.: on écrira chaque reste au-dessous, dans le même ordre, et zéro lorsqu'il ne restera rien.

Lorsque le chiffre inférieur se trouvera plus grand que le chiffre supérieur correspondant, on ajoutera à celui-ci dix unités qu'on aura en empruntant, par la pensée, une unité sur son voisin à gauche, lequel doit, par cette raison, être regardé comme moindre d'une unité dans l'opération suivante.

EXEMPLE I.

On propose de retrancher 5432 de 8954; j'écris ces deux nombres comme il suit:

8954
5432
3522 reste.

Et en commençant par le chiffre des unités, je dis: 2 ôté de 4, il reste 2, que j'écris au-dessous; puis passant aux dixaines, je dis: 3 ôté de 5, il reste 2, que j'écris sous les dixaines. A la

troisième colonne, je dis : 4 ôté de 9, il reste 5, que j'écris sous cette colonne. Enfin, à la quatrième, je dis : 5 ôté de 8, il reste 3, que j'écris sous 5, et j'ai 3522 pour le reste de 5432 retranché de 8954.

EXEMPLE II.

On veut ôter 7987 de 27646

On écrira. . . . . 27646
7987
19659 reste.

Comme on ne peut ôter 7 de 6, on ajoutera à 6 dix unités qu'on empruntera en prenant une unité sur son voisin 4, et on dira : 7 ôté de 16, il restera 9 qu'on écrira sous 7.

Passant aux dixaines, on ne dira plus, 8 ôté de 4, mais 8 ôté de 3 seulement, parce que l'emprunt qu'on a fait a diminué 4 d'une unité : comme on ne peut ôter 8 de 3, on ajoutera de même à 3 dix unités qu'on empruntera, en prenant une unité sur le chiffre 6 de la gauche, et on dira 8 ôté de 13, il reste 5 qu'on écrira sous 8. Passant à la troisième colonne, on dira de même, 9 ôté de 5, ou plutôt 9 ôté de 15 (en empruntant comme ci-dessus), il reste 6 pour écrire sous 9. A la quatrième colonne, on dira par la même raison, 7 ôté de 6, ou plutôt de 16, il reste 9, qu'on écrira sous 7; et comme il n'y a rien à retrancher dans la cinquième colonne, on écrira sous cette colonne, non pas 2, parce qu'on vient d'emprunter une unité sur ce 2, mais seulement 1, et on aura 19659 pour le reste.

36. Si le chiffre sur lequel on doit faire l'emprunt était un zéro, l'emprunt se ferait, non pas sur ce zéro, mais sur le premier chiffre significatif qui viendrait après; or, quoique ce soit alors emprunter 100, ou 1000, ou 10000, selon qu'il y a un, deux ou trois zéro consécutifs, on n'en opérera pas moins comme ci-dessus; c'est-à-dire qu'on ajoutera seulement 10 au chiffre pour lequel on emprunte, et comme ces 10 sont

censés pris sur les 100 ou 1000, etc., qu'on a empruntés, pour employer les 90 ou les 990, etc., qui restent, on comptera les zéro suivans pour autant de 9; c'est ce que l'exemple ci-après va éclaircir.

EXEMPLE III.

| | |
|---|---|
| | 99 |
| Si de. . . . . | 20064 |
| on veut retrancher. . . . | 17489 |
| | 2575 reste. |

On dira d'abord : 9 ôté de 4, ou plutôt de 14 (en empruntant sur le chiffre suivant), il reste 5. Puis, pour ôter 8 de 5, comme cela ne se peut, et qu'il n'est pas possible non plus d'emprunter sur le chiffre suivant qui est un zéro, on empruntera sur le 2 une unité, laquelle vaut mille à l'égard du chiffre sur lequel on opère. De ce mille, on ne prendra que dix unités qu'on ajoutera à 5, et on dira : 8 ôté de 15, il reste 7.

Comme on n'a employé que dix unités sur mille qu'on a empruntées, on emploiera les 990 restantes, pour en retrancher les nombres qui répondent au-dessous des zéro; ce qui revient au même que de compter chaque zéro comme s'il valait 9. Ainsi l'on dira : 4 ôté de 9, reste 5; puis 7 ôté 9, reste 2; et enfin 1 ôté de 1, il ne reste rien.

37. S'il y a des parties décimales dans les nombres sur lesquels on veut opérer, on suivra absolument la même règle; mais pour éviter tout embarras dans l'application de cette règle, il n'y aura qu'à rendre le nombre des chiffres décimaux le même dans chacun des deux nombres proposés, en mettant un nombre suffisant de zéro à la suite de celui qui a le moins de décimales : cette préparation ne change rien à la valeur de ce nombre (30).

EXEMPLE IV.

| | |
|---|---|
| De. . . . . | 5403,25 |
| on veut ôter. . . . . | 385,6532 |

Je mets deux zéro à la suite des décimales du nombre supérieur; après quoi j'opère sur les deux nombres ainsi préparés, précisément selon l'énoncé de la règle donnée pour les nombres entiers.

5403,2500
385,6532
5017,5968

## *De la preuve de l'Addition et de la Soustraction*

38. Ce qu'on appelle preuve d'une opération arithmétique est une autre opération que l'on fait pour s'assurer de l'exactitude du résultat de la première.

La preuve de l'addition se fait en ajoutant de nouveau par parties, mais en commençant par la gauche, les sommes qu'on a déjà ajoutées. On retranche la totalité de la première colonne, de la partie qui lui répond dans la somme inférieure; on écrit au-dessous le reste qu'on réduit, par la pensée, en dixaines, pour le joindre au chiffre suivant de cette même somme, et du total on retranche encore la totalité de la colonne supérieure; on continue ainsi jusqu'à la dernière colonne, dont la totalité étant retranchée ne doit laisser aucun reste.

Ayant trouvé que ci-dessus les quatre nombres

6903
7854
953
7327
ont pour somme. . . . . 23037
*zxxø*

Pour vérifier ce résultat, j'ajoute les mêmes nombres en commençant par la gauche, et je dis: 6 et 7 font 13, et 7 font 20, lesquels ôtés de 23, il reste 3 ou 3 dixaines, qui, avec le chiffre suivant zéro, font 30. Je passe à la seconde colonne, et je dis, 9 et 8 font 17, et 9 font 26, et 3 font 29, que j'ôte de 30; il reste 1 ou une dixaine, qui, jointe au chiffre suivant 3, fait 13.

J'ajoute tous les nombres de la troisième colonne, en disant : 5 et 5 font 10, et 2 font 12, qui ôtés de 13, il reste 1 ou une dixaine, laquelle, ajoutée au chiffre suivant 7, fait 17; j'ajoute pareillement tous les nombres de la dernière colonne, en disant, 3 et 4 font 7, et 3 font 10, et 7 font 17, qui, ôtés de 17, il ne reste rien : d'où je conclus que la première opération est exacte.

On est fondé à conclure que la première opération a été bien faite, lorsqu'après cette preuve il ne reste rien, parce qu'ayant ôté successivement tous les mille, toutes les centaines, toutes les dixaines et toutes les unités, dont on avait composé la somme, il faut qu'à la fin il ne reste rien.

39. La preuve de la soustraction se fait en ajoutant le reste trouvé par l'opération, avec le nombre retranché : si la première opération a été bien faite, on doit reproduire le nombre dont on a retranché : ainsi je vois que dans le troisième exemple donné ci-dessus, *l'opération a été bien faite*, parce qu'en ajoutant 17489 (nombre retranché) avec le reste 2575, je reproduis 20064, nombre dont on a retranché;

| | |
|---|---|
| de. . . . . | 20064 |
| ôtez. . . . | 17489 |
| reste. . . . | 2575 |
| preuve. . . | 20064 |

## *De la Multiplication.*

40. Multiplier un nombre par un autre, c'est prendre le premier de ces deux nombres autant de fois qu'il y a d'unités dans l'autre. Multiplier 4 par 3, c'est prendre trois fois le nombre 4.

41. Le nombre qu'on doit multiplier s'appelle le *multiplicande;* celui par lequel on doit multiplier s'appelle le *multiplicateur;* et le résultat de l'opération s'appelle *produit.*

42. Le mot *produit* a communément une acception beaucoup plus étendue, mais nous avertissons expressément que

nous ne l'emploierons que pour désigner le résultat de la multiplication.

Le multiplicande et le multiplicateur se nomment aussi les *facteurs* du produit : ainsi 3 et 4 sont les facteurs de 12, parce que 3 fois 4 font 12.

43. Suivant l'idée que nous venons de donner de la multiplication, on voit qu'on pourrait faire cette opération en écrivant le multiplicande autant de fois qu'il y a d'unités dans le multiplicateur, et faisant ensuite l'addition. Par exemple, pour multiplier 7 par 3, on pourrait écrire

$$\begin{array}{r} 7 \\ 7 \\ \underline{7} \\ 21 \end{array}$$

et la somme 21 résultante de cette addition, serait le produit

Mais, lorsque le multiplicateur est tant soit peu considérable, l'opération devient fort longue. Ce que nous appelons proprement *multiplication*, est la méthode de parvenir à un même résultat par une voie plus courte.

44. Tant qu'on ne considère les nombres que d'une manière abstraite, c'est-à-dire sans faire attention à la nature de leurs unités, il importe peu lequel des deux nombres proposés pour la multiplication on prenne pour multiplicande ou pour multiplicateur. Par exemple, si l'on a 4 à multiplier par 3, il est indifférent de multiplier 4 par 3, ou 3 par 4; le produit sera toujours 12. En effet, 3 fois 4 n'est autre chose que le triple de 1 fois 4, et 4 fois 3 est le triple de 4 fois 1. Or il est évident que 1 fois 4 et 4 fois 1, sont la même chose, et on peut appliquer le même raisonnement à tout autre nombre.

45. Mais lorsque, par l'énoncé de la question, le multiplicateur et le multiplicande sont des nombres concrets, il importe de distinguer le multiplicande du multiplicateur : cette attention est principalement nécessaire dans la multiplication des nombres complexes dont nous parlerons par la suite.

Au reste, cela est toujours aisé à distinguer ; la question qui conduit à la multiplication dont il s'agit, fait toujours connaître quelle est la quantité qu'il faut répéter plusieurs fois, c'est-à-dire le multiplicande, et quelle est celle qui marque combien de fois on doit répéter le multiplicande, c'est-à-dire quel est le multiplicateur.

46. Comme le multiplicateur est destiné à marquer combien de fois on doit prendre le multiplicande, il est toujours un nombre abstrait : ainsi quand on demande ce que doivent coûter 52 toises de bois, à raison de 36 livres la toise, on voit que le multiplicande est 36 livres qu'il s'agit de répéter 52 fois, soit que ce 52 marque des toises, ou toute autre chose.

47. Le produit qui est formé de l'addition répétée du multiplicande, aura donc des unités de même nature que le multiplicande (*).

Après cette petite digression sur la nature des unités du produit et de ses facteurs, revenons à la méthode pour trouver ce produit.

48. Les règles de la multiplication des nombres les plus composés, se réduisent à multiplier un nombre d'un seul chiffre par un nombre d'un seul chiffre. Il faut donc s'exercer à trouver soi-même le produit des nombres exprimés par un seul chiffre, en ajoutant successivement un même nombre à lui-même. On peut aussi, si on le veut, faire usage de la table suivante, qu'on attribue à *Pythagore*.

---

(*) Nous n'en exceptons pas même la multiplication géométrique, dont nous ne parlerons qu'en Géométrie, comme cela nous paraît assez naturel. Les unités du multiplicateur ne sont jamais que des unités abstraites, comme dans toute autre multiplication.

## *Table de Multiplication.*

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 |
| 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 |
| 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 | 32 | 36 |
| 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 |
| 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 | 42 | 48 | 54 |
| 7 | 14 | 21 | 28 | 35 | 42 | 49 | 56 | 63 |
| 8 | 16 | 24 | 32 | 40 | 48 | 56 | 64 | 72 |
| 9 | 18 | 27 | 36 | 45 | 54 | 63 | 72 | 81 |

La première bande de cette table se forme en ajoutant 1 à lui-même successivement.

La seconde en ajoutant 2 de même.

La troisième en ajoutant 3, et ainsi de suite.

49. Pour trouver, par le moyen de cette table, le produit de deux nombres exprimés par un seul chiffre chacun, on cherchera l'un de ces deux nombres, le multiplicande, par exemple, dans la bande supérieure, et en partant de ce nombre, on descendra verticalement jusqu'à ce qu'on soit vis-à-vis du multiplicateur qu'on trouvera dans la première colonne. Le nombre sur lequel on sera arrêté, sera le produit. Ainsi pour trouver, par exemple, le produit de 9 par 6, ou combien font 6 fois 9, je descends depuis le 9, pris dans la première bande, jusque vis-à-vis le 6 pris dans la première colonne : le nombre sur lequel je m'arrête est 54; par conséquent 6 fois 9 font 54.

En voilà autant qu'il en faut pour passer à la multiplication des nombres exprimés par plusieurs chiffres.

## *De la Multiplication par un nombre d'un seul chiffre.*

5o. Écrivez le multiplicateur, qu'on suppose ici d'un seul chiffre, sous le multiplicande, peu importe sous quel chiffre; mais, pour fixer les idées, supposons que ce soit sous le chiffre des unités.

Multipliez d'abord le nombre des unités par votre multiplicateur, et si le produit ne contient que des unités, écrivez ce produit au-dessous; s'il contient des unités et des dixaines, écrivez seulement les unités, et comptant les dixaines pour autant d'unités, retenez celles-ci.

Multipliez, de même, le nombre des dixaines du multiplicande, et au produit ajoutez les unités que vous avez retenues; écrivez le tout au-dessous s'il peut être marqué par un seul chiffre, sinon n'écrivez que les unités de ce produit, et retenez-en les dixaines qui sont des centaines, pour les ajouter au produit suivant qui sera pareillement des centaines.

Continuez de multiplier successivement, suivant la même règle, tous les chiffres du multiplicande; la suite des chiffres que vous aurez écrits marquera le produit.

EXEMPLE.

On demande combien 2864 toises valent de pieds? La toise est de 6 pieds. La question se réduit à prendre 2864 pieds 6 fois.

J'écris donc. . . . . 2864 multiplicande.
6 multiplicateur.
17184 produit.

Et je dis, en commençant par les unités, 6 fois 4 font 24, j'écris 4, et je retiens deux unités pour les deux dixaines.

2°. 6 fois 6 font 36, et deux que j'ai retenues font 38; je pose 8 et je retiens 3.

3e. 6 fois 8 font 48, et 3 que j'ai retenues font 51 ; je pose 1, et je retiens 5.

4e. 6 fois 2 font 12, et 5 que j'ai retenues font 17 que j'écris en entier, parce qu'il n'y a plus rien à multiplier. Le nombre 17184 est le produit demandé, ou le nombre des pieds que valent les 2864 toises, puisqu'il renferme 6 fois les 4 unités, 6 fois les 6 dixaines, 6 fois les 8 centaines, 6 fois les 2 mille, et par conséquent 6 fois le nombre 2864.

## *De la Multiplication par un nombre de plusieurs chiffres.*

51. Lorsque le multiplicateur a plusieurs chiffres, il faut faire successivement, avec chacun de ces chiffres, ce que l'on vient de prescrire lorsqu'il n'y en a qu'un, mais en commençant toujours par la droite. Ainsi on multipliera d'abord tous les chiffres du multiplicande par le chiffre des unités du multiplicateur ; puis par celui des dixaines, et l'on écrira ce second produit sous le premier ; mais comme il doit être un nombre de dixaines, puisque c'est par des dixaines qu'on multiplie, on portera le premier chiffre de ce produit sous les dixaines, et les autres chiffres toujours en avançant sur la gauche.

Le troisième produit, qui se fera en multipliant par les centaines, se placera de même sous le second, mais en avançant encore d'une place : on suivra la même loi pour les autres.

Toutes ces multiplications étant faites, on ajoutera les produits particuliers qu'elles ont donnés, et la somme sera le produit total.

EXEMPLE.

On propose de multiplier 65487
par. . . . . 6958

523896
327435
589383
392922

455658546 produit

Je multiplie d'abord 65487 par le nombre 8 des unités du multiplicateur, et j'écris successivement sous la barre les chiffres du produit 523896 que je trouve en suivant la règle donnée pour le premier cas (50).

Je multiplie de même le nombre 65487 par le second chiffre 5 du multiplicateur, et j'écris le produit 327435 sous le premier produit, mais en plaçant le premier chiffre 5 sous les dixaines de ce premier produit.

Multipliant pareillement 65487 par le troisième chiffre 9, j'écris le produit 589383 sous le précédent, mais en plaçant le premier chiffre 3 au rang des centaines, parce que le nombre par lequel je multiplie est un nombre de centaines.

Enfin je multiplie 65487 par le dernier chiffre 6 du multiplicateur, et j'écris le produit 392922 sous le précédent, en avançant encore d'une place, afin que son premier chiffre occupe la place des mille, parce que le chiffre par lequel on multiplie marque des mille. Enfin j'ajoute tous ces produits, et j'ai 455658546 pour le produit de 65487 multiplié par 6958, c'est-à-dire pour la valeur de 65487 pris 6958 fois. En effet, on a pris 65487, 8 fois par la première opération, 50 fois par la seconde, 900 fois par la troisième, et 6000 fois par la quatrième.

52. Si le multiplicande ou le multiplicateur, ou tous les deux etaient terminés par des zéro, on abrégerait l'opération, en multipliant comme si ces zéro n'y étaient point ; mais on les mettrait tous à la suite du produit

EXEMPLE.

On propose de multiplier 6500
par. . . . . 350

325
195

2275000

Je multiplie seulement 65 par 35, et je trouve 2275, à côté

duquel j'écris les trois zéro qui se trouvent, en tout, à la suite du multiplicande et du multiplicateur.

En effet, le multiplicande 6500 représente 65 centaines ; ainsi quand on multiplie 65, on doit sous-entendre que le produit est des centaines. Pareillement, le multiplicateur 350 marque 35 dixaines ; ainsi quand on multiplie par 35, on doit sous-entendre que le produit sera des dixaines. Il sera donc des dixaines de centaines, c'est-à-dire des mille, il doit donc avoir trois zéro. On appliquera un raisonnement semblable à tous les cas.

53. Lorsqu'il se trouve des zéro entre les chiffres du multiplicateur, comme la multiplication par ces zéro ne donnerait que des zéro, on se dispensera d'écrire ceux-ci dans le produit ; et passant tout de suite à la multiplication par le premier chiffre significatif qui vient après ces zéro, on en avancera le produit sur la gauche d'autant de places plus une, qu'il y a de zéro qui se suivent dans le multiplicateur ; c'est-à-dire de deux places s'il y a un zéro, de trois s'il y en a deux.

EXEMPLE.

| | |
|---|---|
| Si l'on a. . . . . | 42052 |
| à multiplier par. . . . | 3006 |
| | 252312 |
| | 126156 |
| | 126408312 |

Après avoir multiplié par 6 et écrit le produit 252312, on multipliera tout de suite par 3 ; mais on écrira le produit 126156, de manière qu'il marque des mille ; il faudra donc le reculer de trois places, c'est-à-dire d'une place de plus qu'il n'y a de zéro interposés aux chiffres du multiplicateur.

## *De la Multiplication des parties décimales.*

54. Pour multiplier les parties décimales, on observera la même règle que pour les nombres entiers, sans faire aucune attention à la virgule ; mais, après avoir trouvé le produit, on

en séparera sur la droite, par une virgule, autant de chiffres qu'il y a de décimales, tant dans le multiplicande que dans le multiplicateur.

EXEMPLE I.

On propose de multiplier 54,23
par. . . . . 8,3

16269
43384

450,109

Je multiplierai 5423 par 83, le produit sera 450109; et comme il y a deux décimales dans le multiplicande, et une dans le multiplicateur, je séparerai trois chiffres sur la droite de ce produit qui par là deviendra 450.109, tel qu'il doit être.

La raison de cette règle est facile à saisir, en observant que si le multiplicateur était 83, le produit n'aurait en décimales que des *centièmes*, puisqu'on aurait *répété* 83 *fois le multiplicande* 54,23 dont les décimales sont des centièmes; mais comme le multiplicateur est 8,3 c'est-à-dire (21) dix fois plus petit que 83, le produit doit donc avoir des unités dix fois plus petites que les centièmes; le dernier chiffre de ces décimales doit donc (23) être des *millièmes;* il doit donc y avoir trois chiffres décimaux dans ce produit, c'est-à-dire autant qu'il y en a, tant dans le multiplicande que dans le multiplicateur.

On peut appliquer un raisonnement semblable à tout autre cas.

EXEMPLE II.

Si l'on avait. . . . . 0,12
a multiplier par. . . . . 0,3

0,036

On multiplierait 12 par 3, ce qui donnerait 36. Comme la règle prescrit de séparer ici trois chiffres, on pourrait être embarrassé à y satisfaire, puisque ce produit 36 n'en a que deux; mais si l'on reprend le raisonnement que nous avons appliqué à l'exemple précédent, on verra facilement qu'il faut, comme

on le voit ici, interposer un zéro entre 36 et la virgule. En effet, si l'on avait 0,12 à multiplier par 3, il est évident qu'on aurait 0,36; mais comme on n'a à multiplier que par 0,3, c'est-à-dire par un nombre dix fois plus petit que 3, on doit avoir un produit dix fois plus petit que 0,36, c'est-à-dire des millièmes, et c'est ce qui a eu lieu (28) lorsqu'on a écrit 0,036.

55. Comme on n'emploie ordinairement les décimales que dans la vue de faciliter les calculs, en substituant à un calcul rigoureux une approximation suffisante, mais prompte, il n'est pas inutile d'exposer ici un moyen d'abréger l'opération, lorsqu'on n'a besoin d'avoir le produit que jusqu'à un degré d'exactitude proposé.

Supposons, par exemple, qu'ayant à multiplier 45,625957 par 28,635, je n'ai besoin d'avoir le produit qu'à moins d'un millième près. J'écris ces deux nombres comme on le voit ci-dessous, c'est-à-dire qu'après avoir renversé l'ordre des chiffres de l'un des deux, je l'écris sous l'autre, en faisant répondre le chiffre 8 de ses unités sous la décimale immédiatement inférieure de deux degrés à celui auquel je veux borner mon produit. Je fais ensuite la multiplication, en négligeant, dans le multiplicande, tous les chiffres qui se trouvent a la droite de celui par lequel je multiplie; et à mesure que je change de chiffre dans le multiplicateur, je porte toujours le premier chiffre du nouveau produit sous le premier chiffre du premier. L'addition de tous ces produits étant faite, je supprime les deux derniers chiffres, en observant cependant d'augmenter le dernier de ceux qui restent, d'une unité, si les deux que je supprime passent 50; après quoi je place la virgule au rang fixé par l'espèce de décimales que je me proposais d'avoir

EXEMPLE.

| | |
|---|---|
| Je veux multiplier. . . . . | 45,625957 |
| par. . . . . | 28,635 |

mais je n'ai besoin d'avoir le produit qu'à un millième d'unité près.

| | |
|---|---|
| J'écris ainsi ces deux nombres | 45,625957 |
| | 53682 |
| | 91251914 |
| | 36500760 |
| | 2737554 |
| | 136875 |
| | 22810 |
| | 1306499 13 |
| produit. . . . . | 1306,499 |

Et si l'on avait fait la multiplication à l'ordinaire, on aurait eu. . . . . 1306,499278695, qui s'accorde avec le précédent jusqu'à la troisième décimale, ainsi qu'on le demande.

S'il n'y avait pas assez de chiffres décimaux dans le multiplicande, pour faire correspondre le chiffre des unités du multiplicateur au chiffre auquel la règle prescrit de le faire correspondre, on y suppléerait en mettant des zéro.

EXEMPLE.

On doit multiplier. . . . . 54,236
par. . . . . 532,27
et l'on veut avoir le produit à un centième d'unité près.

J'écris. . . . . 54,236000
. 72235

271180000
16270800
1084720
108472
37961

28868197

produit. . . . . 28868,20 en ajoutant une unité au dernier chiffre, parce que les deux que l'on supprime passent 50.

Pour troisième exemple, supposons qu'on ait à multiplier
0,227538917
par. . . . . 0,5664178
et l'on ne veut avoir que 7 décimales au produit, on écrira
0,227538917
8714665o

. . . . . .o
113769455
13652334
1365228
91012
2275
1589
176

1288209

produit. . . . . 0,1288821

## *Sur quelques usages de la Multiplication.*

56. Nous ne nous proposons pas de faire connaître tous les usages que l'on peut faire de la multiplication, nous en indiquerons seulement quelques-uns qui mettront sur la voie pour les autres.

La multiplication sert à trouver, en général, la valeur totale de plusieurs unités, lorsqu'on connaît la valeur de chacune. Par exemple : 1° Combien doivent coûter 5842 toises, à raison de $54^{\#}$ la toise? Il faut multiplier $54^{\#}$ par 5842, ou (44) $5842^{\#}$ par 54 : on aura $315468^{\#}$ pour le prix total demandé. 2° Combien 5954 pieds cubes (1) d'eau pèsent-ils en supposant que le pied cube pèse 72 lb ? Il faut multiplier 72 lb par 5954, ou 5954 lb par 72 : on aura 428688 lb pour le poids de 5954 pieds cubes.

57. On emploie la multiplication pour convertir les unités d'une certaine espèce en unités d'une espèce plus petite. Par exemple, pour réduire les livres en sous, et ceux-ci en deniers ; les toises en pieds, ceux-ci en pouces, ces derniers en lignes ; les jours en heures, celles-ci en minutes, ces dernières en secondes. On a souvent besoin de ces sortes de conversions. Nous en donnerons quelques exemples.

Si l'on demande de convertir $8^{\#}\ 17^{s}\ 7^{d}$ en deniers ; comme la livre vaut $20^{s}$, on multipliera les $8^{\#}$ par 20 (52) ; ce qui donnera $160^{s}$ auxquels joignant les $17^{s}$, on aura $177^{s}$ qu'on multipliera par 12, parce que chaque sou vaut 12 deniers ; et on aura 2124 deniers, lesquels joints aux 7 deniers donnent 2131 deniers pour la valeur de $8^{\#}\ 17^{s}\ 7^{d}$ convertis en deniers.

Si l'on demande combien une année commune, ou 365 jours 5 heures 48 minutes, ou $365^{j}\ 5^{h}\ 48^{m}$ valent de minutes ; comme le jour est de 24 heures, on multipliera $24^{h}$ par 365, et au pro-

(1) Le pied cube est une mesure d'un pied de long sur un pied de large et, sur un pied de haut, avec laquelle on évalue la capacité des corps, ainsi qu'on le verra en Géométrie.

duit $8760^h$ on ajoutera $5^h$ ; on multipliera le total 8765 par 60 (52), parce que l'heure contient 60 minutes, et l'on aura 525900 minutes ; auxquelles ajoutant 48 minutes, on aura 525948 pour le nombre de minutes contenues dans une année commune.

Cette conversion des parties du temps est utile dans quelques opérations du *pilotage*.

58. L'abréviation dont nous avons parlé (52) peut être employée pour réduire promptement en livres un certain nombre de *tonneaux*. Comme le tonneau de poids pèse 2000 livres, si l'on a, par exemple, 854 tonneaux, il n'y a qu'à doubler 854, et mettre les trois zéro à la suite du produit ; on aura 1708000 pour le nombre de livres que pèsent 854 tonneaux.

Avant de terminer ce qui regarde la multiplication, faisons observer aux commençans que ces expressions *doubler*, *tripler*, *quadrupler*, etc., signifient la même chose que multiplier par 2, par 3, par 4, etc.

## *De la Division des nombres entiers et des parties décimales.*

59. Diviser un nombre par un autre, c'est, en général, chercher combien de fois le premier de ces deux nombres contient le second.

Le nombre que l'on doit diviser s'appelle *dividende*, celui par lequel on doit diviser, *diviseur*, et celui qui marque combien de fois le dividende contient le diviseur s'appelle *quotient*.

On n'a pas toujours pour but, dans la division, de savoir combien de fois un nombre en contient un autre ; mais on fait l'opération comme si elle tendait à ce but ; c'est pourquoi on peut, dans tous les cas, la considérer comme l'opération par laquelle on trouve combien de fois le dividende contient le diviseur.

Il suit de là que si l'on multiplie le diviseur par le quotient, on doit reproduire le dividende, puisque c'est prendre le diviseur autant de fois qu'il est dans le dividende : cela est général, soit que le quotient soit un nombre entier, soit qu'il soit un nombre fractionnaire.

Quant à l'espèce des unités du quotient, ce n'est ni par l'espèce de celles du dividende, ni par l'espèce de celles du diviseur, ni par l'une et l'autre qu'il faut en juger; car le dividende et le diviseur restant les mêmes, le quotient, qui sera aussi toujours le même numériquement, peut être fort différent pour la nature de ses unités, selon la question qui donne lieu à cette division.

Par exemple, s'il est question de savoir combien 8# contiennent 4#, le quotient sera un nombre abstrait qui marquera 2 fois; mais s'il est question de savoir combien pour 8# on fera faire d'ouvrage à raison de 4# la toise, le quotient sera 2 toises, qui est un nombre concret et dont l'espèce n'a aucun rapport ni avec le dividende ni avec le diviseur.

Mais on voit, en même temps, que la question seule qui conduit à faire la division dont il s'agit, décide la nature des unités du quotient.

## *De la Division d'un nombre composé de plusieurs chiffres, par un nombre qui n'en a qu'un.*

60. L'opération que nous allons décrire suppose qu'on sache trouver combien de fois un nombre d'un ou de deux chiffres contient un nombre d'un seul chiffre. C'est une connaissance déjà acquise, quand on sait de mémoire les produits des nombres qui n'ont qu'un chiffre. On peut aussi, pour y parvenir, faire usage de la table que nous avons donnée ci-dessus (48). Par exemple, si je veux savoir combien de fois 74 contient 9, je cherche le diviseur 9 dans la bande supérieure, et je descends verticalement jusqu'à ce que je rencontre le nombre le plus approchant de 74 : c'est ici 72; alors le nombre 8 qui se trouve vis-à-vis 72 dans la première colonne, est le nombre de fois, ou le quotient que je cherche.

Cela supposé, voici comment se fait la division d'un nombre qui a plusieurs chiffres, par un nombre qui n'en a qu'un.

Écrivez le diviseur à côté du dividende; séparez l'un de l'autre par un trait, et soulignez le diviseur sous lequel vous écrirez les chiffres du quotient, à mesure que vous les trouverez.

Prenez le premier chiffre sur la gauche du dividende, ou les deux premiers chiffres, si le premier ne contient pas le diviseur.

Cherchez combien de fois ce premier ou ces deux premiers chiffres contiennent le diviseur, écrivez ce nombre de fois sous le diviseur.

Multipliez le diviseur par le quotient que vous venez d'écrire, et portez le produit sous la partie du dividende que vous venez d'employer.

Enfin, retranchez le produit de la partie supérieure du dividende à laquelle il répond, et vous aurez un reste.

A côté de ce reste abaissez le chiffre suivant du dividende principal, et vous aurez un second dividende partiel, sur lequel vous opérerez comme sur le premier; plaçant le quotient à droite de celui qu'on a déjà trouvé; multipliant de même le diviseur par ce quotient, écrivant et retranchant le produit comme ci-devant.

Vous abaisserez de même, à côté du reste de cette division, le chiffre du dividende qui suit celui que vous avez descendu, et vous continuerez toujours de la même manière jusqu'au dernier inclusivement.

Cette règle va être éclaircie par l'exemple suivant :

EXEMPLE.

On propose de diviser 8769 par 7.

J'écris ces deux nombres comme on les voit ci-après :

| | | |
|---|---|---|
| dividende | 8769 | 7 diviseur |
| | 7 | 1252 $\frac{5}{7}$ quotient |
| | 17 | |
| | 14 | |
| | 36 | |
| | 35 | |
| | 19 | |
| | 14 | |
| | 5 | |

Et commençant par la gauche du dividende, je devrais dire, en 8 mille combien de fois 7 ; mais je dis simplement en 8 combien de fois 7 ? Il y est une fois. Ce 1 est naturellement mille ; mais les chiffres qui viendront après lui donneront sa véritable valeur ; c'est pourquoi j'écris seulement 1 sous le diviseur.

Je multiplie le diviseur 7 par le quotient 1, et je porte le produit 7 sous la partie 8 que je viens de diviser ; faisant la soustraction, j'ai pour reste 1.

Ce reste 1 est la partie de 8 qui n'a pas été divisée, et est une dixaine à l'égard du chiffre suivant 7 ; c'est pourquoi j'abaisse ce même chiffre 7 à côté, et je continue l'opération, en disant, en 17 combien de fois 7 ? 2 fois. J'écris ce 2 à la droite du premier quotient 1 qu'a donné la première opération.

Je multiplie, comme dans la première opération, le diviseur 7 par le quotient 2 que je viens de trouver ; je porte le produit 14 sous mon dividende partiel 17, et faisant la soustraction, il me reste 3 pour la partie qui n'a pas pu être divisée.

A côté de ce reste 3, j'abaisse 6, troisième chiffre du dividende, et je dis, en 36 combien de fois 7 ? 5 fois. J'écris 5 au quotient.

Je multiplie le diviseur 7 par 5 ; et ayant écrit le produit 35 sous mon nouveau dividende partiel, je l'en retranche, et il me reste 1.

Enfin, à côté de ce reste 1, j'abaisse le chiffre 9 du dividende, et je dis, en 19 combien de fois 7 ? 2 fois. J'écris 2 au quotient

Je multiplie le diviseur 7 par ce nouveau quotient 2, et ayant écrit le produit 14 sous mon dernier dividende partiel 19, j'ai pour reste 5.

Je trouve donc que 8769 contiennent 7 autant de fois que je marque le quotient que nous avons écrit, c'est-à-dire 1252 fois, et qu'il reste 5.

A l'égard de ce qui reste, nous nous contenterons, pour le présent, de dire qu'on l'écrit à côté du quotient, comme on le voit dans cet exemple, c'est à-dire en écrivant le diviseur au-dessous de ce reste, et séparant l'un de l'autre par un trait

et alors on prononce *cinq septièmes*. Nous expliquerons par la suite la nature de ces sortes de nombres.

61. Si, dans la suite de l'opération, quelqu'un des dividendes partiels se trouvait ne pas contenir le diviseur, on écrira zéro au quotient, en omettant la multiplication, on abaisserait tout de suite un autre chiffre à côté de ce dividende partiel, et on continuerait la division.

EXEMPLE.

Il s'agit de diviser 14464 par 8.

| | |
|---|---|
| 14464 | 8 |
| 8 | 1808 |
| 64 | |
| 64 | |
| 064 | |
| 64 | |
| 0 | |

Je prends ici les deux premiers chiffres du dividende, parce que le premier ne contient pas le diviseur.

Je trouve que 14 contient 8 une fois ; j'écris 1 au quotient : je multiplie 8 par 1, et je retranche le produit 8 de 14, ce qui me donne pour reste 6, à côté duquel j'abaisse le troisième chiffre 4 du dividende.

Je continue en disant : en 64 combien de fois 8 ? huit fois ; j'écris 8 au quotient ; en faisant la multiplication, j'ai pour produit 64 que je retranche du dividende partiel 64, il me reste 0 à côté duquel j'abaisse 6, quatrième chiffre du dividende ; et comme 6 ne contient pas 8, j'écris 0 au quotient, et j'abaisse tout de suite à côté de 6 le dernier chiffre du dividende qui est ici 4 ; pour dire en 64 combien de fois 8 ? Il y est 8 fois : après avoir écrit 8 au quotient, je fais la multiplication, et je retranche le produit 64 ; et comme il ne reste rien, j'en conclus que 14464 contiennent 8 fois 1808.

## *De la Division par un nombre de plusieurs chiffres*

62. Lorsque le diviseur aura plusieurs chiffres, on se conduira de la manière suivante :

Prenez sur la gauche du dividende autant de chiffres qu'il est nécessaire pour contenir le diviseur.

Cela posé, au lieu de chercher, comme ci-devant, combien la partie du dividende que vous avez prise, contient votre diviseur entier, cherchez seulement combien de fois le premier chiffre de votre diviseur est compris dans le premier chiffre de votre dividende, ou dans les deux premiers, si le premier ne suffit pas ; marquez ce quotient sous le diviseur, comme ci-devant.

Multipliez successivement, selon la règle donnée (50), tous les chiffres de votre diviseur par ce quotient, et portez à mesure les chiffres du produit sous les chiffres correspondans de votre *dividende partiel*. *Faites la soustraction*, et à côté du reste abaissez le chiffre suivant du dividende, pour continuer l'opération de la même manière.

Nous allons éclaircir ceci par quelques exemples, et prévenir en même temps les cas qui peuvent causer quelque embarras.

EXEMPLE I.

On propose de diviser 75347 par 53.

| | |
|---|---|
| 75347 | 53 |
| 53 | 1421 $\frac{34}{53}$ |
| 223 | |
| 212 | |
| 114 | |
| 106 | |
| 87 | |
| 53 | |
| 34 | |

Je prends seulement les deux premiers chiffres du dividende, parce qu'ils contiennent le diviseur, et au lieu de dire en 75 combien de fois 53, je cherche seulement combien les sept dixaines de 75 contiennent les cinq dixaines de 53, c'est-à-dire combien 7 contient 5; je trouve une fois, et j'écris 1 au quotient.

Je multiplie 53 par 1, et je porte le produit 53 sous 75: la soustraction faite, il reste 22, à côté duquel j'abaisse le chiffre 3 du dividende, et je poursuis, en disant pour plus de facilité: en 22 combien de fois 5? (au lieu de dire: en 223 combien de fois 53); je trouve 4 fois, j'écris 4 au quotient.

Je multiplie successivement par 4 les deux chiffres du diviseur, et je porte le produit 212 sous mon dividende partiel 223, la soustraction faite, j'ai pour reste 11; j'abaisse à côté de ce reste, le chiffre 4 du dividende, et je dis simplement comme ci-dessus, en 11 combien de fois 5? 2 fois; j'écris 2 au quotient, et je multiplie 53 par 2, ce qui me donne 106 que j'écris sous le dividende partiel 114; faisant la soustraction, j'ai pour reste 8, à côté duquel j'abaisse le dernier chiffre 7; je divise de même 87; et, continuant comme ci-dessus, je trouve 1 pour quotient, et 34 pour reste, que j'écris à côté du quotient de la manière qui a été indiquée plus haut (60).

63. On devrait, à la rigueur, chercher combien de fois chaque dividende partiel contient le diviseur entier; mais cette recherche serait souvent longue et pénible; on se contente, comme on vient de le voir, de chercher combien la partie la plus forte de ce dividende contient la partie la plus forte du diviseur. Le quotient qu'on trouve par cette voie n'est pas toujours le véritable; parce qu'en prenant ce parti, on ne fait réellement qu'une estimation approchée; mais, outre que cette estimation met presque toujours sur le but, et que, dans les cas où elle n'y met pas, elle s'en écarte peu, la multiplication qui vient ensuite sert à redresser ce qu'il peut y avoir de défectueux dans ce jugement. En effet, si le dividende partiel contenait réellement le diviseur 3 fois, par exemple, et que par l'essai qu'on fait, on eût trouvé qu'il le contient 4 fois, il est facile de voir qu'en fai-

sant la multiplication par 4, on aurait un produit plus grand que le dividende, puisqu'on prendrait le diviseur plus de fois qu'il n'est réellement dans ce dividende, et par conséquent la soustraction deviendra impossible; alors on diminuera le quotient successivement d'une, deux, etc., unités, jusqu'à ce qu'on trouve un produit qu'on puisse retrancher; au contraire, si l'on n'avait mis que 2 au quotient, le reste de la soustraction se trouverait plus grand que le diviseur; ce qui prouverait que le diviseur y est encore contenu, et par conséquent le quotient est trop faible.

Au reste, on acquiert en peu de temps l'usage de prévoir de combien on doit diminuer ou augmenter le quotient que donne la première épreuve.

EXEMPLE II.

propose de diviser 189492 par 375.

| | |
|---|---|
| 189492 | 375 |
| 1875 | 505 $\frac{117}{375}$ |
| 1992 | |
| 1875 | |
| 117 | |

Je prends les quatre premiers chiffres du dividende, parce que les trois premiers ne contiennent pas le diviseur.

Je dis ensuite, en 18 seulement combien de fois 3? il y est réellement 6 fois; mais en multipliant 375 par 6, j'aurais plus que mon dividende 1894; c'est pourquoi j'écris seulement 5 au quotient. Je multiplie 375 par 5; et après avoir écrit le produit sous 1894, je fais la soustraction, et j'ai pour reste 19.

J'abaisse à côté de 19 le chiffre 9 du dividende; et comme 199 que j'ai alors ne contient pas 375, je pose 0 au quotient, et j'abaisse à côté de 199 le chiffre 2 du dividende, ce qui me donne 1992 pour lequel je dis, en 19 seulement combien de fois 36 fois. Mais par la même raison que ci dessus, je n'écris au quotient que 5; et après avoir opéré comme ci-devant, j'ai pour reste 117.

64. Voici une réflexion qui peut servir à éviter, dans un grand nombre de cas, les tentatives inutiles. On est principalement exposé à ces essais douteux, lorsque le second chiffre du diviseur est sensiblement plus grand que le premier. Dans ce cas, au lieu de chercher combien le premier chiffre du diviseur est contenu dans la partie correspondante du dividende, il faut chercher combien ce premier chiffre augmenté d'une unité, se trouve contenu dans la partie correspondante du dividende : cette épreuve sera toujours beaucoup plus approchante que la première.

EXEMPLE.

On propose de diviser 1832 par 288.

| | |
|---|---|
| 1832 | 288 |
| 1728 | 6 $\frac{104}{288}$ |
| 104 | |

Au lieu de dire, en 18 combien de fois 2? je dirai, en 18 combien de fois 3? parce que le diviseur 288 approche beaucoup plus de 300 que de 200; je trouve 6, qui est le véritable quotient; au lieu que j'aurais trouvé 9, et j'aurais par conséquent été obligé de faire trois essais inutiles.

## *Moyen d'abréger la Méthode précédente.*

65. C'est pour rendre la méthode plus facile à saisir, que nous avons prescrit d'écrire sous chaque dividende partiel, le produit qu'on trouve en multipliant le diviseur par le quotient; mais comme le but de l'Arithmétique doit être d'abréger les opérations, nous croyons devoir faire remarquer qu'on peut se dispenser d'écrire ces produits, et faire la soustraction à mesure qu'on a multiplié chaque chiffre du diviseur. L'exemple suivant suffira pour faire entendre comment se fait cette soustraction

EXEMPLE.

*On veut diviser 756984 par 932.*

| | |
|---|---|
| 756984 | 932 |
| 1138 | 812 200/932 |
| 2064 | |
| 200 | |

Après avoir pris les quatre premiers chiffres du dividende qui sont nécessaires pour contenir le diviseur, je trouve que 75 contient 9, 8 fois; c'est pourquoi j'écris 8 au quotient, et au lieu de porter sous 7569, le produit de 932 par 8, je multiplie d'abord 2 par 8, ce qui me donne 16; mais comme je ne puis ôter 16 de 9, j'emprunte sur le chiffre suivant 6, une dixaine, qui, jointe à 9, me donne 19, desquels ôtant 16, il me reste 3, que j'écris au-dessous.

Pour tenir compte de cette dixaine empruntée, au lieu de *diminuer d'une unité le chiffre 6 sur lequel j'ai emprunté*, je *retiens cette unité* que je vais ajouter au produit suivant; ainsi continuant la multiplication, je dis 8 fois 3 font 24, et 1 que j'ai retenu font 25; comme je ne puis ôter 25 de 6, j'emprunte sur le chiffre suivant 5 du dividende, deux dixaines qui, jointes à 6, me donnent 26, desquels j'ôte 25, et il me reste 1 que j'écris sous 6; par là j'ai tenu compte de la première dixaine dont *j'aurais dû diminuer* 6, parce que j'ai retranché une dixaine de plus. Je tiendrai, de même, compte des deux dixaines que je viens d'emprunter. Je continue donc en disant : 8 fois 9 font 72, et 2 que j'ai empruntés font 74, lesquels ôtés de 75, il reste 1.

J'abaisse à côté du reste 113 le chiffre 8 du dividende, et je continue de la même manière, en disant : en 11 combien de fois 9? 1 fois; puis une fois 2 fait 2, qui ôtés de 8 il reste 6; une fois 3 fait 3, qui ôtés de 3 il reste 0; une fois 9 est 9, qui ôtés de 11, il reste 2. J'abaisse le chiffre 4 à côté du reste 206, et je dis en 20 combien de fois 9? 2 fois; et faisant la multiplication, 2 fois 2 font 4, qui ôtés de 4, il reste 0; 2 fois 3 font 6, qui

ôtés de 6 reste 0; et enfin 2 fois 9 font 18, qui ôtés de 20, il reste 2.

66. Il peut arriver dans le cours de ces divisions partielles, que le dividende contienne le diviseur plus de 9 fois; cependant on ne doit jamais mettre plus de 9 au quotient; car si l'on pouvait seulement mettre 10, ce serait une preuve que le quotient trouvé par l'opération précédente serait faux, puisque la dixaine qu'on trouverait dans le quotient actuel, appartiendrait à ce premier quotient.

67. Si le dividende et le diviseur étaient suivis de zéro, on pourrait en ôter à l'un et à l'autre autant qu'il y en a à la suite de celui qui en a le moins. Par exemple, pour diviser 8000 par 400, je diviserai seulement 80 par 4; car il est évident que 80 centaines ne contiennent pas plus 4 centaines, que 80 unités ne contiennent 4 unités.

## *De la Division des parties décimales.*

68. Pour ne point nous arrêter à des distinctions superflues, nous réduirons l'opération de la division des décimales à cette règle seule.

Mettez à la suite de celui des deux nombres proposés, qui a le moins de décimales, un nombre de zéro suffisant pour que le nombre des décimales soit le même dans chacun; cela ne changera rien à la valeur de ce nombre (30); supprimez la virgule dans l'un et dans l'autre, et faites l'opération comme pour les nombres entiers; il n'y aura rien à changer au quotient que vous trouverez.

EXEMPLE.

On propose de diviser 12,52 par 4,3,

J'écris. . . . . 12,52 | 4,3

Ou plutôt. . . . . 12,52 | 4,30

en complétant le nombre des décimales.

Supprimant la virgule, j'ai 1252 à diviser par 430; faisant l'opération

$$\begin{array}{r|l} 1252 & 430 \\ \hline 392 & 2\ \frac{392}{430} \end{array}$$

Je trouve 2 pour quotient, et 392 pour reste, c'est-à-dire que le quotient est 2 et $\frac{392}{430}$.

Mais comme l'objet qu'on se propose, quand on se sert de décimales, est d'éviter les fractions ordinaires, au lieu d'écrire le reste 392 sous la forme de fraction, comme on vient de le faire, on continuera l'opération comme dans l'exemple suivant.

EXEMPLE.

$$\begin{array}{r|l} 1252 & 430 \\ \hline & 2,9116 \\ 3920 & \\ 500 & \\ 700 & \\ 2700 & \\ 120 & \end{array}$$

Après avoir trouvé le quotient en entier, qui est ici 2, on mettra à côté du reste 392, un zéro qui, à la vérité, rendra ce reste dix fois trop grand ; on continuera de diviser par 430, et ayant trouvé qu'il faudrait mettre 9 au quotient, on l'y mettra en effet, mais après avoir marqué la place des unités entières, en mettant une virgule après le 2 ; par ce moyen, le 9 ne marquera plus que des dixièmes : après la multiplication et la soustraction faites, on mettra à côté du reste 50 un zéro, ce qui est la même chose que si l'on en avait mis d'abord deux à côté du dividende ; mais en mettant après le 9 le quotient 1 qu'on trouvera, on lui donnera par là sa véritable valeur, puisqu'alors il marque des centièmes ; on continuera ainsi tant qu'on le jugera nécessaire. En s'en tenant à deux décimales, on a la valeur du quotient à moins d'un centième d'unité près ; en poussant jusqu'après trois chiffres, on a le quotient à moins d'un millième près, et ainsi de suite, puisqu'on n'aurait pas pu mettre

une unité de plus ou de moins, sans rendre le quotient trop fort ou trop faible.

Tous les restes de division peuvent être réduits ainsi en décimales.

Il reste à expliquer pourquoi la suppression de la virgule dans le dividende et dans le diviseur ne change rien au quotient, lorsqu'on a rendu le nombre des décimales le même dans chacun de ces deux nombres : c'est ce qu'il est aisé d'apercevoir, parce que dans l'exemple ci-dessus le dividende 12,52 et le diviseur 4,30 ne sont autre chose que 1252 centièmes et 430 centièmes, puisque les unités entières valent des centaines de centièmes (22); or, il est clair que 1252 centièmes ne contiennent pas autrement 430 centièmes, que 1252 unités ne contiennent 430 unités; donc la considération de la virgule est inutile quand on a complété le nombre des décimales.

69. Lorsqu'on n'a besoin de connaître le quotient d'une division que jusqu'à un degré d'exactitude proposé, on peut abréger le calcul par la méthode suivante. Nous supposerons d'abord qu'on n'a besoin de connaître ce quotient qu'à une unité près ; nous ferons voir ensuite comment on doit appliquer la méthode, pour l'avoir aussi près qu'on voudra : voici la règle.

Supprimez sur la droite du dividende, autant de chiffres, moins un, qu'il y en a dans le diviseur : faites ensuite la division comme à l'ordinaire : s'il n'y a point de reste, vous mettrez à la suite du quotient autant de zéro que vous avez supprimé de chiffres dans le dividende. Mais s'il y a un reste, vous continuerez de diviser, non pas par le même diviseur qu'auparavant, ce qui n'est plus possible, mais par ce diviseur dont vous aurez supprimé le dernier chiffre de la droite : après cette division, vous diviserez le nouveau reste par le diviseur précédent, dont vous supprimez le dernier chiffre sur la droite; et vous continuerez ainsi de diviser, en supprimant à chaque division un chiffre sur la droite du diviseur.

EXEMPLE.

On veut savoir, à moins d'une unité près, le quotient de 8789236487 divisé par 64423. Je supprime les quatre premiers chiffres de la droite du dividende, et je divise 878923 par le diviseur proposé 64423

| | |
|---|---|
| 878923 | 64423 |
| 234693 | 136430 |
| 41424 | ...6442 |
| 2772 | ...644 |
| 196 | ...64 |
| 4 | ...6 |

Je trouve d'abord 13 pour quotient, et 41424 pour reste : je divise donc 41424 par 6442, en supprimant le dernier chiffre 3 du diviseur : j'ai pour quotient 6 que j'écris à la suite du premier quotient 19 ; et le reste est 2772 que je divise par 644, en supprimant encore un chiffre sur la droite du diviseur primitif : j'ai pour quotient 4, que j'écris à la suite du quotient principal 136 ; le reste est 196 que je divise par 64, en supprimant encore un chiffre dans le diviseur : le quotient est 3, et le reste 4. Enfin, je divise par 6, et j'ai 0 pour quotient ; en sorte que le quotient de 8789236487 divisé par 64423, est 136430, à moins d'une unité près. En effet, le quotient exact est $136430\frac{6597}{64423}$.

Il n'est pas indispensable d'écrire à chaque fois comme nous l'avons fait le nouveau diviseur ; on peut se contenter de barrer, dans le diviseur primitif, chaque chiffre à mesure qu'on passe à une nouvelle division : ce n'a été que pour rendre l'opération plus sensible, que nous avons écrit ces diviseurs à côté des restes successifs.

72. Si le reste de la première division se trouvait plus petit que n'est le diviseur après qu'on en a supprimé le dernier chiffre, on mettrait zéro au quotient ; et s'il se trouvait encore plus petit que ne serait ce diviseur, après qu'on en a encore ôté le dernier des chiffres restans, on mettrait encore un zéro au quotient, et ainsi de suite.

EXEMPLE.

Pour avoir, à moins d'une unité près, le quotient de 55106054 divisé par 643, je divise, comme à l'ordinaire, la partie 551060 qui reste après la suppression des deux derniers chiffres du dividende proposé

| | |
|---|---|
| 551060 | 643 |
| 3666 | 85701 |
| 4510 | |
| 009 ... 64 | |
| 9 ... 6 | |
| 3 | |

J'ai pour quotient 857, et 9 pour reste : il faut donc diviser ce reste par 64, seulement ; comme 9 ne contient pas ce diviseur, je mets 0 au quotient, et j'ai encore pour reste 9, que je divise par 6 seulement, en sorte que le quotient cherché est 85701, à moins d'une unité près.

71. Si lorsqu'au commencement de l'opération on supprime sur la droite du dividende les chiffres que la règle prescrit de supprimer, il se trouve que les chiffres restans ne contiennent pas le diviseur, on supprimera tout de suite, sur la droite du diviseur, autant de chiffres qu'il est nécessaire pour que le diviseur y soit contenu.

EXEMPLE.

On veut avoir, à moins d'une unité près, le quotient de 1611527 divisé par 64524.

Je supprime les quatre chiffres 1527 de la droite du dividende. Mais comme les chiffres restans 161 ne peuvent pas être divisés par 64524, je supprime, dans ce diviseur, les trois derniers chiffres 524 qui doivent être supprimés pour que ce diviseur soit contenu dans le dividende restant 161 ; ainsi je divise 161 par 64, en opérant comme dans l'exemple précédent,

$$\begin{array}{r|l} 161 & 64 \\ \hline 33 \ldots. & 25 \\ 3 & \end{array} \quad 6$$

et j'ai 25 pour le quotient de 1611527 divisé par 64524, à moins d'une unité près : en effet, le quotient exact est $24\frac{62951}{64524}$ qui est beaucoup plus près de 25 que de 24.

72. A mesure qu'on supprime un chiffre dans le diviseur, il convient, pour plus d'exactitude, d'augmenter d'une unité le dernier de ceux qui restent, si celui qu'on supprime est au-dessus de 5 ou égal à 5. On augmentera, de même, d'une unité, le dernier des chiffres qui restent dans le dividende, après la suppression que la règle prescrit, si ceux-ci surpassent ou 5, ou 50, ou 500, selon qu'il y en a 1, ou 2, ou 3, etc.

EXEMPLE

On veut avoir, à moins d'une unité près, le quotient de 8657627 divisé par 1987.

Je divise donc 8658 par 1987, comme il

$$\begin{array}{r|l} 8658 & 1987 \\ \hline 710 \ldots. & 4357 \\ 113 \ldots. & 199 \\ 13 \ldots. & 20 \\ & 2 \end{array}$$

c'est-à-dire qu'au lieu de diviser le reste 710 par 198 seulement, je le divise par 199, parce que le dernier chiffre 7, que je supprime, est au-dessus de 5. Même raison pour la division suivante. Mais comme le dernier diviseur qui est contenu 6 fois $\frac{1}{2}$ dans 13, est un peu trop fort, je mets 7 au quotient.

73. Maintenant il est facile de voir ce qu'il y a à faire, lorsqu'on veut avoir le quotient beaucoup plus exactement Par exemple, si l'on voulait

avoir le quotient à un dix-millième d'unité près, la question se réduirait à mettre autant de zéro (ici ce serait quatre) à la suite du dividende, qu'on veut avoir de décimales au quotient; après quoi on fera la division selon la méthode actuelle. Et lorsqu'on aura trouvé le quotient, à moins d'une unité près, on en séparera sur la droite, par une virgule, autant de chiffres qu'on voulait avoir de décimales.

EXEMPLE.

On veut avoir, à moins d'un dix-millième d'unité près, le quotient de 6927 divisé par 4532; je mets quatre zéro à la suite de 6927, et la question se réduit à avoir, à moins d'une unité près, le quotient de 69270000 divisé par 4532, c'est-à-dire conformément à la règle ci-dessus, a diviser 69270 par 4532, comme il suit:

| | |
|---|---|
| 69270 | 4532 |
| 23950 | 15285 |
| 1290....453 | |
| 384....45 | |
| 24....5 | |

le quotient cherché est donc 1,5285, à moins d'un dix-millième d'unité près.

S'il y avait des décimales dans le dividende, ou dans le diviseur, ou dans tous les deux, on les ramènerait d'abord à n'en point avoir, selon ce qui a été dit (68); après quoi on opérerait comme dans ce dernier exemple.

Donc si l'on voulait réduire une fraction proposée, en décimales, on y parviendrait promptement par cette méthode, ayant égard à ce qui a été dit (71).

Ainsi, si l'on veut réduire $\frac{4253}{9678}$ en décimales, et en avoir la valeur à moins d'*un millième d'unité près*, on aura 4253000 à diviser par 9678; ce qui (69) se réduira à diviser 4253 par 9678, et (71 et 72) à diviser 4253 par 968, selon la méthode actuelle. On trouvera donc 439; en sorte qu'on aura 0,439 pour la valeur de $\frac{4253}{9678}$, à moins d'un millième près.

Il pourrait néanmoins arriver que le quotient trouvé d'après ces règles fût fautif de 1, 2, ou 3 unités dans le dernier chiffre. Quoique ce cas doive se rencontrer très-rarement, il n'est pas inutile de faire observer qu'on peut toujours le prévenir facilement, en ne séparant, au commencement de l'opération, sur la droite du dividende, qu'autant de chiffres moins deux qu'il y en a dans le diviseur, en opérant du reste comme ci-dessus. Lorsque le quotient sera trouvé, on en supprimera le dernier chiffre, en observant d'ajouter une unité au dernier de ceux qui resteront si celui qu'on supprime est plus grand que 5.

## *Preuve de la Multiplication et de la Division.*

74. On peut tirer de la définition même que nous avons donnée de chacune de ces deux opérations, le moyen d'en faire la preuve.

Puisque dans la multiplication on prend le multiplicande autant de fois que le multiplicateur contient d'unités, il s'ensuit que si l'on cherche combien de fois le produit contient le multiplicande, c'est-à-dire (59) si l'on divise le produit par le multiplicande, on doit trouver, pour quotient, le multiplicateur, et *vice versâ*; en général, *si l'on divise le produit d'une multiplication par l'un de ses facteurs, on doit trouver pour quotient l'autre facteur.*

Par exemple, ayant trouvé ci-dessus (50) que 2864 multiplié par 6 a donné 17184, je divise 17184 par 2864; je dois trouver, et je trouve en effet, 6 pour quotient.

Pareillement, puisque le quotient d'une division marque combien de fois le dividende contient le diviseur, il s'ensuit que si l'on prend le diviseur autant de fois qu'il est marqué par le quotient, c'est-à-dire si l'on multiplie le diviseur par le quotient, on doit reproduire le dividende, lorsque la division a été faite sans reste, et que, dans le cas où il y a un reste, si l'on multiplie le diviseur par le quotient, et qu'au produit on ajoute le reste de la division, on doit reproduire le dividende.

Par exemple, nous avons trouvé ci-dessus (63) que 189492 divisé par 375, donnait 505 pour quotient, et 117 pour reste. En multipliant 375 par 505, on trouve 189375, auquel ajoutant le reste 117, on retrouve le dividende 189492.

Ainsi la multiplication et la division peuvent se servir de preuve réciproquement.

Mais on peut vérifier ces opérations par un moyen plus prompt que nous allons exposer; il ne faut pas, pour cela, négliger les réflexions que nous venons de faire; elles seront utiles dans beaucoup d'autres occasions.

## *Preuve par* 9.

75. Supposons qu'après avoir multiplié 65498 par 454, et trouvé que le produit est 29736092, on veuille éprouver si ce produit est exact.

On ajoutera tous les chiffres 6,5,4,9,8, du multiplicande comme s'ils ne contenaient que des unités simples, et on retranchera 9 à mesure qu'il se trouvera dans la somme : on aura un reste qui sera ici 5.

On ajoutera pareillement les chiffres 4,5,4 du multiplicateur, et retranchant pareillement tous les 9 que produira cette addition, on aura pour reste 4.

On multipliera le reste 5 du multiplicande par le reste 4 du multiplicateur, et du produit 20 on retranchera les 9 qu'il peut renfermer ; il restera 2.

Si le produit est exact, il faut qu'ajoutant de même tous les chiffres 2,9,7,3,6,0,9,2, de ce produit, et retranchant tous les 9, il ne reste aussi que 2 ; ce qui a lieu en effet.

Cette règle est fondée sur ce principe que, pour avoir le reste de la soustraction de tous les 9 qu'un nombre peut renfermer, il n'y a qu'à chercher le reste que ses chiffres, ajoutés comme des unités simples, donneraient après la suppression des 9.

En effet, si d'un nombre exprimé par un seul chiffre suivi de plusieurs zéro on retranche tous les 9, le reste sera exprimé par ce seul chiffre. Si de 4000, ou de 500, ou de 60000, vous retranchez tous les 9, le reste sera 4, ou 5, ou 6, etc., ce qui est aisé à voir.

Donc le reste que donnerait, par la suppression des 9, un nombre tel que 65498 (qui est la même chose que 60000, plus 5000, plus 400, plus 90, plus 8) sera le même que celui que donneraient 6, plus 5, plus 4, plus 9, plus 8 ; c'est-à-dire le même que si l'on ajoutait ces chiffres contenant des unités simples.

En voici maintenant l'application à la preuve de la multiplication.

Puisque 65498 est composé d'un certain nombre de 9 et d'un reste 5, et que le multiplicateur 453 est composé aussi d'un certain nombre de 9 et d'un reste 4, il ne peut s'en falloir que du produit de 5 par 4 ou 20, que le produit total ne soit divisible par 9, ou, en ôtant les 9, il ne doit s'en falloir que de 2 que le produit total ne soit divisible par 9 : donc il doit rester au produit la même quantité que dans le produit des deux restes après la suppression des 9 qu'il renferme.

On pourrait faire aussi cette épreuve de la même manière par le nombre 3.

A l'égard de la division, elle devient facile à éprouver d'après ce qui a été dit (74). Après avoir ôté du dividende le reste qu'a donné la division, on regardera le résultat comme un produit dont le diviseur et le quotient sont les facteurs, et par conséquent on y appliquera la preuve par 9, de la même manière qu'on vient de le faire.

A parler exactement, cette vérification n'est pas infaillible, parce que dans la multiplication, par exemple, si l'on s'était trompé de quelques unités sur quelque chiffre du produit, et qu'en même temps on eût fait une erreur égale, mais en sens contraire, sur quelque autre chiffre du même produit; comme cela ne changerait rien au reste que l'on aurait après la suppression des 9, cette règle ne ferait point apercevoir l'erreur; mais comme il faut, ainsi qu'on le voit, au moins deux erreurs, et deux erreurs qui se compensent, ou qui ne diffèrent que d'un certain nombre de fois 9, les cas où cette vérification serait fautive sont très-rares dans l'usage.

## *Quelques usages de la Règle précédente.*

76. La division sert non-seulement à trouver combien de fois un nombre en contient un autre, mais encore à partager un nombre en parties égales. Prendre la moitié, le tiers, le quart, le cinquième, le vingtième, le trentième, etc., d'un nombre, c'est diviser ce nombre par 2, 3, 4, 5, 20, 30, etc., ou le partager en 2, 3, 4, 5, 6, 20, 30, etc., parties égales, pour prendre une de ses parties.

La division sert encore à convertir les unités d'une certaine espèce, en unités d'une espèce supérieure; par exemple, un certain nombre de deniers en sous, et ceux-ci en livres. Pour

réduire 5864 deniers en sous, on remarquera que, puisqu'il faut 12 deniers pour faire un sou, autant de fois il y aura 12 deniers dans 5864 deniers, autant il y aura de sous; il faut donc diviser par 12, et on trouvera 488 sous et 8 deniers de reste. Pour réduire en livres les 488 sous, on divisera 488 par 20, puisqu'il faut 20 sous pour faire la livre, et on aura en total 24 livres 8 sous 8 deniers.

A l'occasion de cette division par 20, nous remarquerons que quand on a à diviser par un nombre suivi de zéro, on peut abréger l'opération en séparant sur la droite du dividende autant de chiffres qu'il y a de zéro; on divise la partie qui reste à gauche par les chiffres significatifs du diviseur; s'il y a un reste, on écrit à sa suite les chiffres qu'on a séparés, ce qui donne le reste total. Par exemple, pour diviser 5834 par 20, je sépare le dernier chiffre 4, et je divise par 2 la partie restante 583; j'ai pour quotient 291, et 1 pour reste; j'écris à côté de ce reste 1 le chiffre séparé 4, ce qui me donne 14 pour reste total, en sorte que le quotient est $291\frac{14}{20}$.

Cette observation peut être appliquée à la réduction de la charge d'un navire en tonneaux de poids. Si l'on sait que la charge est de 2584954 ℔ : pour la réduire en tonneaux, c'est-à-dire pour diviser par 2000, on séparera les trois derniers chiffres de la droite; et prenant la moitié des autres, on aura 1292 tonneaux et 954 ℔.

Quand on veut évaluer en livres et sous le vingtième d'un nombre de livres proposé, il suit de cette règle que l'opération se réduit à compter le dernier chiffre pour des sous, et prendre moitié des autres chiffres que l'on comptera pour des livres. Si, en prenant cette moitié, il reste une unité, on la comptera pour une dixaine de sous qu'on placera à la gauche du chiffre qu'on a séparé d'abord. Par exemple, si l'on veut avoir le vingtième de 54672 livres, on séparera le dernier chiffre 2 que l'on comptera pour 2 sous; et prenant la moitié de 5467, qui est 2733, avec une unité de reste, on écrira 2733 livres 12 sous : la raison de cette règle est évidente, en faisant attention que 54672 est 54660 livres, plus 12 livres; or, le vingtième de 54660 est évidemment 2733, et celui de 12 livres est 12 sous, puisque le vingtième d'une livre est un sou. S'il y avait des sous et deniers dans la somme proposée, on négligerait les deniers, dont la vingtième partie ne peut jamais faire un denier. A l'égard des sous, on les triplerait; et prenant le cinquième, on les porterait

aux deniers. Ainsi le vingtième de 54672 liv. 17 s. 7 den. est 2733 liv. 12 s. 10 deniers.

S'il s'agissait d'avoir le dixième d'un nombre de livres, on séparerait le dernier chiffre, et l'ayant doublé, on le compterait pour des sous ; et on compterait comme des livres tous les chiffres restans sur la gauche. Ainsi le dixième de 67987 liv. est 6798 liv. 14 s. La raison pour laquelle on double le dernier chiffre est que le dixième d'une livre est 2 sous.

On a assez souvent besoin de prendre les 4 deniers pour livre d'une somme proposée : cela se réduit à en prendre d'abord le vingtième, comme il vient d'être dit ; puis prendre le tiers de ce vingtième. Ainsi pour avoir les quatre deniers pour livre de 8762 livres, j'en prends le vingtième qui est 438 liv. 2 sous, dont le tiers 146 liv. 0 s. 8 den forme les quatre deniers pour livre de 8762 liv. En effet, les quatre deniers pour livre ne sont autre chose que le soixantième, puisque 4 deniers sont contenus 60 fois dans la livre. Or le soixantième est le tiers du vingtième.

## *Des Fractions.*

77. Les fractions considérées arithmétiquement sont des nombres par lesquels on exprime les quantités plus petites que l'unité.

78. Pour se faire une idée nette des fractions, il faut concevoir que la quantité qu'on a prise d'abord pour unité, est elle-même composée d'un certain nombre d'unités plus petites, comme l'on conçoit, par exemple, que la livre est composée de vingt parties ou de vingt unités plus petites qu'on appelle *sous*.

Une ou plusieurs de ces parties forment ce qu'on appelle une *fraction de l'unité*. On donne aussi ce nom aux nombres qui représentent ces parties.

79. Une fraction peut être exprimée en nombres de deux manières qui sont chacune en usage.

La première manière consiste à représenter, comme les nombres entiers, les parties de l'unité que contient la quantité dont il s'agit ; mais alors on donne un nom particulier à ces parties ; ainsi pour marquer 7 parties dont on en conçoit 20 dans la livre, on emploierait le chiffre 7, mais on prononcerait 7 sous, et on écrira 7 : cette manière de marquer les parties de l'unité a lieu dans les nombres *complexes*, dont nous parlerons par la suite.

80. Mais comme il faudra un signe particulier pour chaque

division qu'on pourrait faire de l'unité, on évite cette multiplication de signes, en marquant une fraction par deux nombres placés l un au-dessous de l'autre, et séparés par un trait. Ainsi pour marquer les 7 parties dont il vient d'être question, on écrit $\frac{7}{20}$; c'est-à-dire, qu'en général, on écrit d'abord le nombre qui marque combien la quantité dont il s'agit contient de parties de l'unité, et on écrit au-dessous de ce nombre, celui qui marque combien on conçoit de ces parties dans l'unité.

81. Et pour énoncer une fraction, on énonce d'abord le nombre supérieur qui s'appelle le *numérateur*, ensuite le nombre inférieur qui s'appelle le *dénominateur;* mais on ajoute au nom de celui-ci la terminaison *ième*. Par exemple, pour énoncer $\frac{7}{20}$, on prononcera *sept vingtièmes;* pour énoncer $\frac{4}{5}$, on prononcera *quatre cinquièmes;* et par cette expression *quatre cinquièmes*, on doit entendre quatre parties, dont il en faudrait 5 pour composer l'unité.

Il faut seulement excepter de la terminaison générale, les fractions dont le dénominateur est 2 ou 3 ou 4, qui se prononcent *moitiés* ou *demies*, *tiers*, *quarts*. Ainsi ces fractions $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, se prononceraient *demi*, *deux tiers*, *trois quarts*.

82. Le numérateur marque donc combien la quantité représentée par la fraction contient de parties de l'unité; et le dénominateur fait connaître de quelle valeur sont ces parties, en marquant combien il en faut pour composer l'unité. On lui donne le nom de dénominateur, parce que c'est lui en effet qui donne le nom à la fraction, et qui fait que dans ces deux fractions, par exemple, $\frac{3}{5}$ et $\frac{2}{7}$, les parties de la première s'appellent des *cinquièmes*, et les parties de la seconde des *septièmes*.

83. Le numérateur et le dénominateur s'appellent aussi, d'un nom commun, les *deux termes de la fraction*.

## *Des Entiers considérés sous la forme de Fraction.*

84. Les opérations qu'on fait sur les fractions conduisent souvent à des résultats fractionnaires, dont le numérateur est plus grand que le dénominateur, par exemple, à des résultats tels que $\frac{8}{3}$, $\frac{27}{5}$, etc.

Ces sortes d'expressions ne sont pas des fractions proprement dites, mais ce sont des nombres entiers joints à des fractions.

85. Pour extraire les entiers qui s'y trouvent renfermés, il faut diviser le numérateur par le dénominateur. Le quotient marquera les entiers, et le reste de la division sera le numérateur de la fraction qui accompagne ces entiers. Ainsi $\frac{27}{5}$ donneront $5\frac{2}{5}$, c'est-à-dire cinq entiers et deux cinquièmes.

En effet, dans l'expression $\frac{27}{5}$, le dénominateur 5 fait connaître que l'unité est composée de 5 parties; donc autant de fois il y aura 5 dans 27, autant il y aura d'unités entières dans la valeur de la fraction $\frac{27}{5}$.

86. Les multiplications et les divisions des nombres entiers joints aux fractions, exigent, du moins pour la facilité, qu'on convertisse ces entiers en fractions.

On fait cette conversion en multipliant le nombre entier par le dénominateur de la fraction en laquelle on veut réduire cet entier. Par exemple, si l'on veut convertir 8 entiers en cinquièmes, on multipliera 8 par 5, et on aura $\frac{40}{5}$. En effet, lorsqu'on veut convertir 8 en cinquièmes, on regarde l'unité comme composée de 5 parties; les 8 unités en contiendront donc 40; pareillement, $7\frac{4}{9}$ convertis en neuvièmes feront $\frac{67}{9}$.

## *Des changemens qu'on peut faire subir aux deux termes d'une Fraction sans changer sa valeur.*

87. Il est visible que plus on concevra de parties dans l'unité, et plus il faudra de ces parties pour composer une même quantité.

88. Donc on peut rendre le dénominateur d'une fraction double, triple, quadruple, etc., sans rien changer à la valeur de la fraction, pourvu qu'en même temps on rende aussi le numérateur double, triple, quadruple, etc.

On peut donc dire; en général, qu'*une fraction ne change point de valeur, quand on multiplie ses deux termes par un même nombre.*

Ainsi $\frac{3}{4}$ est la même chose que $\frac{6}{8}$; $\frac{1}{2}$ la même chose que $\frac{2}{4}$ que $\frac{3}{6}$, que $\frac{5}{10}$, etc.

89. Par un raisonnement semblable, on voit que moins on supposera de parties dans l'unité, moins il faudra de ces parties pour former une même quantité; que, par conséquent, on peut, sans changer une fraction, rendre son dénominateur 2, 3, 4, etc., fois plus petit, pourvu qu'en même temps on rende son numérateur, 2, 3, 4, etc. fois plus petit; et en général, *une fraction ne change point de valeur quand on divise ses deux termes par un même nombre.*

Pour voir distinctement la vérité de ces deux propositions, il suffit de se rappeler ce que c'est que le dénominateur, et ce que c'est que le numérateur d'une fraction.

Remarquons donc que multiplier ou diviser les deux termes d'une fraction par un même nombre, n'est point multiplier ou diviser la fraction, puisque, comme nous venons de le dire, elle ne change point de valeur par ces opérations.

Les deux principes que nous venons de poser sont la base de deux réductions suivantes qui sont d'un très-grand usage.

*Réduction des Fractions à un même dénominateur.*

90. 1°. Pour réduire deux fractions à un même dénominateur, multipliez les deux termes de la première, chacun par le dénominateur de la seconde, et les deux termes de la seconde, chacun par le dénominateur de la première.

Par exemple, pour réduire à un même dénominateur les deux fractions $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, je multiplie 2 et 3 qui sont les deux termes de la première fraction, chacun par 4, dénominateur de la seconde, et j'ai $\frac{8}{12}$ qui (88) est de même valeur que $\frac{2}{3}$.

Je multiplie de même les deux termes 3 et 4 de la seconde fraction, chacun par 3, dénominateur de la première, et j'ai $\frac{9}{12}$ qui est de même valeur que $\frac{3}{4}$, en sorte que les fractions $\frac{2}{3}$ et $\frac{3}{4}$ sont changées en $\frac{8}{12}$ et $\frac{9}{12}$, qui sont respectivement de même valeur que celles-là, et qui ont le même dénominateur entre elles.

Il est aisé de voir que par cette méthode, le dénominateur sera toujours le même pour chacune des deux nouvelles fractions; puisque dans chaque nouvelle opération le nouveau dénominateur est formé de la multiplication des deux dénominateurs primitifs.

91. 2°. Si l'on a plus de deux fractions, on les réduira toutes au même dénominateur, en multipliant les deux termes de chacune par le produit résultant de la multiplication des dénominateurs des autres fractions.

Par exemple, pour réduire à un même dénominateur les quatre fractions $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{7}$, je multiplierai les deux termes 2 et 3 de la première, par le produit des trois dénominateurs 4, 5, 7, des autres fractions; produit que je trouve en disant : 4 fois 5 font 20, puis 7 fois 20 font 140; je multiplie donc 2 et 3 chacun par 140, et j'ai $\frac{280}{420}$ qui est de même valeur que $\frac{2}{3}$ (88).

Je multiplie pareillement les deux termes 3 et 4 de la seconde fraction, par le produit de 3, 5, 7, produit que je forme en disant : 3 fois 5 font 15, puis 7 fois 15 font 105 ; je multiplie donc 3 et 4, chacun par 105, ce qui me donne $\frac{315}{420}$, fraction de même valeur que $\frac{3}{4}$.

Passant à la troisième fraction, je multiplie ses deux termes 4 et 5 chacun par 84, produit des trois dénominateurs 3, 4, et 7, et j'ai $\frac{336}{420}$ au lieu de $\frac{4}{5}$.

Enfin pour la quatrième, je multiplierai 5 et 7, chacun par le produit 60 des dénominateurs, 3, 4, 5, des trois premières fractions, et j'aurai $\frac{300}{420}$ au lieu de $\frac{5}{7}$ ; en sorte que les quatre fractions $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{7}$ sont changées en $\frac{280}{420}, \frac{315}{420}, \frac{336}{420}, \frac{300}{420}$ moins simples, à la vérité, que celles-là ; mais de même valeur qu'elles, et susceptibles, par leur dénominateur commun, des opérations de l'addition et de la soustraction.

Remarquons que le dénominateur de chaque nouvelle fraction étant formé du produit de tous les dénominateurs primitifs, ce nouveau dénominateur ne peut manquer d'être le même pour chaque fraction.

## *Réduction des Fractions à leur plus simple expression.*

92. Une fraction est d'autant plus simple, que ses deux termes sont de plus petits nombres. Il est souvent possible d'amener une fraction proposée à être exprimée par de moindres nombres, et cela lorsque son numérateur et son dénominateur peuvent être divisés par un même nombre ; comme cette opération n'en change point la valeur (89), c'est une simplification qu'on ne doit point négliger.

Voici le procédé qu'il faudra suivre :

93. On divisera le numérateur et le dénominateur chacun par 2; et on répétera cette division tant qu'elle pourra se faire exactement.

On divisera ensuite les deux termes par 3, et on continuera de diviser l'un et l'autre par 3, tant que cela pourra se faire.

On fera la même chose successivement avec les nombres 5, 7, 11, 13, 17, etc., c'est-à-dire avec les nombres qui n'ont aucun diviseur qu'eux-mêmes, ou l'unité, et qu'on appelle *nombres premiers*.

Ainsi la seule difficulté qu'il y ait, est de savoir quand on pourra diviser par 2, 3, 5, etc.

On pourra, dans cette recherche, s'aider des principes suivants :

94. Tout nombre qui finit par un chiffre pair est divisible par 2.

Tout nombre dont la somme des chiffres ajoutés ensemble, comme s'ils étaient des unités simples, fera 3 ou un *multiple* de 3, c'est-à-dire un nombre exact de fois 3, sera divisible par 3.

Par exemple, 54231 est divisible par 3, parce que ses chiffres 5, 4, 2, 3, 1, font 15, qui est 5 fois 3.

La même chose a lieu pour le nombre 9, si les chiffres ajoutés ensemble font 9 ou un multiple de 9.

Cette propriété du nombre 3 se démontre comme celle du nombre 9, à très-peu de chose près, et l'un et l'autre se démontrent comme on l'a fait à la preuve de 9 (75).

Tout nombre terminé par un 5 ou par un zéro est divisible par 5.

A l'égard du nombre 7 et des suivans, quoiqu'il soit facile de trouver de pareilles règles, comme l'examen qu'elles supposent est aussi long que la division, il faudra essayer la division.

Proposons-nous, par exemple, de réduire la fraction $\frac{2016}{5796}$. Je divise les deux termes par 2, parce que les deux derniers chiffres de chacun sont pairs, et j'ai $\frac{1008}{2898}$. Je divise encore par

et j'ai $\frac{504}{1449}$. Ce qui a été dit ci-dessus m'apprend que je puis diviser par 3; je divise en effet, et j'ai $\frac{168}{483}$; je divise encore par 3, ce qui me donne $\frac{56}{161}$; enfin j'essaie de diviser par 7; la division réussit, et me donne $\frac{8}{23}$.

La raison pour laquelle nous prescrivons de ne tenter la division que par les nombres premiers, 2, 3, 5, 7, etc., c'est qu'après avoir épuisé la division par 2, par exemple, il est inutile de tenter de diviser par 4, puisque si celle-ci pouvait réussir, à plus forte raison la division par 2 aurait-elle encore pu se faire.

95. De tous les moyens qu'on peut employer pour réduire une fraction à une expression plus simple, le plus direct est celui de diviser les deux termes par le plus grand diviseur commun qu'ils puissent avoir : voici la règle pour trouver ce plus grand diviseur commun.

*Divisez le plus grand des deux termes par le plus petit; s'il n'y a point de reste, c'est le plus petit terme qui est le plus grand diviseur commun.*

*S'il y a un reste, divisez le plus petit terme par ce reste, et si la division se fait exactement, c'est ce premier reste qui est le plus grand diviseur commun.*

Si cette seconde division donne un reste, divisez le premier reste par le second, et continuez toujours de diviser le reste précédent par le dernier reste, jusqu'à ce que vous arriviez à une division exacte. Alors le dernier diviseur que vous aurez employé sera le plus grand diviseur des deux termes de la fraction.

*Si le dernier diviseur se trouve être l'unité, c'est une preuve que la fraction ne peut être réduite.*

Prenons, pour exemple la fraction $\frac{3760}{9024}$.

Je divise 9024 par 3760; j'ai pour quotient 2, et pour reste 1504.

Je divise 3760 par 1504; j'ai pour quotient 2, et pour reste 752.

Je divise le premier reste 1504 par le second reste 752; la division réussit, et j'en conclus que 752 peut diviser les deux termes de la fraction $\frac{3760}{9024}$, et la réduire à sa plus simple expression, qu'on trouve, en faisant l'opération, être $\frac{5}{12}$.

En effet, on a trouvé que 752 divise 1504; il doit donc diviser 3760 qu'on a vu être composé de deux fois 1504 et de 752 : on voit de même qu'il doit diviser 9024, puisque 9024 est composé de deux fois 3760 et de 1504.

On voit de plus que 752 est le plus grand commun diviseur que puissent

avoir 3760 et 9024; car il ne peut y avoir de diviseur commun entre 9024 et 3760, qui ne le soit en même temps de 3760 et 1504; et entre ces deux-ci il ne peut y en avoir un qui ne soit en même temps diviseur commun de 1504 et de 752; mais il est évident qu'entre ces deux-ci il ne peut y avoir de diviseur commun plus grand que 752; donc, etc.

## *Différentes manières dont on peut envisager une Fraction, et conséquences qu'on peut en tirer.*

96. L'idée que nous avons donnée jusqu'ici d'une fraction, est que le dénominateur représente de combien de parties l'unité est composée; et le numérateur, combien il y a de ces parties dans la quantité que la fraction exprime.

On peut encore envisager une fraction sous un autre point de vue; on peut considérer le numérateur comme représentant une certaine quantité qui doit être divisée en autant de parties qu'il y a d'unités dans le dénominateur. Par exemple, dans $\frac{4}{5}$, on peut considérer 4 comme représentant 4 choses quelconques, 4 liv., par exemple, qu'il s'agit de partager en cinq parties; car il est évident que c'est la même chose de partager 4 liv. en cinq parties pour prendre une de ces parties, ou de partager une liv en cinq parties pour prendre 4 de ces parties.

97. On peut donc considérer le numérateur d'une fraction comme un dividende, et le dénominateur comme un diviseur. On voit par là ce que signifient les restes de divisions mis sous la forme que nous leur avons donnée (60).

98. Il suit de là, 1°. qu'un entier peut toujours être mis sous la forme d'une fraction, en faisant de cet entier le numérateur, et lui donnant l'unité pour dénominateur; ainsi 8 ou $\frac{8}{1}$ sont la même chose; 5 ou $\frac{5}{1}$ sont la même chose.

99. 2°. Que pour convertir une fraction quelconque en décimales, il n'y a qu'à considérer le numérateur comme un reste de division où le dénominateur était diviseur, et opérer par con-

séquent comme il a été dit (68, exemple II), en observant de mettre d'abord un zéro au quotient pour tenir la place des unités; c'est ainsi qu'on trouvera que $\frac{3}{5}$ valent en décimales 0,6; que $\frac{5}{9}$ valent 0,555, etc., que $\frac{1}{25}$ vaut 0,04, et ainsi de suite.

C'est ainsi qu'on peut réduire en décimales tout nombre complexe proposé. Par exemple, il s'agit de réduire $3^{T}\ 5^{P}\ 8^{P}\ 7^{L}$ en décimales de la toise, de manière à ne pas négliger une demi-ligne; j'observe que la toise contient 864 lignes, et par conséquent 1728 demi-lignes; il faut donc, pour ne pas négliger les demi-lignes, porter l'exactitude au delà des millièmes, c'est-a-dire jusqu'aux dix-millièmes.

Cela posé, je réduis les $5^{P}\ 8^{P}\ 7^{L}$ tout en lignes, et j'ai 823 lignes, ou $\frac{823}{864}$ de la toise; réduisant cette fraction en décimales, comme il vient d'être dit, on a 0,9525, et par conséquent $3^{T},9525$ pour le nombre proposé.

## *Des opérations de l'Arithmétique sur les Fractions.*

100. On fait sur les fractions les mêmes opérations que sur les nombres entiers. Les deux premières opérations, l'addition et la soustraction, exigent le plus souvent une opération préparatoire; les deux autres n'en exigent point.

### *De l'addition des Fractions.*

101. Si les fractions ont le même dénominateur, on ajoutera tous les numérateurs, et l'on donnera à la somme le dénominateur commun de ces fractions. Ainsi, pour ajouter $\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{5}{7}$, j'ajoute les numérateurs 2, 3, 5, et j'ai par conséquent $\frac{10}{7}$, que je réduis à $1\frac{3}{7}$ (85).

102. Si les fractions n'ont pas le même dénominateur, on commencera par les y réduire par ce qui a été enseigné (90) et (91), après quoi on ajoutera ces nouvelles fractions de la manière qui vient d'être prescrite. Ainsi, si l'on propose d'ajouter $\frac{3}{4}, \frac{2}{3}, \frac{4}{5}$, je change ces trois fractions en trois autres $\frac{45}{60}, \frac{40}{60}, \frac{48}{60}$, dont la somme est $\frac{133}{60}$ qui se réduit à $2\frac{13}{60}$ (85).

## *De la soustraction des Fractions.*

103. Si les deux fractions proposées ont le même dénominateur, on retranchera le numérateur de l'une du numérateur de l'autre, et on donnera au reste le dénominateur commun de ces deux fractions. S'il est question de retrancher $\frac{5}{9}$ de $\frac{8}{9}$, le reste sera $\frac{3}{9}$ qui se réduit à $\frac{1}{3}$ (93).

104. Si de $9\frac{5}{8}$ on voulait retrancher $4\frac{7}{8}$; comme on ne peut ôter $\frac{7}{8}$ de $\frac{5}{8}$, on emprunterait sur 9 une unité, laquelle réduite en huitièmes et ajoutée à $\frac{5}{8}$, ferait $\frac{13}{8}$, desquels ôtant $\frac{7}{8}$, il resterait $\frac{6}{8}$; ôtant ensuite 4 de 8 qui restent après l'emprunt, il resterait en tout $4\frac{6}{8}$ ou $4\frac{3}{4}$.

105. Si les fractions n'ont pas le même dénominateur, on les y réduira (90) et (91); après quoi on fera la soustraction comme il vient d'être dit. Ainsi, pour ôter $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$, je change ces fractions en $\frac{8}{12}$ et $\frac{9}{12}$, et retranchant 8 de 9, il me reste $\frac{1}{12}$

## *De la multiplication des fractions*

106. *Pour multiplier une fraction par une fraction, il faut multiplier le numérateur de l'une par le numérateur de l'autre, et le dénominateur par le dénominateur.* Par exemple, pour multiplier $\frac{2}{3}$ par $\frac{4}{5}$, on multipliera 2 par 4, ce qui donnera 8 pour numérateur; multipliant pareillement 3 par 5, on aura 15 pour dénominateur, et par conséquent $\frac{8}{15}$ pour le produit.

Pour sentir la raison de cette règle, il faut se rappeler que multiplier un nombre par un autre, c'est prendre le multiplicande autant de fois que le multiplicateur contient d'unités. Ainsi multiplier $\frac{2}{3}$ par $\frac{4}{5}$, c'est prendre $\frac{4}{5}$ de fois la fraction $\frac{2}{3}$, ou plus exactement, c'est prendre 4 fois le cinquième de $\frac{2}{3}$; or, en multipliant le dénominateur 3 par 5, on change les tiers en quinzièmes, c'est-à-dire en parties cinq fois plus petites; et en multipliant le numérateur 2 par 4, on prend ces nouvelles parties quatre fois; on prend donc quatre fois la cinquième partie de $\frac{2}{3}$: on multiplie donc en effet $\frac{2}{3}$ par $\frac{4}{5}$.

107. Si l'on avait un entier à multiplier par une fraction, ou une fraction à multiplier par un entier, on mettrait l'entier sous la forme de fraction, en lui donnant l'unité pour dénominateur; par exemple, si j'ai 9 à multiplier par $\frac{4}{7}$, cela se réduit à multiplier $\frac{9}{1}$ par $\frac{4}{7}$, ce qui, selon la règle qu'on vient de donner, produit $\frac{36}{7}$ qui se réduisent à $5\frac{1}{7}$.

On voit donc que pour multiplier une fraction par un entier, ou un entier par une fraction, l'opération se réduit à multiplier le numérateur de cette fraction par l'entier.

108. S'il y avait des entiers joints aux fractions, il faudrait, avant de faire la multiplication, réduire ces entiers chacun en fraction de même espèce que celle qui l'accompagne. Par exemple, si l'on a $12\frac{3}{5}$ à multiplier par $9\frac{3}{4}$, je change (86) le multiplicande en $\frac{63}{5}$ et le multiplicateur en $\frac{39}{4}$, et je multiplie $\frac{63}{5}$ par $\frac{39}{4}$ selon la règle ci-dessus (106), ce qui me donne $\frac{2457}{20}$ qui valent $122\frac{17}{20}$.

## *Division des Fractions.*

109. *Pour diviser une fraction par une fraction, il faut renverser les deux termes de la fraction qui sert de diviseur, et multiplier la fraction dividende par cette fraction ainsi renversée.*

Par exemple, pour diviser $\frac{4}{5}$ par $\frac{2}{3}$, je renverse la fraction $\frac{2}{3}$, ce qui me donne $\frac{3}{2}$; je multiplie $\frac{4}{5}$ par $\frac{3}{2}$ selon la règle donnée (106), et j'ai $\frac{12}{10}$ pour le quotient de $\frac{4}{5}$ divisé par $\frac{2}{3}$.

Pour apercevoir la raison de cette règle, il faut observer que diviser $\frac{4}{5}$ par $\frac{2}{3}$, c'est chercher combien de fois $\frac{4}{5}$ contiennent $\frac{2}{3}$. Or il est facile de voir que, puisque le diviseur est 2 tiers, il sera contenu dans le dividende trois fois autant que s'il était 2 entiers; donc il faut diviser d'abord par 2, et multiplier ensuite par 3, ce qui n'est autre chose que prendre trois fois la moitié du dividende, ou le multiplier par $\frac{3}{2}$ qui est la fraction du diviseur renversée.

110. Si l'on avait une fraction à diviser par un entier, ou un entier à diviser par une fraction, on commencerait par mettre l'entier sous la forme de fraction, en lui donnant l'unité pour

dénominateur : par exemple, si l'on a 12 à diviser par $\frac{5}{7}$, on réduira l'opération à diviser $\frac{12}{1}$ par $\frac{5}{7}$, ce qui, selon la règle qu'on vient de donner, se réduit à multiplier $\frac{12}{1}$ par $\frac{7}{5}$, et donne $\frac{84}{5}$ ou $16\frac{4}{5}$. Pareillement, si l'on avait $\frac{3}{4}$ à diviser par 5, on réduirait l'opération à diviser $\frac{3}{4}$ par $\frac{5}{1}$, c'est-à-dire, à multiplier $\frac{3}{4}$ par $\frac{1}{5}$, ce qui donne $\frac{3}{20}$.

On voit donc que lorsqu'on a une fraction à diviser par un entier, l'opération se réduit à multiplier le dénominateur par cet entier.

111. S'il y avait des entiers joints aux fractions, on réduirait ces entiers chacun en fraction de même espèce que celle qui l'accompagne. Par exemple, si l'on avait $54\frac{3}{5}$ à diviser par $12\frac{2}{3}$, on changerait le dividende en $\frac{273}{5}$ et le diviseur en $\frac{38}{3}$, et l'opération serait réduite à diviser $\frac{273}{5}$ par $\frac{38}{3}$, c'est-à-dire (109) à multiplier $\frac{273}{5}$ par $\frac{3}{38}$, ce qui donnerait $\frac{819}{190}$ ou $4\frac{59}{190}$.

## *Quelques applications des Règles précédentes.*

112. Après ce que nous avons dit (96), il est aisé de voir comment on peut évaluer une fraction. Qu'on demande, par exemple, ce que valent les $\frac{5}{7}$ d'une livre? Puisque les $\frac{5}{7}$ d'une livre sont la même chose (96) que le septième de 5 livres, je réduis les 5 livres en sous (57), et je divise les 100 sous qu'elles me donnent par 7, ce qui me donne 14 sous pour quotient; et 2 sous de reste; je réduis ces 2 sous en deniers, et je divise

24 deniers par 7 ; j'ai 3 deniers $\frac{3}{7}$. Ainsi les $\frac{5}{7}$ d'une livre sont 14 sous 3 deniers et $\frac{3}{7}$ de denier.

Si l'on demandait les $\frac{5}{7}$ de 24 livres, il est visible qu'on pourrait d'abord prendre, comme nous venons de le faire, les $\frac{5}{7}$ d'une livre, et multiplier ensuite par 24 ce qu'aurait donné cette opération ; mais il est plus commode de multiplier d'abord $\frac{5}{7}$ par 24 livres, ce qui (107) donne $\frac{120}{7}$ livres, et d'évaluer ensuite cette dernière fraction qu'on trouvera valoir 17 livres 2 sous 10 deniers $\frac{2}{7}$.

113. Les fractions décimales n'ayant point de dénominateur, sont encore plus faciles à évaluer. Si l'on demande, par exemple, combien valent 0,532 de toise : comme la toise est de 6 pieds, je multiplierai 0,532 par 6, ce qui me donnera 3,192 pieds; c'est-à-dire $3^{p}$ et 0,192 de pied ; multipliant cette dernière fraction par 12 pour évaluer en pouces, on aura 2,304 pouces, c'est-à-dire $2^{p}$ et 0,304 de pouce; enfin multipliant celle-ci par 12 pour réduire en lignes, on aura 3,648 ou $3^{l}$ et 0,648 de ligne, c'est-à-dire que la valeur de la fraction 0,532 de toise sera $3^{p}$ $2^{p}$ $3^{l}$ et 0,648 de ligne.

114. L'évaluation des fractions nous conduit naturellement à parler des *fractions de fractions*. On appelle ainsi une suite de fractions séparées les unes des autres par l'article *de*. Par exemple, $\frac{2}{3}$ *de* $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$ *de* $\frac{3}{4}$ *de* $\frac{5}{6}$, etc., sont des fractions de fractions. On les réduit à une seule fraction, en multipliant tous les numérateurs entre eux et tous les dénominateurs entre eux : en sorte que la fraction $\frac{2}{3}$ *de* $\frac{3}{4}$ se réduit à $\frac{6}{12}$ ou $\frac{1}{2}$ ; la fraction $\frac{2}{3}$ *de* $\frac{3}{4}$ *de* $\frac{5}{6}$ se réduit à $\frac{30}{72}$ ou $\frac{5}{12}$.

En effet, il est facile de voir que prendre les $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$ n'est autre chose que multiplier $\frac{3}{4}$ par $\frac{2}{3}$, puisque c'est prendre $\frac{2}{3}$ de fois la fraction $\frac{3}{4}$. Pareillement prendre les $\frac{2}{3}$ *des* $\frac{3}{4}$ *de* $\frac{5}{6}$, revient à prendre les $\frac{6}{12}$ *de* $\frac{5}{6}$, puisque $\frac{2}{3}$ *de* $\frac{3}{4}$ reviennent à $\frac{6}{12}$; et ce que l'on vient de dire fait connaître que les $\frac{6}{12}$ *de* $\frac{5}{6}$ reviennent à $\frac{30}{72}$ ou $\frac{5}{12}$.

Si l'on demandait les $\frac{3}{4}$ *de* $5\frac{3}{8}$, on convertirait l'entier 5 en huitièmes, et la question serait réduite à évaluer la fraction de fraction $\frac{3}{4}$ *de* $\frac{43}{8}$ qu'on trouverait être $\frac{129}{32}$ ou $4\frac{1}{32}$.

Ajoutons à tout ce que nous avons dit sur les fractions, un exemple qui renferme plusieurs des règles que nous avons établies.

Supposons qu'on veuille construire un vaisseau de 140 pieds $\frac{2}{3}$ de longueur, que les distances entre les sabords, en y comprenant l'espace entre le premier sabord et la rablure de l'étrave, et l'espace entre le dernier sabord et la rablure de l'étambot, fassent 108 $\frac{3}{4}$ pieds : on demande si l'on peut percer 12 sabords à la première batterie de chaque bord.

De 140 pieds $\frac{2}{3}$ je retranche $108\frac{3}{4}$ (103 *et suiv.*), il me reste $31\frac{11}{12}$ pour les sabords; je divise $31\frac{11}{12}$ par 12, c'est-à-dire $\frac{383}{12}$ par $\frac{12}{1}$ (86) et (110), j'ai pour quotient $\frac{383}{144}$ de pied, qui valent 2 pieds et $\frac{95}{144}$, fraction qui, évaluée en pouces et lignes, vaut 7 pouces 11 lignes; ainsi il faudrait donner à chaque

sabord 2 pieds 7 pouces 11 lignes, c'est-à-dire 2 pieds 8 pouces à peu près ; ce qui est une mesure convenable pour un vaisseau de 140 pieds $\frac{2}{3}$.

115. Lorsqu'une fraction, exprimée par des nombres un peu considérables, n'est pas réductible par la méthode donnée (95), et qu'on peut se contenter d'en avoir une valeur approchée, on peut y parvenir par la méthode suivante, qui donne alternativement des fractions plus grandes et plus petites que la proposée, mais toujours de plus en plus approchées, en sorte qu'à la dernière opération on retombe sur la fraction proposée. Prenons, par exemple, la fraction $\frac{100000}{31415}$, qui, comme on le verra en Géométrie, exprime le rapport très-approché du diamètre à la circonférence ; et proposons-nous d'exprimer cette fraction par d'autres fractions, moins exactes à la vérité, mais exprimées par des nombres plus simples.

Divisez le numérateur et le dénominateur par le numérateur ; vous aurez $\cfrac{1}{3\frac{14159}{100000}}$. Pour avoir une première valeur approchée, négligez la fraction qui accompagne 3, et vous aurez $\frac{1}{3}$ pour première valeur approchée, mais un peu trop forte.

Pour avoir une valeur plus approchée, divisez le numérateur et le dénominateur de la fraction qui accompagne 3, chacun par le numérateur de cette fraction, et vous aurez $\cfrac{1}{3\frac{1}{7\frac{887}{14159}}}$ ; négligez la fraction qui accompagne 7, et vous aurez $\cfrac{1}{3\frac{1}{7}}$, ou (86) $\frac{1}{\frac{22}{7}}$, ou (110) $\frac{7}{22}$ pour seconde valeur, qui est plus approchée que la première, mais un peu trop faible.

Pour avoir une valeur encore plus approchée, divisez le numérateur et le dénominateur de la fraction qui accompagne 7, chacun par le numérateur de cette fraction, vous aurez $\cfrac{1}{3\frac{1}{7\frac{1}{15\frac{854}{887}}}}$ ; supprimez la fraction qui accompagne 15 et vous aurez $\cfrac{1}{3\frac{1}{7\frac{1}{15}}}$ qui revient à $\frac{106}{333}$, valeur plus approchée, mais un peu trop forte.

Pour avoir une valeur encore plus rapprochée, divisez les deux termes de la fraction qui accompagne 15 chacun par le numérateur 854, et vous aurez

$$3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{33}{854}}}}$$

; négligeant la fraction $\frac{33}{854}$, vous aurez pour valeur plus approchée $\frac{113}{355}$, mais qui est un peu trop faible. On voit, à présent, comment on peut continuer.

## *Des Nombres complexes.*

116. Quoique les règles que nous avons exposées jusqu'ici puissent servir aussi à calculer les nombres complexes, nous croyons cependant devoir considérer ceux-ci d'une manière plus particulière, parce que la division qu'on y fait de l'unité principale en facilite souvent le calcul.

Il y a plusieurs sortes de nombres complexes, et les règles pour les calculer tiennent beaucoup à la division qu'on a faite de l'unité : cependant il n'est pas nécessaire d'examiner toutes ces espèces pour être en état de les calculer, mais il importe de savoir quels rapports leurs différentes parties ont tant entre elles, qu'à l'égard de l'unité principale ; c'est par cette raison que nous donnons ici une table des nombres complexes dont l'usage est le plus fréquent.

### *Table des unités de quelques espèces, et caractères par lesquels on représente ces différentes unités.*

POUR LES MONNAIES.

| | |
|---|---|
| ℔ signifie. . . . . livre. | 1 livre vaut. . . . . 20 sous. |
| ſ. . . . . sou. | 1 sou vaut. . . . . 12 den. |

POUR LES POIDS.

| | |
|---|---|
| lb signifie. . . . . livre. | 1 livre (poids) vaut. . . 2 marcs. |
| M. . . . . marc. | 1 marc. . . . . 8 onces |
| O. . . . . once. | 1 once. . . . . 8 gros |
| G. . . . . gros. | 1 gros. . . 3 deniers ou scrupules. |
| D. . . . . denier ou scrupule. | 1 denier. . . . . 24 grains |
| ℊ . . . . . grain. | |

POUR L'ÉTENDUE DES LIGNES.

| | | | |
|---|---|---|---|
| T signifie . . . . . | toise. | 1 toise vaut. . . . . | 6 pieds. |
| P . . . . . | pied. | 1 pied. . . . . | 12 pouces. |
| p. . . . . | pouce. | 1 pouce. . . . . | 12 lignes. |
| l. . . . . | ligne. | 1 ligne. . . . . | 12 points. |
| pt. . . . . | point. | | |

POUR LE TEMPS.

| | | | |
|---|---|---|---|
| J signifie. . . . . | jour. | 1 jour vaut. . . . | 24 heures. |
| H. . . . . | heure. | 1 heure. . . . . | 60 minutes |
| ′. . . . . | minute. | 1 minute. . . . . | 60 secondes |
| ″. . . . . | seconde. | 1 seconde. . . . . | 60 tierces. |

Nous donnerons en Géométrie les divisions des mesures relatives aux superficies et aux capacités des corps.

## *Addition des nombres complexes.*

117. Pour faire cette opération, on écrit tous les nombres proposés les uns au-dessous des autres, de manière que toutes les parties d'une même espèce se trouvent chacune dans une même colonne verticale; et après avoir souligné le tout, on commence l'addition par les parties de l'espèce la plus petite; si leur somme ne compose pas une unité de l'espèce immédiatement supérieure, on l'écrit sous les unités de son espèce; si elle renferme assez de parties pour composer une ou plusieurs unités de l'espèce immédiatement supérieure, on n'écrit au-dessous de cette colonne que l'excédant d'un nombre juste d'unités de cette seconde espèce, et l'on retient celles-ci pour les ajouter avec leurs semblables, sur lesquelles on procède de la même manière.

EXEMPLE.

| | | | |
|---|---|---|---|
| On propose d'ajouter. . . | $227^{\#}$ | $14^{s}$ | $8^{d}$ |
| | 2549 | 18 | 5 |
| | 184 | 11 | 11 |
| | 17 | 10 | 7 |
| | $2979^{\#}$ | $15^{s}$ | $7^{d}$ somme. |

La somme des deniers est 31, qui renferme deux douzaines de deniers, ou 2 sous et 7 deniers, je pose les 7 deniers, et se retiens 2 sous que j'ajoute avec les unités de sous, ce qui donne 15 sous, dont je pose seulement le chiffre 5, et je retiens la dixaine

pour l'ajouter aux dixaines, ce qui me donne 5 ; et comme il faut deux dixaines de sous pour faire une livre, je prends la moitié de 5 qui est 2, avec un pour reste ; je pose ce reste, et je porte les 2 livres à la colonne des livres que j'ajoute comme à l'ordinaire.

EXEMPLE II.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| On propose d'ajouter. . . | $54^{T}$ | $2^{P}$ | $3^{p}$ | $9^{l}$ |
| | 15 | 5 | 4 | 11 |
| | 9 | 4 | 11 | 11 |
| | 5 | 2 | 9 | 10 |
| | $85^{T}$ | $3^{P}$ | $6^{p}$ | $5^{l}$ |

La somme des lignes monte à 41, qui font 3 pouces 5 lignes ; je pose 5 lignes, et je retiens les 3 pouces que j'ajoute avec les pouces ; le tout me donne 30, qui valent 2 pieds 6 pouces ; je pose les 6 pouces, et je retiens les 2 pieds qui, ajoutés avec les pieds, me donnent 15 pieds qui valent $2^{T}\,3^{P}$ ; je pose les $3^{P}$, et j'ajoute les deux toises avec les toises : le tout monte à 85, en sorte que la somme est $85^{T}\,3^{P}\,6^{p}\,5^{l}$.

## *Soustraction des Nombres complexes.*

118. Écrivez les nombres proposés comme dans l'addition, et commencez la soustraction par les unités de l'espèce la plus basse. Si le nombre inférieur peut être retranché du nombre supérieur, écrivez le reste au-dessous. S'il ne peut être retranché, empruntez sur l'espèce immédiatement supérieure une unité que vous réduirez à l'espèce dont il s'agit, et que vous ajouterez au nombre dont vous ne pouvez retrancher. Faites la même chose pour chaque espèce, et lorsque vous aurez été obligé d'emprunter, diminuez d'une unité le nombre sur lequel vous avez fait cet emprunt. Enfin, écrivez chaque reste, à mesure que vous le trouverez, au-dessous du nombre qui l'a donné.

EXEMPLE I.

| | | | |
|---|---|---|---|
| De. . . . . | $143^{\#}$ | $17^{s}$ | $6^{\text{d}}$ |
| on veut ôter. . . . . | 75 | 12 | 9 |
| reste. . . . | $68^{\#}$ | $4^{s}$ | $9^{\text{d}}$ |

Ne pouvant ôter $9^{\text{d}}$ de $6^{\text{d}}$, j'emprunte $1^{s}$ qui vaut $12^{\text{d}}$, et

5.

6 font 18, desquels ôtant 9, il reste 9; j'ôte ensuite $12^{s}$, non pas de $17^{s}$, mais de 16 qui restent après l'emprunt; et il reste 5; enfin je retranche 75 liv. de 143 liv., et il me reste 68 liv.

EXEMPLE II.

| | | | |
|---|---|---|---|
| De. . . . . | $163^{\#}$ | $0^{s}$ | $5^{d}$ |
| on veut ôter. . . . . | 84 | 8 | 9 |
| reste. . . . . | $78^{\#}$ | $11^{s}$ | $8^{d}$ |

Comme je ne puis pas ôter $9^{d}$ de $5^{d}$, et que d'ailleurs il n'y a pas de sous sur lesquels je puisse emprunter, j'emprunte 1 liv. sur 163 liv.; mais j'en laisse, par la pensée, 19 sous à la place du zéro, après quoi j'opère comme ci-dessus.

## *Multiplication des Nombres complexes.*

119. On peut réduire généralement la multiplication des nombres complexes à la multiplication d'une fraction par une fraction, multiplication dont nous avons donné la règle (106). Par exemple, si l'on demande ce que doivent coûter $54^{T}\,3^{P}$ d'ouvrage, à raison de 42 liv. 17 sous 8 den. la toise; on peut réduire le multiplicande 42 liv. 17 sous 8 den. tout en deniers (57), ce qui donnera 10292 deniers, et comme le denier est la $240^{e}$. partie de la livre, le multiplicande peut être représenté par $\frac{10292}{240}$ de la livre; pareillement on réduira le multiplicateur $54^{T}\,3^{P}$ tout en pieds, ce qui donnera $327^{P}$, et comme le pied est la sixième partie de la toise, on aura pour multiplicateur $\frac{327}{6}$ de toise; en sorte que la question est réduite à multiplier $\frac{10292}{240}$ par $\frac{327}{6}$, ce qui (106) donnera $\frac{3365484}{1440}$ de livre, qui (112) valent 2337 liv. 2 sous 10 den.

Cette méthode s'étend à toute espèce de nombres complexes, mais elle exige plus de calculs que celle que nous allons exposer, c'est pourquoi nous ne nous y arrêterons pas davantage.

120. Un nombre qui est contenu exactement dans un autre est dit partie *aliquote* de cet autre : ainsi 3 est partie aliquote de 12; il en est de même de 2, de 4 et 6

Rappelons-nous que multiplier n'est autre chose que prendre le multiplicande un certain nombre de fois ; multiplier par $8\frac{3}{4}$, par exemple, c'est prendre le multiplicande 8 fois, et le prendre encore $\frac{3}{4}$ de fois, ou en prendre les $\frac{3}{4}$. Or on peut prendre ces $\frac{3}{4}$ ou en prenant d'abord le quart et l'écrivant 3 fois, ou bien en prenant d'abord la moitié et ensuite la moitié de cette moitié : ainsi, pour multiplier 84 par $8\frac{3}{4}$,

j'écrirais. . . . . 84

$8\frac{3}{4}$

672

42

21

735 produit.

En multipliant 84 par 8, j'aurais d'abord 672. Ensuite pour prendre les $\frac{3}{4}$ de 84, je prendrais d'abord la moitié qui est 42 ; puis je prendrais la moitié de 42 qui est 21, et réunissant ces trois produits particuliers, j'aurais 735 pour le produit total.

121. Pour appliquer ceci aux nombres complexes, il faut remarquer que les différentes espèces d'unités au-dessous de l'unité principale, sont des fractions les unes à l'égard des autres, et à l'égard de cette unité principale ; que par conséquent, pour multiplier facilement par ces sortes de nombres, il faut faire en sorte de les décomposer en parties aliquotes de l'unité principale, de manière que ces parties aliquotes puissent être employées commodément, ou de les décomposer en parties aliquotes les unes des autres ; et si cette décomposition ne fournit que des parties aliquotes qui ne soient pas commodes dans le calcul, on y suppléera par de faux produits ; c'est ce que nous allons développer dans les exemples suivans

EXEMPLE I.

On demande combien doivent coûter $54^{T}\ 3^{P}$, à raison de 72 liv. la toise.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Il faut multiplier. . | $72^{\#}$ | | |
| par. . . . . | $54^{T}$ | $3^{P}$ | |
| | $288^{\#}$ | $0^{s}$ | $0^{d}$ |
| | 3600 | | |
| | 36 | | |
| | $3924^{\#}$ | $0^{s}$ | $0^{d}$ |

On multipliera d'abord, selon les règles ordinaires, 72 liv. par 54. Ensuite pour multiplier par $3^{P}$, qui sont la moitié de la toise, et qui par conséquent ne doivent donner que la moitié du prix de la toise, on prendra la moitié de 72 liv., et additionnant, on aura 3924 liv. pour produit total.

EXEMPLE II.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Si l'on avait. . . . . | $72^{\#}$ | | |
| à multiplier par. . . | $54^{T}$ | $5^{P}$ | |
| | $288^{\#}$ | $0^{s}$ | $0^{d}$ |
| | 3600 | | |
| | 36 | | |
| | 24 | | |
| | $3948^{\#}$ | $0^{s}$ | $0^{d}$ |

On multipliera d'abord 72 liv. par 54. Ensuite au lieu de multiplier par $\frac{5}{6}$, parce que 5 pieds font les $\frac{5}{6}$ de la toise, on décomposera $5^{P}$, en $3^{P}$ et $2^{P}$, dont le premier est la moitié, et le second le $\frac{1}{3}$ de la toise, on prendra donc d'abord la moitié de 72 liv., et ensuite le $\frac{1}{3}$ de 72 liv., et l'on aura, en réunissant tous ces produits particuliers, 3948 liv. pour produit total.

EXEMPLE III.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Que l'on ait. . . . . | $72^{\#}$ | | |
| à multiplier par. . . . | $5^{T}$ | $4^{P}$ | $8^{P}$ |
| | $360^{\#}$ | $0^{s}$ | $0^{d}$ |
| | 36 | | |
| | 12 | | |
| | 4 | | |
| | 4 | | |
| | $416^{\#}$ | $0^{s}$ | $0^{d}$ |

Après avoir multiplié par $5^{T}$, on multipliera par $4^{P}$, et pour cet effet, on décomposera ce nombre en $3^{P}$ et $1^{P}$; pour $3^{P}$ on prendra la moitié de 72 livres, qui est 36 liv.; et pour 1 pied, on remarquera que c'est le $\frac{1}{3}$ de 3 pieds; et par conséquent on prendra le $\frac{1}{3}$ de 36 liv., qui est de 12 liv. Ensuite, pour multiplier par 8 pouces, au lieu de comparer ces 8 pouces à la toise, on les comparera au pied, et on les décomposera en 4 pouces et 4 pouces qui sont chacun le $\frac{1}{3}$ du pied, et qui par conséquent donneront chacun le $\frac{1}{3}$ de 12 liv. Enfin réunissant, on aura 416 liv. 0 sou 0 den. pour produit.

122. Si le multiplicande est aussi un nombre complexe, on se conduira comme il va être expliqué dans l'exemple suivant.

EXEMPLE IV.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Si l'on a. . . . . | $72^{\#}$ | $6^{s}$ | $6^{d}$ | |
| à multiplier par. . . . | $27^{T}$ | $4^{P}$ | $8^{P}$ | |
| | $504^{\#}$ | $0^{s}$ | $0^{d}$ | |
| | 1440 | | | |
| | 6 | 15 | 0 | |
| | 1 | 7 | 0 | |
| | 0 | 13 | 6 | |
| | 36 | 3 | 3 | |
| | 12 | 1 | 1 | |
| | 4 | 0 | 4 | $\frac{1}{3}$ |
| | 4 | 0 | 4 | $\frac{1}{3}$ |
| | $2009^{\#}$ | $0^{s}$ | $6^{d}$ | $\frac{1}{3}$ |

On multipliera d'abord 72 liv. par 27. Ensuite pour multiplier 6 sous par 27, on décomposera ces 6 sous en 5 sous et 1 sou. Les 5 sous faisant le quart de la livre, doivent, étant multipliés par 27, donner 27 fois le quart de la livre ou le quart de 27 liv.; on prendra donc le quart de 27 liv. qui est 6 liv. 15 sous. Pour multiplier 1 sou par 27, on remarquera qu'un sou est la cinquième partie de 5 qu'on vient de multiplier; ainsi on prendra le cinquième des 5 liv. 15 sous, qui sera 1 liv. 7 sous.

A l'égard des 6 deniers, on fera attention qu'ils sont la moitié d'un sou, et par conséquent on prendra la moitié de 1 liv. 7 sous qu'on a eue pour un sou.

Jusque-là tout le multiplicande est multiplié par 27.

Pour multiplier par 4 pieds, on s'y prendra de la même manière que dans l'exemple précédent, c'est-à-dire que pour les $4^{p}$ on prendra d'abord pour $3^{p}$ la moitié de 36 liv. 3 sous 3 den. de multiplicande, et pour $1^{p}$ le tiers de ce que donnent les $3^{p}$.

Enfin, pour $8^{p}$ on prendra 2 fois pour 4, c'est-à-dire qu'on écrira 2 fois le tiers de ce qu'on vient d'avoir pour $1^{p}$; en réunissant toutes ces différentes parties, on aura 2009 liv. 0 sou 6 d. $\frac{2}{3}$ pour produit total.

123. Jusqu'ici les parties du multiplicande qu'il a fallu prendre ont été assez faciles à évaluer; mais, dans le cas où ces parties seraient plus composées, on se conduirait comme dans l'exemple suivant.

EXEMPLE V.

| | | | |
|---|---|---|---|
| A raison de. . . . . | $34^{\#}$ | $10^{s}$ | $2^{d}$ la toise |
| combien doivent coûter | $17^{T}$ | | |
| | $238^{\#}$ | $0^{s}$ | $0^{d}$ |
| | 340 | | |
| | 8 | 10 | |
| | ø | xx7 | |
| | 0 | 2 | 10 |
| | $586^{\#}$ | $12^{s}$ | $10^{d}$ |

Apres avoir multiplié 34 liv. par 17, et ensuite les 10 sous par 17 en prenant la moitié de 17, on multipliera 2 deniers qui sont la sixième partie d'un sou, et par conséquent la sixième partie de la dixième partie ou (114) la 60e partie de dix sous; mais au lieu de prendre la 60e partie de 8 liv. 10 sous, il sera plus commode de faire un faux produit, et de prendre d'abord le dixième de ce qu'ont donné 10 sous, c'est-à-dire le dixième de 8 liv. 10 sous; ce dixième, qui est 0 liv. 17 sous, est pour 1 sou; mais comme il ne faut que pour le sixième d'un sou, on barrera ce faux produit, et on écrira le sixième au-dessous.

EXEMPLE VI.

Combien pour 34 liv. 10 sous 2 den. fera-t-on faire d'ouvrage à raison de 1 liv. pour 17 toises?

Il faut multiplier 17 toises par 34 liv. 10 sous 2 den., c'est-à-dire prendre 17 toises autant de fois que la livre est contenue dans 34 liv. 10 sous 2 den.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $17^{T}$ | | | | | |
| $34^{\#}$ | $10^{s}$ | $2^{d}$ | | | |
| $68^{T}$ | $0^{P}$ | $0^{p}$ | $0^{l}$ | $0^{pts}$ | |
| 510 | | | | | |
| 8 | 3 | | | | |
| $\cancel{0}$ | $\cancel{8}$ | $\cancel{1}$ | $\cancel{2}$ | $\cancel{4}$ | $\frac{\cancel{4}}{\cancel{8}}$ |
| 0 | 0 | 10 | 2 | 4 | $\frac{4}{5}$ |
| $586^{T}$ | $3^{P}$ | $10^{p}$ | $2^{l}$ | $4^{pts}$ | $\frac{4}{5}$ |

Ainsi on multipliera d'abord 17 toises par 34; ensuite, pour multiplier 17 toises par 10 sous, on prendra la moitié de 17 toises, parce que 10 sont la moitié de la livre, et l'on aura 8 toises 3 pieds. Pour multiplier par 2 deniers, on cherchera, pour plus de facilité, ce que donnerait 1 sou, en prenant le dixième de ce qu'ont donné 10 sous; ce dixième est 0 toise

5 pieds 1 pouce 2 lignes 4 points et $\frac{8}{10}$ ou $\frac{4}{5}$ de point; on le barrera, comme ne devant pas faire partie du produit, mais on en prendra le sixième pour avoir le produit de 2 deniers, et on écrira au-dessous ce sixième, qui est 0 toise, 0 pied 10 pouces 2 lignes 4 points et $\frac{24}{30}$ ou $\frac{4}{5}$.

Nous avons donné cet exemple, principalement pour confirmer ce que nous avons dit (45), qu'il importait de distinguer le multiplicande du multiplicateur, lorsqu'ils sont tous les deux concrets. En effet, dans l'exemple précédent, ainsi que dans celui-ci, les facteurs du produit sont également 17 toises et 34 livres 10 sous 2 deniers; cependant les deux produits sont différens.

## *Division d'un Nombre complexe par un Nombre incomplexe.*

124. Si le dividende seul est complexe, et si en même temps le dividende et le diviseur ont les unités de différente espèce, on divisera d'abord les unités principales du dividende, selon la règle ordinaire; ce qui restera de cette division, on le réduira (57) en unités de la seconde espèce, qu'on ajoutera avec celles de même espèce qui se trouveront dans le dividende, et on divisera le tout comme à l'ordinaire: on réduira pareillement le reste de cette division en unités de la troisième espèce, auxquelles on ajoutera celles de la même espèce qui se trouveront dans le dividende, et on divisera le tout comme ci-dessus; on continuera de réduire les restes en unités de l'espèce suivante, tant qu'il s'en trouvera d'inférieures dans le dividende.

EXEMPLE.

On a donné 4783 livres 3 sous 9 deniers pour paiement de 87 toises d'ouvrage; on demande à combien revient la toise?

| | |
|---|---|
| 4783# 3ˢ 9ᵈ | 87 |
| 433 | 54# 19ˢ 7ᵈ |
| 85 | |
| 1703 | |
| 833 | |
| 50 | |
| 609ᵈ | |
| 000 | |

Il faut diviser 4783 livres 3 sous 9 deniers par 87, en commençant par les livres.

Les 4783 livres divisées par 87, selon la règle ordinaire, donneront 54 livres pour quotient, et 85 livres pour reste : ces 85 livres réduites en sous (57), donneront avec les 3 sous du dividende 1703 sous, qui, divisés par 87, donneront 19 sous pour quotient, et 50 sous pour reste : ces 50 sous réduits en deniers donnent, avec les 9 deniers du dividende, 609 deniers, lesquels divisés par 87, donnent enfin 7 deniers pour quotient.

125. Mais si le dividende et le diviseur ont des unités de même espèce, il faut, avant de faire la division, examiner si le quotient doit être ou ne pas être de même espèce qu'eux, ce que l'état de la question décide toujours.

126. Dans le cas où le dividende et le diviseur étant de même espèce, le quotient devra aussi être de même espèce qu'eux, la division se fera précisément comme dans le cas précédent ; par exemple, si l'on proposait cette question : 1243 liv. ont produit un bénéfice de 7254 livres, à combien cela revient-il par livre ? Il est évident que le quotient doit avoir des unités de même espèce que le dividende et le diviseur, c'est-à-dire, doit être des livres, et qu'on doit diviser 7254 livres par 1243, en réduisant, comme dans l'exemple précédent, le reste de cette division en sous, et le second reste en deniers, et on trouvera 5 livres 16 sous 8 deniers $\frac{760}{1243}$ pour réponse à la question.

127. Mais lorsque le dividende et le diviseur étant de même

espèce, le quotient devra être d'espèce différente, alors il faudra commencer par réduire (57) le dividende et le diviseur chacun à la plus petite espèce qui soit dans le dividende; après quoi on fera la division comme dans le cas précédent, et on y traitera les unités du dividende, comme si elles étaient de même espèce que celles que doit avoir le quotient; par exemple, si l'on proposait cette question: combien pour 7954 livres 11 sous 8 deniers fera-t-on faire d'ouvrage, à raison de 72 livres la toise? Il est clair, par la nature de la question, que le quotient doit être des toises et parties de toise. On réduira donc 7954 livres 11 sous 8 deniers tout en deniers, ce qui donnera 1909100; on réduira pareillement 72 livres en deniers, et on aura 17280; on divisera 1909100 considérés comme des toises, par 17280, et on aura pour quotient 110 toises 2 pieds 10 pouces 7 lignes $\frac{19}{20}$.

## *Division d'un Nombre complexe par un Nombre complexe.*

128. Lorsque le diviseur est aussi un nombre complexe, il faut le réduire à sa plus petite espèce (57), multiplier le dividende par le nombre qui exprime combien il faut de parties de la plus petite espèce du diviseur pour composer l'unité principale de ce même diviseur; alors la division sera réduite au cas précédent où le diviseur était incomplexe.

EXEMPLE.

57 toises 5 pieds 5 pouces d'ouvrage ont été payés 854 livres 17 sous 11 deniers; on demande à combien cela revient la toise? Il faut diviser 854 livres 17 sous 11 deniers par 57 toises 5 pieds 5 pouces, et pour cet effet je réduis en pouces, les 57 toises 5 pieds 5 pouces, ce qui me donne 4169 pour nouveau diviseur; et comme il faut 72 pouces pour faire la toise, qui est l'unité principale du diviseur, je multiplie le dividende proposé 854 livres 17 sous 11 deniers par 72 (121) ce qui me donne

61552 livres 10 sous pour nouveau dividende, en sorte que je divise comme il suit :

$$\begin{array}{r|l}
61552^{\#}\ 10^{s} & 4169 \\ \cline{2-2}
19862 & \\
3186 & 14^{\#}\ 15^{s}\ 3^{d}\ \dfrac{1833}{4169} \\ \cline{1-1}
63730^{s} & \\
22040 & \\
1195 & \\ \cline{1-1}
14340^{d} & \\
1833 &
\end{array}$$

Les 61552 livres divisées par 4169 donnent 14 livres pour quotient, et 3186 pour reste. Ces 3186 livres réduites en sous donnent, avec les 10 sous du dividende, 63730 sous qui, divisés par 4169, donnent 15 sous pour quotient, et 1195 sous de reste. Ces 1195 sous réduits en deniers valent 14340 deniers, lesquels, divisés par 4169, donnent 3 deniers pour quotient, et 1833 deniers pour reste : en sorte que le quotient est 14 livres 15 sous 3 deniers $\frac{1833}{4169}$ de denier.

Pour entendre la raison de cette règle, il faut faire attention que les 57 toises 5 pieds 5 pouces valent 4169 pouces, et le pouce étant la soixante-douzième partie de la toise, le diviseur est $\frac{4169}{72}$ de la toise ; or, pour diviser par une fraction, il faut (109) renverser la fraction diviseur, et multiplier ensuite par cette fraction ainsi renversée ; il faut donc ici multiplier par $\frac{72}{4169}$ ; ce qui revient à multiplier d'abord par 72, et à diviser ensuite par 4169, ainsi que le prescrit la règle que nous donnons.

Comme la division par un nombre complexe se réduit, ainsi qu'on vient de le voir, à la division par un nombre incomplexe, on doit avoir les mêmes attentions à l'égard de la nature des unités que nous avons eues (126) et (127).

Ce serait ici le lieu de parler du toisé ou de la multiplication et de la division géométriques : ces opérations ne diffèrent en rien, pour le procédé, de celles que nous venons d'exposer ;

en sorte qu'il n'y aurait ici d'autre chose à ajouter, que d'expliquer quelle est la nature des unités, des facteurs et du produit; mais cela appartient à la Géométrie. Nous remettrons donc à en parler jusqu'à ce que nous soyons arrivés à la Géométrie.

## *De la formation des nombres carrés et de l'extraction de leurs racines.*

129. On appelle *carré* d'un nombre, le produit qui résulte de la multiplication de ce nombre par lui-même; ainsi 25 est le carré de 5, parce que 25 résulte de la multiplication de 5 par 5.

130. La *racine carrée* d'un nombre proposé, est le nombre qui, multiplié par lui-même, reproduirait ce même nombre proposé : ainsi 5 est la racine carrée de 25; 7 est la racine carré de 49.

131. Un nombre que l'on carre est donc tout à la fois multiplicande et multiplicateur; il est donc deux fois facteur (42) du produit; c'est pour cela qu'on appelle aussi ce produit ou carré la *seconde puissance* de ce nombre.

Il ne faut d'autre art pour carrer un nombre, que de le multiplier par lui-même selon les règles ordinaires de la multiplication; mais pour extraire la racine carrée d'un nombre, c'est-à-dire pour revenir du carré à la racine, il faut une méthode, du moins lorsque le nombre ou carré proposé a plus de deux chiffres.

Lorsque le nombre proposé n'a qu'un ou deux chiffres, sa racine, en nombre entier, est quelqu'un des nombres. . . . .

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,

dont les carrés sont

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81.

Ainsi la racine carrée de 72, par exemple, est 8 en nombre entier, parce que 72 étant entre 64 et 81, sa racine est entre les racines de ceux-ci, c'est-à-dire entre 8 et 9, et elle est 8 et une fraction; fraction qu'à la vérité on ne peut pas assigner

exactement, mais dont on peut approcher continuellement, ainsi que nous le verrons dans peu.

132. La racine carrée d'un nombre qui n'est point un carré parfait, s'appelle un nombre *sourd* ou *irrationnel* ou *incommensurable*.

133. Venons aux nombres qui ont plus de deux chiffres.

C'est en observant ce qui se passe dans la formation du carré, que nous trouverons la méthode qu'on doit suivre pour revenir à la racine.

Pour carrer un nombre tel que 54, par exemple:

$$\begin{array}{r} 54 \\ 54 \\ \hline 216 \\ 270 \\ \hline 2916 \end{array}$$

Après avoir écrit le multiplicande et le multiplicateur, comme on le voit ici, nous multiplions, comme à l'ordinaire, le 4 supérieur par le 4 inférieur, ce qui fait évidemment le *carré des unités*.

Nous multiplions ensuite le 5 supérieur par le 4 inférieur, ce qui fait le *produit des dixaines par les unités*.

Nous passons après cela, au second chiffre du multiplicateur, et nous multiplions le 4 supérieur par le 5 inférieur, ce qui fait le produit des unités par les dixaines, ou (44) *le produit des dixaines par les unités*.

Enfin nous multiplions le 5 supérieur par le 5 inférieur, ce qui fait *le carré des dixaines*.

Nous ajoutons ces produits, et nous avons pour carré le nombre 2916, que nous voyons donc être composé *du carré des dixaines, plus deux fois le produit des dixaines par les unités, plus le carré des unités* du nombre 54.

134. Ce que nous venons d'observer étant une conséquence immédiate des règles de la multiplication, n'est pas plus particulier au nombre 54 qu'à tout autre nombre composé de dixaines et d'unités; en sorte qu'on peut dire généralement que

le carré de tout nombre composé de dixaines ou d'unités, renfermera les trois parties que nous venons d'énoncer; savoir, le carré des dixaines de ce nombre, deux fois le produit des dixaines par les unités, et le carré des unités.

135. Cela posé, comme le carré des dixaines est des centaines (puisque 10 fois 10 font 100), il est visible que ce carré des dixaines ne peut faire partie des deux derniers chiffres du carré total.

Pareillement le produit du double des dixaines multipliées par les unités, étant nécessairement des dixaines, ne peut faire partie du dernier chiffre du carré total.

136. Donc pour revenir du carré 2916 à sa racine, on peut raisonner ainsi :

EXEMPLE I.

$$\begin{array}{r|l} 2916 & 54 \text{ racine.} \\ 416 & \\ 104 & \\ \hline 000 & \end{array}$$

Commençons par trouver les dixaines de cette racine : or, la formation du carré nous apprend qu'il y a dans 2916 le carré de ces dixaines, et que ce carré ne peut faire partie de ses deux derniers chiffres ; il est donc dans 29 ; et comme la racine carrée de 29 ne peut être plus de 5, concluons-en que le nombre des dixaines de la racine est 5, et portons-le à *côté de 2916, comme* on le voit ci-dessus.

Je carre 5, et je retranche le produit 25 de 29 ; il me reste 4, à côté duquel j'abaisse les deux autres chiffres 16 du nombre proposé 2916.

Pour trouver maintenant les unités de la racine, je fais attention à ce que renferme le reste 416 ; il ne contient plus que deux parties du carré, savoir : le double des dixaines de la racine, multipliées par les unités, et le carré des unités de cette même racine. De ces deux parties, la première suffit pour nous faire trouver les unités que nous cherchons, car puisqu'elle est formée du double des dixaines multipliées par les unités, si on

la divise par le double des dixaines que nous connaissons elle doit (74) donner pour quotient les unités : il ne s'agit donc plus que de savoir dans quelle partie de 416 est renfermé ce double des dixaines multipliées par les unités ; or, nous avons remarqué ci-dessus qu'il ne pouvait faire partie du dernier chiffre ; il est donc dans 41 ; il faut donc diviser 41 par le double 10 des dixaines trouvées ; j'écris donc sous 41 le double 10 des dixaines, et faisant la division, le quotient 4 que je trouve est le nombre des unités que je porte à la droite des 5 dixaines trouvées, en sorte que la racine chèrchée est 54.

Mais il faut observer que quoique le quotient 4 que nous venons de trouver soit en effet celui qui convient, cependant il peut arriver quelquefois que le quotient trouvé de cette manière soit plus fort qu'il ne convient : parce que 41 (c'est-à-dire la partie qui reste après la séparation du dernier chiffre) renferme non-seulement le double des dixaines multipliées par les unités, mais encore les dixaines provenant du carré des unités ; c'est pourquoi, pour n'avoir aucun doute sur le chiffre des unités, il faut employer la vérification suivante.

Après avoir trouvé le chiffre 4 des unités, et l'avoir écrit à la racine, je le porte à côte du double 10 des dixaines ; ce qui fait 104, dont je multiplie successivement tous les chiffres par le même nombre 4, et je retranche les produits successifs des parties correspondantes de 416 ; comme il ne reste rien, j'en conclus que la racine est en effet 54.

S'il restait quelque chose, la racine n'en serait pas moins la vraie racine en nombre entier, à moins que ce reste ne fût plus grand que le double de la racine, augmenté de l'unité ; mais c'est ce qu'on n'a point à craindre, quand on prend le quotient toujours au plus fort.

La vérification que nous venons d'enseigner est fondée sur la formation même du carré ; car, quand on multiplie 104 par 4, il est évident qu'on forme le carré des unités, et le double des dixaines multiplié par les unités, c'est-à-dire ce qui complète le carré parfait.

137. De ce que nous venons de dire, il faut conclure que

pour extraire la racine carrée d'un nombre qui n'a pas plus de quatre chiffres, ni moins de trois, il faut, après en avoir séparé deux sur la droite, chercher la racine carrée de la tranche qui reste à gauche; cette racine sera le nombre des dixaines de la racine totale cherchée, et on l'écrira à côté du nombre proposé, en l'en séparant par un trait.

On soustraira de cette même tranche le carré de la racine qu'on vient de trouver; et après avoir écrit le reste au-dessous de cette tranche, on abaissera à côté de ce reste les deux chiffres qu'on avait séparés.

On séparera par un point le chiffre des unités de la tranche qu'on vient d'abaisser, et l'on divisera ce qui se trouve sur la gauche par le double des dixaines qu'on écrira au-dessous.

On écrira le quotient à côté du premier chiffre de la racine, et on le portera ensuite à côté du double des dixaines qui a servi de diviseur.

Enfin on multipliera par ce même quotient tous les chiffres qui se trouvent sur cette dernière ligne, et on retranchera leurs produits, à mesure qu'on les trouvera, des chiffres qui leur correspondent dans la ligne au-dessus.

Achevons d'éclaircir ceci par un exemple.

EXEMPLE II.

On demande la racine carrée de 7569.

7 5.6 9 | 87 racine.
1 1 6.9
1 6 7
.0 0 0

Je sépare les deux chiffres 69, et je cherche la racine carrée de 75; elle est 8; j'écris 8 à côté, je carre 8 et je retranche de 75 le carré 64; il me reste 11 que j'écris au-dessous de 75, et j'abaisse à côté de ce même 11, les chiffres 69 que j'avais séparés.

Je sépare dans 1169, le dernier chiffre 9, pour avoir dans 116 la partie que je dois diviser pour trouver les unités.

Je forme mon diviseur, en doublant les 8 dixaines que j'ai trouvées, et j'écris ce diviseur au-dessous de 116, la division me donne pour quotient 7 que j'écris à la racine, à la droite de 8.

Je porte aussi ce quotient à côté du diviseur 16; je multiplie 167, qui forme la dernière ligne, par ce même quotient 7, et je retranche les produits à mesure que je les trouve : de 1169, il ne reste rien, ce qui prouve que 7569 est un carré parfait et le carré de 87.

138. Il faut bien remarquer qu'on ne doit diviser par le double des dixaines que la seule partie qui reste à gauche, après qu'on a séparé le dernier chiffre; en sorte que si elle ne contenait pas le double des dixaines, il ne faudrait pas pour cela employer le chiffre séparé; on mettrait 0 à la racine. Si au contraire on trouvait que le double des dixaines y est plus de 9 fois, on ne mettrait cependant pas plus de 9; la raison en est la même que pour la division (66).

139. Après avoir bien compris ce que nous venons de dire sur la racine carrée des nombres qui n'ont pas plus de 4 chiffres, on saisira facilement ce qu'il convient de faire lorsque le nombre des chiffres est plus grand. De quelque nombre de chiffres que la racine doive être composée, on peut toujours la concevoir composée de deux parties dont l'une soit des dixaines et l'autre des unités; par exemple, 874 peut être considéré comme représentant 87 dixaines et 4 unités.

Cela posé, quand on a trouvé les deux premiers chiffres de la racine, par la méthode qu'on vient d'exposer, on peut aussi trouver le troisième par la même méthode, en considérant ces deux premiers chiffres comme ne faisant qu'un seul nombre de dixaines, et leur appliquant, pour trouver le troisième, tout ce qui a été dit du premier pour trouver le second.

Pareillement, quand on aura trouvé les trois premiers chiffres, s'il doit y en avoir un quatrième, on considérera les trois premiers comme ne faisant qu'un seul nombre de dixaines, auquel on appliquera, pour trouver le quatrième, le même raisonnement qu'on appliquait aux deux premiers pour trouver le troisième, et ainsi de suite

Mais pour procéder avec ordre, il faut commencer par partager le nombre proposé en tranches de deux chiffres chacune, en allant de droite à gauche : la dernière pourra n'en contenir qu'un.

La raison de cette préparation est fondée sur ce que, considérant la racine comme composée de dixaines et d'unités, il faut, suivant ce qui a été dit ci-dessus (135 *et suiv.*), commencer par séparer les deux derniers chiffres sur la droite, pour avoir, dans la partie qui reste à gauche, le carré des dixaines; mais comme cette partie est elle-même composée de plus de deux chiffres, un raisonnement semblable conduit à en séparer encore deux sur la droite, et ainsi de suite.

Donnons un exemple de cette opération.

EXEMPLE III.

On demande la racine carrée de 76807696.

```
7 6.8 0.7 6.9 6 | 8764
1 2 8.0
  1 6 7
-------------
  1 1 1 7.6
    1 7 4 6
-------------
      7 0 0 9.6
      1 7 5 2 4
-------------
      0 0 0 0 0
```

Après avoir partagé le nombre proposé en tranches de deux chiffres chacune, en allant de droite à gauche, je cherche quelle est la racine carrée de la tranche 76 qui est le plus à gauche, je trouve qu'elle est 8, et j'écris 8 à côté du nombre proposé; je carre 8, et je retranche le carré 64 de 76; j'ai pour reste 12 que j'écris au-dessous de 76; à côté de ce reste j'abaisse la tranche 80 dont je sépare le dernier chiffre par un point; et au-dessous de la partie 128, j'écris 16, double de la racine trouvée; puis disant, en 128 combien de fois 16, je trouve qu'il y est 7 fois; j'écris 7 à la suite de la racine 8, et à côté du double 16; je multiplie 167 par ce même nombre 7, et je

retranche de 1280 le produit de cette multiplication ; il me reste 111, à côté duquel j'abaisse la tranche 76, ce qui forme 11176 ; je sépare le dernier chiffre 6 de ce nombre, et sous la partie 1117 qui reste à gauche, j'écris 174, double de la racine 87 ; je divise 1117 par 174, et ayant trouvé 6 pour quotient, j'écris 6 à la racine et à côté du double 174 ; je multiplie 1746 par ce même nombre 6, et je retranche 10476 de 11176, il reste 700 ; à côté de ce reste j'abaisse 96 dont je sépare le dernier chiffre ; au-dessous de 7009, qui reste à gauche, j'écris 1752, double de la racine trouvée 876 ; et divisant 7009 par 1752, je trouve pour quotient 4 que j'écris à la racine et à côté du double 1752. Je multiplie 17524 par ce même nombre 4, et je retranche de 70096 le produit de cette multiplication ; il ne reste rien ; ainsi la racine carrée de 76807696 est exactement 8764.

140. Lorsque le nombre proposé n'est point un carré parfait, il y a un reste à la fin de l'opération, et la racine carrée qu'on a trouvée est la racine carrée du plus grand carré contenu dans le nombre proposé : alors il n'est pas possible d'extraire la racine carrée exactement ; mais on peut en approcher si près qu'on le juge à propos, c'est-à-dire de manière que l'erreur qui en résulterait dans le carré, soit au-dessous de telle quantité qu'on voudra.

*Cette approximation se fait* commodément par le moyen des décimales. Il faut concevoir à la suite du nombre proposé deux fois autant de zéro qu'on voudra avoir de décimales à la racine, faire l'opération comme à l'ordinaire, et séparer ensuite par une virgule, sur la droite de la racine, moitié autant de décimales qu'on a mis de zéro à la suite du nombre proposé. En effet (54), le produit de la multiplication devant avoir autant de décimales qu'il y en a dans les deux facteurs ensemble, le carré (dont les deux facteurs sont égaux) doit donc en avoir le double de ce qu'a l'un des facteurs ; c'est-à-dire le double de ce que doit avoir la racine.

EXEMPLE IV.

On demande la racine carrée de 87567 à moins d'un millième près.

Pour faire des millièmes, il faut trois décimales; on doit donc mettre 6 zéro au carré 87567; ainsi il faut tirer la racine carrée de 87567000000.

```
8.7 5.6 7.0 0.0 0.0 0.0 0 | 295917
4 7.5
  4 9
-------
  3 4 6.7
    5 8 5
-------
    5 4 2 0.0
      5 9 0 9
-------
      1 0 1 9 0.0
        5 9 1 8 1
-------
        4 2 7 1 9 0.0
          5 9 1 8 2 7
-------
          1 2 9 1 1 1
```

En faisant l'opération comme dans les exemples précédens, on trouve pour racine carrée, à moins d'une unité près, le nombre 295917; cette racine est celle de 87567000000; mais comme il s'agit de celle de 87567 ou de 87567,000000, je sépare moitié autant de décimales dans la racine, que j'ai mis de zéro au carré; ce qui me donne 295,917 pour la racine carrée de 87567, à moins d'un millième près.

Pareillement, si l'on demande la racine carrée de 2 à moins d'un dix-millième près, on tirera la racine carrée de 200000000 qu'on trouvera être 14142; séparant les quatre chiffres de la droite par une virgule, on aura 1,4142 pour la racine carrée de 2, approchée à moins d'un dix-millième près.

141. On a vu (106) que pour multiplier une fraction par une fraction, il fallait multiplier numérateur par numérateur, et dénominateur par dénominateur; par conséquent pour carrer une fraction, il faut carrer le numérateur et le dénominateur; ainsi le carré de $\frac{2}{3}$ est $\frac{4}{9}$, celui de $\frac{4}{5}$ est $\frac{16}{25}$.

142. Donc réciproquement, pour tirer la racine carrée d'une fraction, il faut tirer la racine carrée du numérateur et celle du dénominateur; ainsi, la racine carrée de $\frac{9}{16}$ est $\frac{3}{4}$, parce que celle de 9 est 3, et celle de 16 est 4.

143. Mais il peut arriver que le numérateur ou le dénominateur, ou tous les deux, ne soient point des carrés parfaits: s'il n'y a que le numérateur qui ne soit point un carré, on en tirera la racine approchée par la méthode qu'on vient d'exposer, et ayant tiré la racine du dénominateur, on la donnera pour dénominateur à la racine du numérateur; ainsi, si l'on demande la racine de $\frac{2}{9}$, on tirera la racine approchée du numérateur 2 qu'on trouvera 1,4 ou 1,41 ou 1,414 ou 1,4142, etc., selon qu'on voudra en approcher plus ou moins; et comme la racine carrée de 9 est 3, on aura pour racine approchée de $\frac{2}{9}$, la quantité $\frac{1,4}{3}$ ou $\frac{1,41}{3}$ ou $\frac{1,414}{3}$ ou $\frac{1,4142}{3}$, etc.

Mais si le dénominateur n'est pas un carré, on multipliera les deux termes de la fraction par ce même dénominateur, ce qui ne changera rien à la valeur de la fraction, et rendra le nouveau dénominateur un carré; alors on opérera comme dans le cas précédent. Par exemple, si l'on demande la racine carrée de $\frac{3}{5}$, on changera cette fraction en $\frac{15}{25}$; tirant la racine carrée de 15 jusqu'à 3 décimales, par exemple, on aura 3,872; et comme la racine carrée de 25 est 5, la racine carrée de $\frac{15}{25}$ sera $\frac{3,872}{5}$.

144. Pour ne pas avoir plusieurs sortes de fractions à la fois, on réduira le résultat $\frac{3,872}{5}$, uniquement en décimales, en divisant 3,872 par 5, ce qui donnera 0,774 pour la racine de $\frac{3}{5}$, exprimée purement en décimales (99).

145. Enfin, si l'on avait des entiers joints à des fractions, on réduirait ces entiers en fractions (86), et on opérerait comme il vient d'être dit pour une fraction. Ainsi, pour tirer la racine carrée de $8\frac{3}{7}$, on changerait $8\frac{3}{7}$ en $\frac{59}{7}$, et celle-ci (143) en $\frac{413}{49}$, dont on trouverait que la racine approchée est $\frac{20,322}{7}$ ou 2,903.

146. On peut aussi réduire en décimales la fraction qui accompagne l'entier ; mais il faut observer d'y employer un nombre de décimales pair et double de celui qu'on veut avoir à la racine ; parce que le produit de la multiplication de deux nombres qui ont des décimales, devant y avoir autant de décimales qu'il y en a dans les deux facteurs (54), le carré d'un nombre qui a des décimales, doit en avoir deux fois autant que ce nombre. En appliquant cette méthode à $8\frac{3}{7}$, on le transforme en 8,428571 (99) dont la racine est 2,903, comme ci-dessus.

147. Si l'on avait à tirer la racine carrée d'une quantité décimale, il faudrait avoir soin de rendre le nombre des décimales pair, s'il ne l'est pas ; ce qui se fera en mettant à la suite de ses décimales, 1, ou 3, ou 5, etc., zéro : cela n'en change pas la valeur (30). Ainsi, pour tirer la racine carrée de 21,935 à moins d'un millième près, je tire la racine carrée de 21,935000 qui est 4,683 ; c'est aussi celle de 21,935. On trouvera de même que celle de 0,542 est à moins d'un millième près 0,736, et que celle de 0,0054 est à moins d'un millième près 0,073.

148. Quand on a trouvé, par la méthode qui vient d'être exposée, les trois premiers chiffres de la racine, on peut en avoir plusieurs autres avec plus de facilité et de promptitude par la division seule, en cette manière.

Prenons pour exemple 763703556823 : je commence par chercher les trois premiers chiffres de la racine par la méthode ci-dessus : je trouve 873 pour cette racine, et 1574 pour reste : je mets à côté de ce reste les deux chiffres 55 qui suivent la partie 763703 qui a donné les trois premiers chiffres. (Je mettrais les trois chiffres suivans, si j'avais quatre chiffres de la racine ; quatre si

j'en avais cinq, et ainsi de suite.) Je divise 157455 que j'ai alors, par le double 1746 de la racine ; je trouve pour quotient 90 ; ce sont deux nouveaux chiffres à mettre à la suite de la racine qui par là devient 8739o. Je carre cette racine, et je retranche son carré 7637012100 de la partie 7637035568 dont 8739o est la racine ; il me reste 23468.

Si je veux avoir de nouveaux chiffres à la racine, comme j'en ai déjà cinq, je puis, par la seule division, en trouver 4 ; je mettrai, pour cet effet, à la suite du reste 23468 les deux chiffres restans 23 du nombre proposé et deux zéro, et divisant 2346823oo par le double 174780 de la racine trouvée, j'aurai 1342 pour les quatre nouveaux chiffres que je dois joindre à la racine ; mais en partageant le nombre proposé en tranches, de la manière qui a été dite ci-dessus, on voit que la racine ne doit avoir que six chiffres pour les nombres entiers ; donc cette racine est 873901,342, à moins d'un millième près.

On peut, le plus souvent, pousser chaque division jusqu'à un chiffre de plus, c'est-à-dire jusqu'à autant de chiffres qu'on en a déjà à la racine ; mais il y a quelques cas, rares à la vérité, où l'erreur sur le dernier chiffre pourrait aller jusqu'à cinq unités, au lieu qu'en se bornant à un chiffre de moins, comme nous venons de le faire, on n'a jamais à craindre même une unité d'erreur sur le dernier chiffre.

Si après avoir trouvé les premiers chiffres de la racine par la méthode ordinaire, ce qui reste après l'opération faite, se trouvait égal au double de ces premiers chiffres, il faudrait, pour éviter tout embarras, en déterminer encore un par la même méthode ordinaire ; après quoi, on trouverait les autres par la méthode abrégée que nous venons d'exposer, qui, comme on le voit assez, s'applique également aux décimales.

Si la racine devait avoir des zéro parmi ses chiffres intermédiaires, dans le cas où ces zéro seraient du nombre des chiffres qu'on détermine par la division, il peut arriver, s'ils doivent être les premiers chiffres du quotient, qu'on ne s'en aperçoive pas, parce que dans la division on ne marque pas les zéro qui doivent précéder sur la gauche du quotient : le moyen de le distinguer est de faire attention qu'on doit avoir toujours autant de chiffres au quotient qu'on en a mis à la suite du reste ; et par conséquent, quand il y en aura moins, il en faudra compléter le nombre par des zéro placés sur la gauche de ce quotient.

Au reste, l'abrégé que nous venons d'exposer est une suite de ce principe général qu'il est aisé de déduire de ce qu'on a vu (134), savoir, que le carré d'une quantité quelconque composée de deux parties, renferme le carré de la première partie, deux fois la première partie multipliée par la seconde, et le carré de la seconde.

## *De la formation des Nombres cubes et de l'extraction de leur Racine.*

149. Pour former ce qu'on appelle le cube d'un nombre, il

faut d'abord multiplier ce nombre par lui-même, et multiplier ensuite par ce même nombre le produit résultant de cette première multiplication.

Ainsi le cube d'un nombre est, à proprement parler, le produit du carré d'un nombre multiplié par ce même nombre : 27 est le cube de 3, parce qu'il résulte de la multiplication de 9 (carré de 3) par le même nombre 3.

Le nombre que l'on cube est donc trois fois facteur dans le cube ; c'est pour cette raison que le cube est aussi nommé *troisième puissance* ou *troisième degré* de ce nombre.

150. En général, on dit qu'un nombre est élevé à sa seconde, troisième, quatrième, cinquième, etc., puissance, quand on l'a multiplié par lui-même 1, 2, 3, 4, 5, etc., fois consécutives, ou lorsqu'il est 2 fois, 3 fois, 4 fois, 5 fois, etc., facteur dans le produit.

151. La racine cubique d'un cube proposé est le nombre qui, multiplié par son carré, produit ce cube : ainsi 3 est la racine cubique de 27.

152. On n'a donc pas besoin de règles pour former le cube d'un nombre ; mais pour revenir du cube à sa racine, il faut une méthode. Nous déduirons cette méthode de l'examen de ce qui se passe dans la formation du cube.

Observons cependant qu'on n'a besoin de méthode pour extraire la racine cubique en nombres entiers, que lorsque le nombre proposé a plus de trois chiffres ; car 1000 étant le cube de 10, tout nombre au-dessous de 1000, et par conséquent de moins de quatre chiffres, aura pour racine moins que 10, c'est-à-dire moins de deux chiffres.

Ainsi tout nombre qui tombera entre deux de ceux-ci :

1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729,

aura sa racine cubique, en nombre entier, entre les deux nombres correspondans de cette suite :

1 2 3 4 5 6 7 8 9,

dont la première contient les cubes.

153. Tout nombre n'a pas de racine cubique ; mais on peut approcher continuellement d'un nombre qui, étant cubé, approche aussi de plus en plus de reproduire ce premier nombre ; c'est ce que nous verrons après avoir appris à trouver la racine d'un cube parfait.

154. Voyons donc de quelles parties peut être composé le cube d'un nombre qui contiendrait des dixaines et des unités.

Puisque le cube résulte du carré d'un nombre multiplié par ce même nombre, il est essentiel de se rappeler ici (134) *que le carré d'un nombre composé de dixaines et d'unités, renferme,* 1° *le carré des dixaines ;* 2° *deux fois le produit des dixaines par les unités ;* 3° *le carré des unités.*

Pour former le cube, il faut donc multiplier ces trois parties par les dixaines et par les unités du même nombre.

Afin d'apercevoir plus distinctement les produits qui en résulteront, donnons à cette opération simulée la forme suivante :

1°.

| | | |
|---|---|---|
| Le carré des dixaines | étant multiplié par les dixaines, donnera..... | Le cube des dixaines. |
| Deux fois le produit des dixaines par les unités | | Deux fois le produit du carré des dixaines multiplié par les unités. |
| Le carré des unités | | Le produit des dixaines par le carré des unités. |

2°.

| | | |
|---|---|---|
| Le carré des dixaines | étant multiplié par les unités, donnera..... | Le produit du carré des dixaines multiplié par les unités. |
| Deux fois le produit des dixaines par les unités | | Deux fois le produit des dixaines par le carré des unités. |
| Le carré des unités | | Le cube des unités. |

Donc en rassemblant ces six résultats et réunissant ceux qui sont semblables, on voit que le cube d'un nombre composé de dixaines et d'unités contient quatre parties, savoir : *le cube des dixaines, trois fois le carré des dixaines multiplié par les unités, trois fois les dixaines multipliées par le carré des unités, et enfin le cube des unités*

Formons, d'après cela, le cube d'un nombre composé de dixaines et d'unités, de 43, par exemple,

64000
14400
1080
27
79507

Nous prendrons donc le cube de 4 qui est 64 ; mais comme ce 4 est des dixaines, son cube sera des mille, parce que le cube de 10 est 1000 ; ainsi le cube de quatre dixaines sera 64000.

3 fois 16, ou 3 fois le carré des 4 dixaines, étant multiplié par les 3 unités, donnera 144 centaines, parce que le carré de 10 est 100 ; ainsi ce produit sera 14400.

3 fois 4, ou 3 fois les dixaines étant multipliées par le carré 9 des unités, donneront des dixaines, et ce produit sera 1080.

Enfin le cube des unités se terminera à la place des unités, et sera 27.

En réunissant ces quatre parties, on aura 79507 pour le cube de 43, cube qu'on aurait trouvé sans doute plus facilement en multipliant 43 par 43, et le produit 1849 encore par 43 ; mais il ne s'agit pas tant ici de trouver la valeur du cube, que de reconnaître, par l'examen des parties qui le composent, la manière de revenir à sa racine.

155. Cela posé, voici le *procédé de l'extraction de la racine* cubique.

EXEMPLE I.

Soit donc proposé d'extraire la racine cubique de 79507

*Cube.* *Racine.*

7 9.5 0 7 | 43
1 5 5.0 7
4 8

Pour avoir la partie de ce nombre qui renferme le cube des dixaines de la racine, j'en sépare les trois derniers chiffres, dans lesquels nous venons de voir que ce cube ne peut être compris, puisqu'il vaut des mille.

Je cherche la racine cubique de 79, elle est 4 que j'écris à côté.

Je cube 4, et j'ôte le produit 64 de 79 ; il me reste 15 que j'écris au-dessous de 79.

A côté de 15 j'abaisse 507, ce qui me donne 15507, dans lequel il doit y avoir 3 fois le carré des 4 dixaines trouvées, multiplié par les unités que nous cherchons, plus 3 fois ces mêmes dixaines multipliées par le carré des unités, plus enfin le cube des unités.

Je sépare les deux derniers chiffres 07 ; la partie 155 qui reste à gauche renferme trois fois le carré des dixaines multiplié par les unités ; c'est pourquoi, afin d'avoir les unités (74), je vais diviser cette partie 155 par le triple du carré des 4 dixaines, c'est-à-dire par 48.

Je trouve que 48 est 3 fois dans 155 ; j'écris donc 3 à la racine.

Pour éprouver cette racine, et connaître le reste, s'il y en a, nous pourrions composer les 3 parties du cube qui doivent se trouver dans 15507, et voir si elles forment 15507, ou de combien elles en diffèrent : mais il est aussi commode de faire cette vérification en cubant tout de suite 43, c'est-à-dire en multipliant 43 par 43, ce qui produit 1849, et multipliant ce produit par 43, ce qui donne enfin 79507. Ainsi 43 est exactement la racine cubique.

Si le nombre proposé a plus de 6 chiffres, on raisonnera comme dans l'exemple ci-après.

EXEMPLE II.

Soit proposé d'extraire la racine cubique de 596947688.

| | |
|---|---|
| 5 9 6.9 4 7.6 8 8 | 843 |
| 8 4 9.4 7 | |
| 1 9 2 | |
| 5 9 2 7 0 4 | |
| 4 2 4 3 6.8 8 | |
| 2 1 1 6 8 | |
| 5 9 6 9 4 7 6 8 8 | |
| 0 0 0 0 0 0 0 0 0 | |

On considérera sa racine comme composée de dixaines et d'unités, et par cette raison on commencera par séparer les trois derniers chiffres.

La partie 596947 qui renferme le cube des dixaines, ayant plus de trois chiffres, sa racine en aura plus d'un, et par conséquent elle aura des dixaines et des unités. Il faut donc pour trouver le cube de ces premières dixaines, séparer les trois chiffres 947.

Cela posé, je cherche la racine cubique de 596; elle est 8, j'écris ce 8 à côté.

Je cube 8, et je retranche le produit 512 de 596, il reste 84, que j'écris au-dessous de 596.

A côté de 84 j'abaisse 947, ce qui me donne 84947 dont je sépare les deux derniers chiffres.

Au-dessous de la partie 849, j'écris 192 qui est le triple carré de la racine 8, et je divise 849 par 192; je trouve pour quotient 4 que j'écris à la racine.

Pour vérifier cette racine, et avoir en même temps le reste, je cube 84, et je retranche le produit 592704 du nombre 596947; j'ai pour reste 4243.

A côté de ce reste j'abaisse la tranche 688, et considérant la racine 84 comme un seul nombre qui marque les dixaines de la racine cherchée, je sépare les deux derniers chiffres 88 de la tranche abaissée, et je divise la partie 42436 par le triple carré de 84, c'est-à-dire, par 21168; je trouve pour quotient 2 que j'écris à la suite de 84.

Pour vérifier la racine 842, et avoir le reste, s'il y en a, je cube 842, et je retranche le produit 596947688 du nombre proposé 596947688; et comme il ne reste rien, j'en conclus que 842 est la racine exacte de 596947688.

Il faut encore observer, 1°. que dans le cours de ses opérations, on ne doit jamais mettre plus de 9 à la racine.

2°. Si le chiffre qu'on porte à la racine était trop fort, on s'en apercevrait à ce que la soustraction ne pourrait se faire, et alors on diminuerait la racine successivement de 1, 2, 3, etc., unités, jusqu'à ce que la soustraction devînt possible.

Lorsque le nombre proposé n'est pas un cube parfait, la racine qu'on trouve n'est qu'une racine approchée, et il est rare qu'il soit suffisant de l'avoir en nombre entier. Les décimales sont encore d'un usage très-avantageux pour pousser cette approximation beaucoup plus loin, et aussi loin qu'on le désire, sans que cependant on puisse jamais atteindre à une racine exacte.

156. Pour approcher aussi près qu'on le voudra de la racine cubique d'un cube imparfait, il faut mettre à la suite de ce nombre trois fois autant de zéro qu'on veut avoir de décimales à la racine ; faire l'extraction comme dans les exemples précédens, et après l'opération faite, séparer par une virgule sur la droite de la racine, autant de chiffres qu'on voulait avoir de décimales.

EXEMPLE III.

On demande d'approcher de la racine cubique de 8755 jusqu'à moins d'un centième près. Pour avoir des centièmes à la racine, c'est-à-dire deux décimales, il faut que le cube ou le nombre proposé en ait six (54) ; il faut donc mettre six zéro à la suite de 8755.

Ainsi la question se réduit à tirer la racine cubique de 8755000000.

| | |
|---|---|
| 8.7 5 5.0 0 0.0 0 0 | 2061 |
| 0 7.5 5 | |
| 1 2 | |
| 8 0 0 0 | |
| 7 5 5 0.0 0 | |
| 1 2 0 0 | |
| 8 7 4 1 8 1 6 | |
| 1 3 1 8 4 0.0 0 | |
| 1 2 7 3 0 8 | |
| 8 7 5 4 5 5 2 9 8 1 | |
| 4 4 7 0 1 9 | |

Suivant ce qui a été dit ci-dessus, je partage ce nombre en tranches de trois chiffres chacune, en allant de droite à gauche.

Je tire la racine cubique de la dernière tranche 8, elle est 2, que j'écris à la racine. Je cube 2, et je retranche le produit de 8; j'ai pour reste 0, à côté duquel j'abaisse la tranche 755, dont je sépare les deux derniers chiffres 55 : au-dessous de la partie restante 7, j'écris 12, triple carré de la racine ; et divisant 7 par 12, je trouve 0 pour quotient que j'écris à la racine.

Je cube la racine 20, ce qui me donne 8000 que je retranche de 8755 ; j'ai pour reste 755, à côté duquel j'abaisse la tranche 000, dont je sépare deux chiffres sur la droite ; au-dessous de la partie restante 7550 j'écris 1200, triple carré de la racine 20, et divisant 7550 par 1200, j'ai pour quotient 6 que j'écris à la racine.

Je cube la racine 206, et je retranche le produit de 8755000 ; j'ai pour reste 13184, à côté duquel j'abaisse la dernière tranche 000, dont je sépare les deux derniers chiffres. Au-dessous de la partie restante 131840, j'écris 127308, triple carré de la racine trouvée 206. Je divise 131840 par 127308; je trouve pour quotient 1, que j'écris à la suite de 206. Je cube 2061, et ayant retranché de 8755000000 le produit 8754552981, j'ai pour reste 447019.

La racine cubique approchée de 8755000000 est donc 2061 ; donc celle de 8755,000000 est 20, 61, puisque le cube a trois fois autant de décimales que sa racine (54).

Si l'on voulait pousser l'approximation plus loin, on mettrait à la suite du reste trois zéro, et on continuerait comme on a fait à chaque fois qu'on a descendu une tranche.

57. Puisque pour multiplier une fraction par une fraction, il faut multiplier numérateur par numérateur et dénominateur par dénominateur, il faudra donc, pour cuber une fraction, cuber son numérateur et son dénominateur. Donc réciproquement pour extraire la racine cubique d'une fraction, il faudra extraire la racine cubique du numérateur et la racine cubique du dénominateur. Ainsi la racine cubique de $\frac{27}{64}$ est $\frac{3}{4}$, parce que la racine cubique de 27 est 3, et celle de 64 est 4.

158. Mais si le dénominateur seul est un cube, on tirera la

racine approchée du numérateur, et on donnera à cette racine pour dénominateur la racine cubique du dénominateur. Par exemple, si l'on demande la racine cubique de $\frac{143}{343}$, comme le numérateur n'est pas un cube, j'en tire la racine approchée, qui sera 5,22 à moins d'un centième près; et tirant la racine de 343 qui est 7, j'ai $\frac{5,22}{7}$ pour la racine approchée de $\frac{143}{343}$; ou bien en réduisant en décimales (90), j'ai 0,74 pour cette racine approchée à moins d'un centième près.

159. Si le dénominateur n'est pas un cube, on multipliera les deux termes de la fraction par le carré de ce dénominateur, et alors le nouveau dénominateur étant un cube, on se conduira comme il vient d'être dit. Par exemple, si l'on demande la racine cubique de $\frac{3}{7}$, je multiplie le numérateur et le dénominateur par 49, carré du dénominateur 7, j'ai $\frac{147}{343}$, qui est de même valeur que $\frac{3}{7}$. La racine cubique de $\frac{147}{343}$ est $\frac{5,27}{7}$, ou en réduisant purement en décimales, 0,75. La racine cubique de $\frac{3}{7}$ est donc 0,75 à moins d'un centième près.

S'il y avait des entiers joints aux fractions, on convertirait le tout en fraction, et la question serait réduite à tirer la racine cubique d'une fraction (157 *et suiv.*)

On pourrait aussi, soit qu'il y ait des entiers, soit qu'il n'y en ait point, réduire la fraction en décimales; mais il faut avoir soin de pousser cette réduction jusqu'à trois fois autant de décimales qu'on veut en avoir à la racine. Ainsi, si l'on demandait la racine cubique de $7\frac{3}{11}$ approchée jusqu'à moins d'un millième, on changerait la fraction $\frac{3}{11}$ en 0,272727272; en

sorte que pour avoir la racine cubique de $7\frac{3}{11}$, on tirerait celle de 7,272727272 qu'on trouvera être 1,937.

160. Pour tirer la racine cubique d'un nombre qui aura des décimales, il faudra le préparer par un nombre suffisant de zéro mis à sa suite, de manière que le nombre de ces décimales soit ou 3, ou 6, ou 9, etc.; alors on en tirera la racine comme s'il n'y avait point de virgule; et après l'opération faite, on séparera sur la droite de la racine, par une virgule, un nombre de chiffres qui soit le tiers du nombre des décimales de la quantité proposée, en sorte que si la racine n'avait pas suffisamment de chiffres pour que cette règle eût son exécution, on y suppléerait par des zéro placés sur la gauche de cette racine. Ainsi pour tirer la racine cubique de 6,54 à moins d'un millième près, je mettrai sept zéro, et je tirerai la racine cubique de 6540000000 qui sera 1870; j'en séparerai trois chiffres, puisqu'il y a 9 décimales au cube, et j'aurai 1,870, ou simplement 1,87 pour la racine cubique de 6,54. On trouvera de même que celle de 0,0006, approchée à moins d'un centième près, est 0,08.

161. Quand on a trouvé les quatre premiers chiffres de la racine cubique par la méthode qu'on vient d'expliquer, on peut trouver les autres plus promptement par la division, et cela de la manière suivante.

Qu'on demande la racine cubique de 5264627832723456 : j'en cherche les quatre premiers chiffres par la méthode ordinaire; ils sont 1739, et le reste de opération est 5681413; à côté de ce reste, je mets les deux chiffres 72 qui suivent la partie 526462783 2 qui a donné les quatre premiers chiffres. (Je mettrais les trois chiffres qui suivent cette même partie, si la racine trouvée avait cinq chiffres, et les quatre si elle en avait six.) Je divise 568141372 par 9072363, triple carré de la racine 1739; j'ai pour quotient 62, et ce sont deux nouveaux chiffres à mettre à la suite de 1739; en sorte que 173962 est, en nombre entier, la racine cubique du nombre proposé.

Si l'on voulait pousser plus loin, on cuberait cette racine, et ayant retranché le produit du nombre proposé, on mettrait à la suite du reste quatre zéro, et on diviserait le tout par le triple du carré de 173962, ce qui donnerait quatre décimales pour la racine.

On fera ici la même observation qu'on a faite (148) sur le cas où la division ne donne pas autant de chiffres qu'elle doit en donner. Et dans ces divisions on s'aidera de la règle abrégée qui a été donnée (69 *et suiv.*).

## *Des raisons, Proportions et Progressions, et de quelques règles qui en dépendent.*

162. Les mots *raison* et *rapport* ont la même signification en Mathématiques, et l'un et l'autre expriment le résultat de la comparaison de deux quantités.

163. Si dans la comparaison de deux quantités on a pour but de connaître de combien l'une surpasse l'autre, ou en est surpassée, le résultat de cette comparaison, qui est la différence de ces deux quantités, se nomme leur *Rapport arithmétique.*

Ainsi, si je compare 15 avec 8 pour connaître leur différence 7, ce nombre 7, qui est le résultat de la comparaison, est le rapport arithmétique de 15 à 8.

Pour marquer que l'on compare deux quantités sous ce point de vue, on sépare l'une de l'autre par un point, en sorte que 15.8 marque que l'on considère le rapport arithmétique de 15 à 8.

164. Si, dans la comparaison de deux quantités, on se propose de connaître combien l'une contient l'autre, ou est contenue en elle, le résultat de cette comparaison se nomme leur *Rapport géométrique.* Par exemple, si je compare 12 à 3 pour savoir combien de fois 12 contient 3, le nombre 4 qui exprime ce nombre de fois est le rapport géométrique de 12 à 3.

Pour marquer que l'on compare deux quantités sous ce point de vue, on sépare l'une de l'autre par deux points : cette expression 12 : 3 marque que l'on considère le rapport géométrique de 12 à 3.

165. Des deux quantités que l'on compare, celle qu'on énonce ou qu'on écrit la première, se nomme *antécédent*, et la seconde se nomme *conséquent.* Ainsi dans le rapport 12 : 3, 12 est l'antécédent, et 3 est le conséquent; l'un et l'autre s'appellent les *termes* du rapport.

166. Pour avoir le rapport arithmétique de deux quantités

il n'y a autre chose à faire qu'à retrancher la plus petite de la plus grande.

167. Et pour avoir le rapport géométrique de deux quantités, il faut diviser l'une par l'autre.

168. Nous évaluerons ce rapport, dorénavant, en divisant l'antécédent par le conséquent : ainsi le rapport de 12 à 3 est 4, et le rapport de 3 à 12 est $\frac{3}{12}$ ou $\frac{1}{4}$.

169. Un rapport arithmétique ne change point quand on ajoute à chacun de ses deux termes, ou qu'on en retranche une même quantité, parce que la différence (en quoi consiste le rapport) reste toujours la même.

170. Un rapport géométrique ne change point quand on multiplie ou quand on divise ses deux termes par un même nombre ; car le rapport géométrique consistant (168) dans le quotient de la division de l'antécédent par le conséquent, est une quantité fractionnaire qui (88) ne peut changer par la multiplication ou la division de ses deux termes par un même nombre. Ainsi le rapport 3 : 12 est le même que celui 6 : 24 que l'on a en multipliant les deux termes du premier par 2 ; il est le même que celui 1 : 4 que l'on a en divisant par 3.

171. Cette propriété sert à simplifier les rapports. Par exemple, si j'avais à examiner le rapport de $6\frac{3}{4}$ à $10\frac{2}{3}$, je dirais, en réduisant tout en fraction, ce rapport est le même que celui de $\frac{27}{4}$ à $\frac{32}{3}$, ou en réduisant au même dénominateur, le même que celui de $\frac{81}{12}$ à $\frac{128}{12}$, ou enfin en supprimant le dénominateur 12 (ce qui revient au même que de multiplier les deux termes du rapport par 12), ce rapport est le même que celui de 81 à 128.

172. Lorsque quatre quantités sont telles que le rapport des deux premières est le même que le rapport des deux dernières, on dit que ces quatre quantités forment une *proportion*, et cette

proportion est arithmétique ou géométrique, selon que le rapport qu'on y considère est arithmétique ou géométrique.

Les quatre quantités 7, 9, 12 et 14 forment une proportion arithmétique, parce que la différence des deux premières est la même que celle des deux dernières. Pour marquer qu'elles sont en proportion arithmétique, on les écrit ainsi, 7.9 : 12.14, c'est-à-dire qu'on sépare par un point les deux termes de chaque rapport, et les deux rapports par deux points. Le point qui sépare les deux termes de chaque rapport, signifie *est à*, et les deux points qui séparent les deux rapports, signifient *comme*; en sorte que pour énoncer la proportion ainsi décrite, on dit, 7 *est à* 9 *comme* 12 *est à* 14.

Les quatre quantités 3, 15, 4, 20 forment une proportion géométrique, parce que 3 est contenu dans 15, comme 4 l'est dans 20. Pour marquer qu'elles sont en proportion géométrique, on les écrit ainsi, 3 : 15 :: 4 : 20, c'est-à-dire qu'on sépare les deux termes de chaque rapport par deux points, et les deux rapports par quatre points. Les deux points signifient *est à*, et les quatre points signifient *comme*; de sorte qu'on dit 3 *est à* 15, *comme* 4 *est à* 20.

Il faut absolument observer que dans la proportion arithmétique, on fait précéder le mot *comme* du mot *arithmétiquement*.

173. Le premier et le dernier terme de la proportion se nomment les *extrêmes*; le 2e. et le 3e. se nomment les *moyens*.

Comme il y a deux rapports, et par conséquent deux antécédens et deux conséquens, on dit, pour le premier rapport, *premier antécédent*, *premier conséquent*; et pour le second, *second antécédent*, *second conséquent*.

174. Quand les deux termes moyens d'une proportion sont égaux, la proportion se nomme proportion *continue*; 3.7 : 7.11 forment une proportion arithmétique continue; on l'écrit ainsi ÷ 3 . 7 . 11 : les deux points et la barre qui précèdent sont pour avertir que dans l'énoncé on doit répéter le terme moyen qui est ici 7.

La proportion 5 : 20 :: 20 : 80 est une proportion géométrique

continue, que par abréviation on écrit ainsi $\div$ 5 : 20 : 80; l'usage des quatre points et de la barre est le même que dans la proportion arithmétique continue.

175. Il suit de ce que nous venons de dire sur les proportions arithmétique et géométrique :

1°. Que si, dans une proportion arithmétique, on ajoute à chacun des antécédens, ou si l'on en retranche la différence ou raison qui règne dans cette proportion, selon que l'antécédent sera plus petit ou plus grand que son conséquent, chaque antécédent deviendra égal à son conséquent; car c'est donner au plus petit terme de chaque rapport ce qui lui manque pour égaler son voisin, ou retrancher du plus grand ce dont il surpasse son voisin. Ainsi dans la proportion 3 . 7 : 8 . 12, ajoutez la différence 4 au premier et au troisième terme, vous aurez 7 . 7 : 12 . 12, et il est aisé de sentir que cela est général.

2°. Si, dans une proportion géométrique, vous multipliez chacun des deux conséquens par le rapport, vous les rendrez pareillement égaux chacun à son antécédent; car multiplier le conséquent par le rapport, c'est le prendre autant de fois qu'il est contenu dans l'antécédent : ainsi, dans la proportion 12 : 3 :: 20 : 5, multipliez 3 et 5 chacun par 4, et vous aurez 12 : 12 :: 20 : 20; pareillement, dans la proportion 15 : 9 :: 45 : 27, multipliez 9 et 27 chacun par $\frac{15}{9}$ ou $\frac{5}{3}$ qui est le rapport, vous aurez..... 15 : 15 :: 45 : 45.

## *Propriétés des Proportions arithmétiques.*

176. La propriété fondamentale des proportions arithmétiques est que *la somme des extrêmes est égale à la somme des moyens;* par exemple, dans cette proportion 3 . 7 : 8 . 12, la somme 3 et 12 des extrêmes, et celle 7 et 8 des moyens, sont également 15.

Voici comment on peut s'assurer que cette propriété est générale.

Si les deux premiers termes étaient égaux entre eux et les

deux derniers aussi égaux entre eux, comme dans cette proportion :

$$7 . 7 : 12 . 12$$

il est évident que la somme des extrêmes serait égale à celle des moyens.

Or, toute proportion arithmétique peut être ramenée à cet état (175), en ajoutant à chaque antécédent, ou en ôtant la différence qui règne dans la proportion. Cette addition qui augmentera également la somme des extrêmes et celle des moyens, ne peut rien changer à l'égalité de ces deux sommes; ainsi, si elles deviennent égales par cette addition, c'est qu'elles étaient égales sans cette même addition. Le raisonnement est le même pour le cas de la soustraction.

177. Puisque dans la proportion continue les deux termes moyens sont égaux, il suit de ce qu'on vient de démontrer, que dans cette même proportion, la somme des extrêmes est double du terme moyen, ou que le terme moyen est la moitié de la somme des extrêmes. Ainsi, pour avoir un moyen arithmétique entre 7 et 15, par exemple, j'ajoute 7 à 15, et prenant la moitié de la somme 22, j'ai 11 pour le terme moyen; en sorte que $\div 7 . 11 . 15$.

## *Propriétés des Proportions géométriques.*

178. La propriété fondamentale de la proportion géométrique est que *le produit des extrêmes est égal au produit des moyens;* par exemple, dans cette proportion $3 : 15 :: 7 : 35$, le produit de 35 par 3, et celui de 15 par 7, sont également 105.

Voici comment on peut se convaincre que cette propriété a lieu dans toute proportion géométrique.

Si les antécédens étaient égaux à leurs conséquens, comme dans cette proportion :

$$3 : 3 :: 7 : 7$$

il est évident que le produit des extrêmes serait égal au produit des moyens.

Mais on peut toujours ramener une proportion à cet état (175), en multipliant les deux conséquens par la raison. Cette

multiplication fera, à la vérité, que le produit des extrêmes sera un certain nombre de fois plus grand qu'il n'aurait été, ou sera un certain nombre de fois plus petit, si le rapport est une fraction; mais elle produira le même effet sur celui des moyens; donc, puisque après cette multiplication le produit des extrêmes serait égal au produit des moyens, ces deux produits doivent aussi être égaux sans cette même multiplication.

On peut donc prendre le produit des extrêmes pour celui des moyens, et réciproquement.

Donc, *dans la proportion continue, le produit des extrêmes est égal au carré du terme moyen;* car les deux moyens étant égaux, leur produit est le carré de l'un d'eux. Donc pour avoir un moyen géométrique entre deux nombres proposés, il faut multiplier ces deux nombres l'un par l'autre, et tirer la racine carrée de ce produit. Ainsi, pour avoir un moyen géométrique entre 4 et 9, je multiplie 4 par 9, et la racine carrée 6 du produit 36 est le moyen proportionnel cherché.

179. De la propriété fondamentale de la proportion géométrique, il suit que si, connaissant les trois premiers termes d'une proportion, on voulait déterminer le quatrième, il faudrait *multiplier le second par le troisième, et diviser le produit par le premier;* car il est évident (74) qu'on aurait le quatrième terme en divisant le produit des deux extrêmes par le premier terme; or ce produit est le même que celui des moyens; donc on aura aussi le quatrième terme en divisant le produit des moyens par le premier terme.

Ainsi, si l'on demande quel serait le quatrième terme d'une proportion dont les trois premiers seraient 3, 8, 12; je multiplie 8 par 12, ce qui me donne 96 que je divise par 3; le quotient 32 est le quatrième terme demandé; en sorte que 3, 8, 12, 32, forment une proportion : en effet, le premier rapport est, $\frac{3}{8}$ et le second est $\frac{12}{32}$ qui (89), en divisant les deux termes par 4, est aussi $\frac{3}{8}$.

Par un semblable raisonnement, on voit qu'on peut trouver tout autre terme de la proportion, lorsqu'on en connaît trois. *Si le terme qu'on veut trouver est un des extrêmes, il faudra multiplier les deux moyens, et diviser par l'extrême connu : si, au contraire, on veut trouver un des moyens, il faudra multiplier les deux extrêmes, et diviser par le terme moyen connu.*

180. Cette propriété de l'égalité entre le produit des extrêmes et celui des moyens ne peut appartenir qu'à quatre quantités en proportion géométrique. En effet, si l'on avait quatre quantités qui ne fussent point en proportion géométrique, en multipliant les conséquens par le rapport des deux premiers, il n'y aurait que le premier antécédent qui deviendrait égal à son conséquent. Par exemple, si l'on avait 3, 12, 5, 10, en multipliant les conséquens 12 et 10 par la raison $\frac{1}{4}$ des deux premiers termes 3 et 12, on aurait 3,3,5, $\frac{10}{4}$, dans lesquels il est évident que le produit des extrêmes ne peut être égal à celui des moyens; donc ces produits ne pourraient pas être égaux non plus, quand même on n'aurait pas multiplié les conséquens par la raison $\frac{1}{4}$. Il est visible que ce raisonnement peut s'appliquer à tous les cas.

Donc, *si quatre quantités sont telles que le produit des extrêmes soit égal au produit des moyens, ces quatre quantités sont en proportion.*

De là nous conclurons cette seconde propriété des proportions.

181. *Si quatre quantités sont en proportion, elles y seront encore si l'on met les extrêmes à la place des moyens, et les moyens à la place des extrêmes.*

182. La même chose aura lieu, c'est-à-dire que *la proportion subsistera si l'on échange les places des extrêmes ou celles des moyens.*

En effet, dans tous les cas, il est aisé de voir que ce produit des extrêmes sera toujours égal à celui des moyens.

Ainsi la proportion 3 : 8 :: 12 : 32 peut fournir toutes les proportions suivantes par la seule permutation de ses termes.

3 : 8 :: 12 : 32; 3 : 12 :: 8 : 32; 32 : 12 :: 8 : 3; 32 : 8 :: 12 : 3;
8 : 3 :: 32 : 12; 8 : 32 :: 3 : 12; 12 : 3 :: 32 : 8; 12 : 32 :: 3 : 8

Et il en est de même de toute autre proportion.

183. Puisqu'on peut mettre le troisième terme à la place du second, et réciproquement, on doit en conclure *qu'on peut, sans troubler une proportion, multiplier ou diviser les deux antécédens par un même nombre, et qu'il en est de même à l'égard des conséquens ;* car, en faisant cette permutation, les deux antécédens de la proportion donnée formeront le premier rapport, et les deux conséquens le second. Ainsi multiplier les deux antécédens de la première proportion, revient alors à multiplier les deux termes d'un rapport chacun par un même nombre, ce qui (170) ne change point ce rapport. Par exemple, si j'ai la proportion 3 : 7 :: 12 : 28, je puis, en divisant les deux antécédens par 3, dire 1 : 7 :: 4 : 28, parce que de la proportion 3 : 7 :: 12 : 28 on peut (182) conclure 3 : 12 :: 7 : 28, et en divisant les deux termes du premier rapport par 3, 1 : 4 :: 7 : 28, qui (182) peut être changée en 1 : 7 :: 4 : 28.

184. *Tout changement fait dans une proportion, de manière que la somme de l'antécédent et du conséquent, ou leur différence, soit comparée à l'antécédent ou au conséquent, de la même manière dans chaque rapport, formera toujours une proportion.*

Par exemple, si l'on a la proportion

12 : 3 :: 32 : 8,

on en pourra conclure les proportions suivantes :

12 *plus* 3 : 3 :: 32 *plus* 8 : 8,
ou 12 *moins* 3 : 3 :: 32 *moins* 8 : 8,
ou 12 *plus* 3 : 12 :: 32 *plus* 8 : 32,
ou 12 *moins* 3 : 12 :: 32 *moins* 8 : 32,

Car si c'est au conséquent que l'on compare, il est facile de

voir que l'antécédent augmenté ou diminué du conséquent contiendra ce conséquent une fois de plus ou une fois de moins qu'auparavant ; et comme cette comparaison se fait de la même manière pour le second rapport, qui, par la nature de la proportion, est égal au premier, il s'ensuit nécessairement que les deux nouveaux rapports seront aussi égaux entre eux.

Si c'est à l'antécédent que l'on compare, le même raisonnement aura encore lieu, en concevant que dans la proportion sur laquelle on fait ce changement, on ait mis l'antécédent de chaque rapport à la place de son conséquent, et le conséquent à la place de l'antécédent ; ce qui est permis (181).

185. Puisqu'en mettant le troisième terme d'une proportion à la place du second, et réciproquement, il y a encore proportion (182), on doit conclure que les deux antécédens se contiennent l'un l'autre autant de fois que les conséquens se contiennent aussi l'un l'autre.

Donc, *la somme des deux antécédens de toute proportion contient la somme des deux conséquens, ou est contenue en elle autant qu'un des antécédens contient son conséquent, ou est contenu en lui.*

Par exemple, dans la proportion

$$12 : 3 :: 32 : 8$$

12 plus 32 : 3 plus 8 :: 32 : 8, ce qui est évident.

Mais, pour s'en convaincre généralement, il n'y a qu'à faire attention que si le premier antécédent contient le second quatre fois, par exemple, la somme des deux antécédens contiendra le second cinq fois ; et, par la même raison, la somme des conséquens contiendra le second conséquent cinq fois ; donc la somme des antécédens contiendra celle des conséquens, comme le quintuple d'un des antécédens contient le quintuple de son conséquent ; c'est-à-dire (170), comme un des antécédens contient son conséquent.

On prouverait de même que la différence des antécédens est à la différence des conséquens, comme un antécédent est à son conséquent.

186. Il est évident que la proposition qu'on vient de démontrer revient à celle-ci, si l'on a deux rapports égaux, par exemple celui

de. . . . . 4 : 12
et celui de. . . . . 7 : 21
11 : 33

On aura encore le même rapport, en ajoutant antécédent à antécédent, et conséquent à conséquent.

Donc, *si l'on a plusieurs rapports égaux, la somme de tous les antécédens est à la somme de tous les conséquens, comme l'un des antécédens est à son conséquent.* Par exemple, si on a les rapports égaux 4 : 12 :: 7 : 21 :: 2 : 6, on peut dire que *4 plus 7 plus 2* sont à 12 *plus* 21 *plus* 6, comme 4 est à 12, ou comme 7 est à 21, etc.

Car, après avoir ajouté entre eux les antécédens des deux premiers rapports, et leur conséquens aussi entre eux, le nouveau rapport qui, selon ce qu'on vient de voir, sera le même que chacun des deux premiers, sera aussi le même que le troisième : par conséquent, on pourra l'ajouter de même avec celui-ci, et il en résultera encore le même rapport, et ainsi de suite.

187. On appelle *rapport composé* celui qui résulte de deux ou d'un plus grand nombre de rapports dont on multiplie les antécédens entre eux, et les conséquens entre eux. Par exemple, si l'on a les deux rapports 12 : 4 et 25 : 5, le produit des antécédens 12 et 25 sera 300, celui des conséquens 4 et 5 sera 20; le rapport de 300 à 20 est ce qu'on appelle rapport composé des rapports de 12 à 4, et de 25 à 5.

188. Ce rapport est le même que si l'on avait évalué séparément chacun des rapports composans, et qu'on eût multiplié entre eux les nombres qui expriment ces rapports. En effet, le apport de 12 à 4 est 3, celui de 25 à 5 est 5 : or, 3 fois 5 font 15, qui est le rapport de 300 à 20; et l'on peut voir que cela est général, en faisant attention que le rapport est mesuré (168) par une fraction qui a l'antécédent pour numérateur, et le conséquent pour dénominateur : ainsi le rapport composé doit être

une fraction qui ait pour numérateur le produit des deux antécédens, et pour dénominateur le produit des deux conséquens; c'est donc (106) le produit des deux fractions qui expriment les rapports composans.

189. Si les rapports que l'on multiplie sont égaux, le rapport composé est dit *rapport doublé*, si l'on n'a multiplié que deux rapports; *rapport triplé*, si l'on en a multiplié trois; *quadruplé*, si l'on en a multiplié quatre, et ainsi de suite. Par exemple, si l'on multiplie le rapport de 2 à 3 par celui de 4 à 6 qui lui est égal, on aura le rapport composé 8 : 18 qui sera dit rapport *doublé* du rapport de 2 à 3, ou de 4 à 6.

190. *Si l'on a deux proportions, et qu'on les multiplie par ordre, c'est-à-dire, le premier terme de l'une par le premier terme de l'autre, le second par le second, et ainsi de suite, les quatre produits qui en résulteront seront en proportion.*

Car, en multipliant ainsi deux proportions, c'est multiplier deux rapports égaux par deux rapports égaux (172); donc les deux rapports composés qui en résultent doivent être égaux; donc les quatre produits doivent être en proportion (172).

191. Concluons de là que *les carrés, les cubes, et en général les puissances semblables de quatre quantités en proportion, sont aussi en proportion*, puisque, pour former ces puissances, il ne faut que multiplier la proportion par elle-même plusieurs fois de suite.

192. *Les racines carrées, cubiques, et en général les racines semblables de quatre quantités en proportion sont aussi en proportion*; car le rapport des racines carrées des deux premiers termes n'est autre chose que la racine carrée du rapport de ces deux termes (142 et 167); et il en est de même du rapport des racines carrées des deux derniers termes; donc puisque les deux rapports primitifs sont supposés égaux, leurs racines carrées sont égales; donc le rapport des racines carrées des deux premiers termes sera égal au rapport des racines carrées des deux derniers. On prouvera de même pour les racines cubiques, quatrièmes, etc.

## *Usage des Propositions précédentes.*

193. Les propositions que nous venons de démontrer, et qu'on appelle les *Règles des proportions*, ont des applications continuelles dans toutes les parties des Mathématiques. Nous nous bornerons ici à celles qui appartiennent l'Arithmétique, et nous commencerons par celles qu'on peut faire de ce qui a été établi (179), et qui est la base de presque toutes les autres.

## *De la Règle de* Trois *directe et simple.*

194. On distingue plusieurs sortes de règles de *Trois* : elles ont toutes pour objet de faire connaître un terme d'une proportion dont on en connaît trois.

Celle qu'on appelle *règle de Trois directe et simple* est nommée *simple*, parce que l'énoncé des questions auxquelles on l'applique ne renferme jamais plus de quatre quantités, dont trois sont connues, et la quatrième est à trouver.

On l'appelle *directe*, parce que des quatre quantités qu'on y considère, il y en a toujours deux qui, non-seulement sont relatives aux deux autres, mais qui en dépendent de manière que, de même qu'une des quantités contient l'autre, ou est contenue en elle, de même aussi la quantité relative à la première contient la quantité relative à la seconde, ou est contenue en elle ; c'est-à-dire, d'une manière plus abrégée, qu'une quantité et sa relative peuvent toujours être, toutes deux, ou antécédens ou conséquens dans la proportion ; ce qui n'a pas lieu dans la Règle de Trois inverse, comme nous le verrons dans peu.

La méthode pour trouver le quatrième terme d'une proportion, et par conséquent pour faire la règle de Trois directe et simple, est suffisamment exposée (179) ; mais il est à propos de faire connaître, par quelques exemples, l'usage qu'on peut faire de cette règle.

EXEMPLE I.

40 ouvriers ont fait, en un certain temps, 268 toises d'ou

vrage ; on demande combien 60 ouvriers pourraient en faire dans le même temps.

Il est clair que le nombre des toises doit augmenter à proportion du nombre des ouvriers ; en sorte que celui-ci devenant double, triple, quadruple, etc., le premier doit devenir aussi double, triple, quadruple, etc. Ainsi l'on voit que le nombre de toises cherché doit contenir les 268 toises, autant que le nombre 60, relatif au premier, contient le nombre 40 relatif au second : il faut donc chercher le quatrième terme d'une proportion qui commencerait par ces trois-ci :

$$40 : 60 :: 268^{T}$$

Ou, en divisant ces deux premiers termes par 20, ce qui est permis (170), par ces trois autres :

$$2 : 3 :: 268^{T}$$

Ainsi, selon ce qui a été dit (179), je multiplie $268^{T}$ par 3, et je divise le produit 804 par 2 ; ce qui donne pour quotient $402^{T}$, et par conséquent $402^{T}$ pour l'ouvrage que feraient les 60 ouvriers.

EXEMPLE II.

Un navire a fait, avec un même vent, 275 lieues en 3 jours ; on demande en combien de temps il en ferait 2000, toutes les autres circonstances demeurant les mêmes.

Il est évident qu'il faut plus de temps, à proportion du nombre de lieues, et que par conséquent le nombre de jours cherché doit contenir 3 jours, autant que 2000 lieues contiennent 275 lieues : il faut donc chercher le quatrième terme d'une proportion qui commence par ces trois-ci :

$$275 : 2000 :: 3 :$$

Multipliant 2000 par 3, et divisant le produit 6000 par 275, on aura 21 jours $\frac{9}{11}$.

EXEMPLE III.

$52^{T}\ 4^{P}\ 5^{P}$ d'ouvrage ont été payés $168^{\#}\ 9^{s}\ 4^{d}$; on demande combien on doit payer pour $77^{T}\ 1^{P}\ 8^{P}$.

Le prix de $77^{T}\ 1^{P}\ 8^{P}$ doit contenir le prix $168^{\#}\ 9^{s}\ 4^{d}$ des $52^{T}\ 4^{P}\ 5^{P}$, autant que $77^{T}\ 1^{P}\ 8^{P}$ doit contenir $52^{T}\ 4^{P}\ 5^{P}$. Il faut donc chercher le quatrième terme d'une proportion qui commencerait par ces trois-ci :

$$52^{T}\ 4^{P}\ 5^{P} : 77^{T}\ 1^{P}\ 8^{P} :: 168^{\#}\ 9^{s}\ 4^{d} :$$

C'est-à-dire qu'il faut multiplier $168^{\#}\ 9^{s}\ 4^{d}$ par $77^{T}\ 1^{P}\ 8^{P}$, et diviser le produit par $52^{T}\ 4^{P}\ 5^{P}$, ce qu'on peut faire par ce qui a été dit (122 et 128.)

Mais il sera encore plus simple de réduire les deux premiers termes à leur plus petite espèce, c'est-à-dire en pouces; et la question sera réduite à chercher le quatrième terme d'une proportion qui commencerait par ces trois autres :

$$3797 : 5564 :: 168^{\#}\ 9^{s}\ 4^{d} :$$

Alors multipliant $168^{\#}\ 9^{s}\ 4^{d}$ par 5564, on aura $937348^{\#}\ 10^{s}\ 8^{d}$, et divisant par 3797, le quotient $246^{\#}\ 17^{s}\ 3^{d}\ \frac{2789}{3797}$ sera ce qu'on doit payer pour les $77^{T}\ 1^{P}\ 8^{P}$.

S'il y avait des fractions, après avoir réduit les deux termes de même espèce à leur plus petite unité, comme dans cet exemple, on simplifierait le rapport de ces deux termes de la manière qui a été enseignée (171).

## *De la Règle de* Trois *inverse et simple.*

195. La *règle de Trois inverse et simple* diffère de la règle de Trois directe, dont nous venons de parler, en ce que des quatre quantités qui entrent dans l'énoncé de la question pour laquelle on fait cette opération, les deux principales doivent se contenir l'une l'autre, dans un ordre tout opposé à celui des deux autres quantités qui leur sont relatives; en sorte que, lorsque par l'examen de la question, on a donné à ces quantités la disposition convenable pour former une proportion, l'une des quantités

principale et sa relative forment les extrêmes, et l'autre quantité principale avec sa relative, forment les moyens.

Au reste, cela n'introduit aucune différence dans la manière de faire l'opération; c'est toujours le quatrième terme d'une proportion qu'il s'agit de trouver, ou du moins on peut toujours amener la chose à ce point.

Quelques arithméticiens ont prescrit, pour le cas présent, une règle assujettie à l'énoncé de la question : nous ne suivrons point leur exemple; c'est la nature de la question, et non pas son énoncé (qui souvent est vicieux), qui doit diriger dans la résolution.

EXEMPLE I.

30 hommes ont fait un certain ouvrage en 25 jours : combien faudrait-il d'hommes pour faire le même ouvrage en 10 jours?

On voit qu'il faut, dans ce second cas, d'autant plus d'hommes que le nombre de jours est moindre; ainsi le nombre d'hommes cherché doit contenir le nombre 30 d'hommes, autant que le nombre 25 de jours, relatif à ceux-ci, contient le nombre 10 de jours, relatif à ceux-là. Il ne s'agit donc que de trouver le quatrième terme d'une proportion qui commencerait par ces trois-ci :

$$10j : 25j :: 30ho :$$

c'est-à-dire de multiplier 30 par 25, et de diviser le produit 750 par 10; ce qui donne 75 ou 75 hommes.

EXEMPLE II.

Un équipage n'a plus que pour 15 jours de vivres; mais les circonstances doivent encore lui faire tenir la mer pendant 20 jours; on demande à combien on doit réduire la totalité des rations par jour.

Représentons par l'unité la totalité des vivres que l'on consomme par jour; on voit que ce à quoi on doit se restreindre doit être d'autant moindre que cette unité, que le nombre 20 des jours pendant lesquels cette économie doit durer, est plus

grand que le nombre 15 de jours; que par conséquent, de même que 20 jours contiennent 15 jours, de même la totalité des vivres que l'on aurait consommés pendant chacun de ces quinze jours, doit contenir celle des vivres que l'on consommera pendant chacun des 20 jours; il faut donc chercher le quatrième terme d'une proportion qui commencerait par les trois suivans :

$$20j \;:\; 15j \;::\; 1 \;:$$

Ce quatrième terme sera $\frac{15}{20}$ ou $\frac{3}{4}$; il faut donc se réduire aux $\frac{3}{4}$ de ce qu'on aurait consommé par jour

## *De la Règle de* Trois *composee.*

196. Dans les deux règles de Trois que nous venons d'exposer, la quantité cherchée et la quantité de même espèce qui entre dans l'énoncé de la question, ont entre elles un rapport simple et déterminé par celui des deux autres quantités qui entrent pareillement dans l'énoncé de la question.

Dans la règle de Trois composée, le rapport de la quantité cherchée à la quantité de même espèce qui entre dans l'énoncé de la question, n'est pas donné par le rapport simple de deux autres quantités seulement, mais par plusieurs rapports simples qu'il s'agit de composer (187) d'après l'examen de la question.

Quand une fois ces rapports ont été composés, la règle est réduite à une règle de Trois simple; les exemples suivans vont éclaircir ce que nous disons.

### EXEMPLE I.

30 hommes ont fait 132 toises d'ouvrage en 18 jours; combien 54 hommes en feront-ils en 28 jours?

On voit que l'ouvrage dépend ici non-seulement du nombre des hommes, mais encore du nombre des jours.

Pour avoir égard à l'un et à l'autre, il faut considérer que 30 hommes travaillant pendant 18 jours ne font qu'autant que 18 fois 30 hommes, c'est-à-dire, que 540 hommes qui travailleraient pendant un jour.

Pareillement, 54 hommes travaillant pendant 28 jours ne font qu'autant que feraient 28 fois 54 hommes, ou 1512 hommes travaillant pendant un jour.

La question est donc changée en celle-ci : 540 hommes ont fait 132 toises d'ouvrage, combien 1512 hommes en feraient-ils dans le même temps? c'est-à-dire qu'il faut chercher le quatrième terme d'une proportion qui commence par ces trois-ci :

$$540^h : 1512^h :: 132$$

Multipliant 1512 par 132, et divisant le produit par 540, on trouvera pour réponse à la question $369^T\ 3^P\ 7^p\ 2^l\ \frac{2}{5}$.

EXEMPLE II.

Un homme, marchant 7 heures par jour, a mis 30 jours à faire 230 lieues; s'il marchait 10 heures par jour, combien emploierait-il de jours pour faire 600 lieues, allant toujours avec la même vitesse?

S'il marchait pendant le même nombre d'heures par jour, dans chaque cas, on voit qu'il emploierait d'autant plus de jours qu'il a plus de chemin à faire; mais comme il marche pendant un plus grand nombre d'heures chaque jour, dans le second cas, il lui faudra moins de temps par cette raison; ainsi l'opération tient en partie à la règle de Trois directe et à la règle de Trois inverse.

On la réduira à une règle de Trois simple, en considérant que marcher pendant 30 jours, et employer 7 heures chaque jour, c'est marcher pendant 30 fois 7 heures, ou 210 heures; ainsi on peut changer la question en cette autre : il fallu 210 heures pour faire 230 lieues; combien en faudra-t-il pour faire 600 lieues? Quand on aura trouvé le nombre d'heures qui satisfait à cette question, en le divisant par 10, on aura le nombre de jours demandé, puisque l'homme dont il s'agit emploie 10 heures par jour.

Ainsi il faut chercher le quatrième terme de la proportion, dont les 3 premiers sont :

$$230^l : 600^l :: 210^h :$$

On trouvera que ce quatrième terme est 547 heures et $\frac{19}{23}$, lesquelles divisées par 10, nombre des heures que cet homme emploie chaque jour, donnent 54 jours et $\frac{180}{230}$ ou $54^j\,\frac{18}{23}$.

## *De la Règle de Société.*

197. La règle de Société est ainsi nommée, parce qu'elle sert à partager entre plusieurs associés le bénéfice ou la perte résultant de leur société.

Son but est de partager un nombre proposé en parties qui aient entre elles des rapports donnés.

La règle que l'on donne pour cet effet est fondée sur ce que nous avons établi (186) : nous allons la déduire de ce principe, dans l'exemple suivant :

### EXEMPLE I.

Supposons, par exemple, qu'il s'agisse de partager 120 en trois parties qui aient entre elles les mêmes rapports que les nombre 4, 3, 2; l'énoncé de la question fournit ces deux proportions :

$$4 : 3 :: \text{la } 1^{re}.\text{ partie : la } 2^{e}.,$$
$$4 : 2 :: \text{la } 1^{re}.\text{ partie : la } 3^{e}.;$$

ou (182) ces deux autres :

$$4 : \text{la } 1^{re}.\text{ partie} :: 3 : \text{la } 2^{e}.,$$
$$4 : \text{la } 1^{re}.\text{ partie} :: 2 : \text{la } 3^{e}.$$

De sorte qu'on a ces trois rapports égaux

$$4 : \text{la } 1^{re}.\text{ partie} :: 3 : \text{la } 2^{e}. :: 2 : \text{la } 3^{e}.$$

Or on a vu (186) que la somme des antécédens de plusieurs rapports égaux est à la somme des conséquens, comme un antécédent est à son conséquent : on peut donc dire ici que la somme 9 des trois parties proportionnelles à celles que l'on cherche est à la somme 120 de celles-ci, comme l'une quelconque des trois parties proportionnelles est à la partie de 120 qui lui répond.

La règle se réduit donc, 1°. à faire une totalité des parties proportionnelles données ; 2°. à faire autant de règles de Trois qu'il y a de parties à trouver, et dont chacune aura, pour premier terme, la somme des parties proportionnelles données ; pour second terme, le nombre proposé à diviser ; et pour troisième terme, l'une des parties proportionnelles données : ainsi, dans la question que nous avons prise pour exemple, on aurait ces trois règles de Trois à faire,

9 : 120 :: 4 :
9 : 120 :: 3 :
9 : 120 :: 2 :

dont on trouvera (179) que les quatrièmes termes sont $53\frac{1}{3}$, 40, $26\frac{2}{3}$ qui ont entre eux les rapports demandés, et qui composent en effet le nombre 120.

Mais il est aisé de remarquer qu'il n'est pas absolument nécessaire de faire autant de règles de Trois qu'il y a de parties à trouver ; on peut se dispenser de la dernière, en retranchant du nombre proposé la somme des autres parties, quand on les a trouvées.

EXEMPLE II.

Trois personnes ont à partager le bénéfice de la prise d'un vaisseau. La première a fait un fonds de 20000#; la seconde, de 60000# ; la troisième, de 120000# ; on demande combien il revient à chacun sur la prise estimée 800000#, tous frais faits.

On voit qu'il s'agit de partager 800000# en parties qui aient entre elles les mêmes rapports que 20000#, 60000#, 120000#, ou (170) que 2, 6, 12, puisque chacun doit avoir proportionnellement à sa mise ; il faut donc ajouter les trois parties proportionnelles 2, 6, 12, et faire les trois proportions suivantes, ou seulement deux.

20 : 800000 :: 2# : la 1re. partie
20 : 800000 :: 6# : la 2e. partie,
20 : 800000 :: 12# : la 3e. partie.

Ces trois parties seront 80000#, 240000#, 480000#

La question pourrait être plus compliquée, et cependant être ramenée aux mêmes principes, comme dans l'exemple qui suit.

EXEMPLE III.

Trois personnes ont mis en société, la première, 3000#, qui ont été pendant six mois dans la société; la seconde 4000#, qui y ont été pendant cinq mois; et la troisième 8000#, qui y ont resté pendant neuf mois; combien chacun doit-il avoir sur le bénéfice, qui monte à 12050# ?

On réduira toutes les mises à un même temps, en cette manière :

La mise de 3000# a dû produire pendant six mois autant que 6 fois 3000#, ou 18000# pendant un mois.

La mise de 4000# a dû produire pendant cinq mois autant que cinq fois 4000# ou 20000# pendant un mois.

Enfin la mise de 8000# a dû produire en neuf mois autant que 9 fois 8000# ou 72000# pendant un mois.

Ainsi la question est réduite à cette autre : les mises de trois associés sont 18000#, 20000#, 72000#, combien revient-il à chacun sur le gain de 12050 ?

En procédant comme dans l'exemple ci-dessus, on trouvera $1971^{\#}\ 16^{s}\ 4^{d}\ \frac{4}{11}$, $2190^{\#}\ 18^{s}\ 2^{d}\ \frac{2}{11}$, $7887^{\#}\ 5^{s}\ 5^{d}\ \frac{5}{11}$.

## *Remarque au sujet de la Règle précédente.*

198. Il n'est pas inutile d'examiner un cas qui peut embarrasser les commençans. Si l'on proposait cette question : partager 650 en trois parties, dont la 1re. soit à la 2e. :: 5 : 4, et dont la 1re. soit à la 3e. :: 7 : 3.

On ne peut pas appliquer ici la règle précédente sans une préparation qui consiste à rendre la même, dans chaque rapport donné, la partie proportionnelle de l'une des trois parts cherchées; par exemple, celle de la première. Cela s'exécute aisément, en multipliant les deux termes de chaque rapport

par le premier terme de l'autre rapport ; ainsi les deux rapports 5 : 4 et 7 : 3, seront ramenés à avoir un même premier terme en multipliant les deux termes du premier par 7, et les deux termes du second par 5, ce qui n'en change pas la valeur (170) et donne les rapports 35 : 28 et 35 : 15 ; en sorte que la question se réduit à partager 650 en trois parties qui soient entre elles comme les nombres 35, 28 et 15 ; ce qui se fera aisément par la règle précédente.

Si l'on demandait de partager un nombre en quatre parties, dont la première fût à la seconde :: 5 : 4, la première à la troisième :: 9 : 5, et la première à la quatrième :: 7 : 3, on réduirait ces rapports à avoir un même premier terme, en multipliant les deux termes de chacun par le produit des premiers termes des deux autres ; ainsi, dans cet exemple, on changerait ces trois rapports en ces trois autres, 315 : 252, 315 : 175, 315 : 135 ; en sorte que la question se réduit à partager le nombre proposé en quatre parties qui soient entre elles comme les nombres 315, 252, 175 et 135.

## *De quelques autres Règles dépendantes des Proportions.*

199. Quoique les règles suivantes soient d'un usage moins fréquent que les précédentes, nous ne pouvons cependant les omettre absolument : outre qu'elles ne sont pas sans utilité par elles-mêmes, elles sont d'ailleurs propres a faire sentir l'étendue des usages des proportions.

200. La première dont nous parlerons est la Règle *d'une fausse position*. On l'applique souvent à résoudre des questions qui appartiennent à la règle de Société, dont elle diffère en ce qu'au lieu de prendre les parties proportionnelles telles qu'elles sont données par l'énoncé de la question, elle en prend une arbitrairement, et y subordonne les autres conformément à la question, ce qui rend le calcul un peu plus facile.

EXEMPLE I.

Partager 640$^{\#}$ entre trois personnes, dont la seconde ait le quadruple de la première, et la troisième deux fois et $\frac{1}{3}$ autant que les deux autres ensemble.

Je prends arbitrairement, pour représenter la première partie, le nombre 3, dont je puis prendre commodément le $\frac{1}{3}$

La première partie étant 3, la seconde sera 12, et la troisième sera 35.

La question est réduite à partager 640 en trois parties, qui soient entre elles comme les trois nombres 3, 12 et 35, ce qui se fera comme il a été dit (197).

La règle d'une fausse position sert aussi à résoudre des questions qui sont, en quelque façon, l'inverse de celles de la règle de Société, puisqu'il s'agit de revenir de la somme de quelques parties d'un nombre à ce nombre même, comme dans l'exemple qui suit.

EXEMPLE II.

On demande de trouver un nombre dont le $\frac{1}{3}$, le $\frac{1}{5}$ et les $\frac{3}{7}$, fassent 808. Je prends un nombre dont je puisse avoir commodément le $\frac{1}{3}$, le $\frac{1}{5}$ et le $\frac{1}{7}$ (ce qui est facile en multipliant les trois dénominateurs). Ce nombre sera 105; j'en prends le $\frac{1}{3}$ qui est 35, le $\frac{1}{5}$ qui est 21, et les $\frac{3}{7}$ qui sont 45; j'ajoute ces trois nombres, et j'ai 101, qui est composé des parties de 105, de la même manière que 808 l'est de celles du nombre en question : donc le nombre en question doit avoir même rapport à 808, que 105 à 101; il doit donc être le quatrième terme d'une proportion qui commencerait par ces trois-ci :

$$101 : 105 :: 808 :$$

Ce quatrième terme est 840, dont 808 renferme en effet le $\frac{1}{3}$, le $\frac{1}{5}$ et les $\frac{3}{7}$.

201. La seconde règle dont nous parlerons est celle des deux fausses positions.

Elle sert dans les questions où il s'agit de partager, non pas le nombre même proposé, mais seulement une partie de ce nombre, en parties proportionnelles à des nombres donnés; l'exemple suivant fera connaître la règle et son usage.

EXEMPLE.

Il s'agit de partager 6954$^{\#}$ entre trois personnes, de manière que la seconde ait autant que la première, et 54$^{\#}$ de plus, et que la troisième ait autant que les deux autres ensemble, et 78$^{\#}$ de plus.

Sans les 54$^{\#}$ et les 78$^{\#}$, il est clair qu'il ne s'agirait que de partager le nombre proposé en parties proportionnelles aux nombres 1, 1 et 2; mais puisqu'il faut prélever sur la somme, 54$^{\#}$ pour la seconde personne et 54$^{\#}$ plus 78$^{\#}$ pour la troisième, il est évident qu'il n'y a qu'une partie du nombre proposé qu'on doit partager en parties proportionnelles à 1, 1 et 2 : comme cette partie, qui est facile à trouver dans l'exemple actuel, peut être plus difficile à apercevoir dans d'autres circonstances, on suit la méthode que voici :

Supposons, pour la première part, tel nombre que nous voudrons, par exemple, 1$^{\#}$, la seconde part sera 1$^{\#}$ plus 54$^{\#}$, c'est-à-dire 55$^{\#}$; et la troisième sera 1$^{\#}$ plus 55$^{\#}$ plus 78$^{\#}$; c'est-à-dire 134$^{\#}$ : la totalité de ces parts est 190$^{\#}$.

S'il n'eût été question que de partager en parties proportionnelles à 1, 1 et 2, la première part étant toujours supposée 1$^{\#}$, la seconde serait 1$^{\#}$, la troisième

serait 2#, et la totalité serait 4#, dont la différence avec 190#, c'est-à-dire 186# est ce qu'il faut prélever sur la somme proposée 6954#, ce qui la réduit à 6768# ; il reste donc à partager 6768# en parties proportionnelles à 1, 1 et 2, selon les règles ci-dessus ; et ayant trouvé que la première partie est 1692#, on en conclut que les deux autres parts demandées sont 1746# et 3516# ; en effet, la totalité de ces trois parts est 6954#.

202. On trouve encore chez les Arithméticiens plusieurs autres règles qui ne sont autre chose que l'application des règles de Trois, à différentes questions, telles que les questions d'*Intérêt*, de *Change*, d'*Escompte*, etc.

Nous n'entrerons pas dans ces détails qui ne peuvent avoir de difficulté pour ceux qui, ayant bien saisi les principes établis ci-dessus, auront en même temps l'état de la question présent à l'esprit. Nous nous bornerons à un seul exemple :

Une personne a fait à un marchand un billet de 2854#, payable dans un an ; elle vient acquitter son billet au bout de 7 mois, et le marchand consent de diminuer pour les 5 mois restans les intérêts qui ont été compris dans le billet, à raison de 6 pour cent pour 12 mois ; on demande pour quelle somme le marchand doit rendre le billet.

Puisque 12 mois produisent 6 pour 100 d'intérêt, 7 mois ont dû produire un intérêt qu'on trouvera en cherchant le quatrième terme d'une proportion, dont les trois premiers sont :

$$12 : 7 :: 6 :$$

Ce quatrième terme sera $\frac{42}{12}$ ou $3\frac{1}{2}$. Or, quand l'intérêt a été pris à 6 pour 100, on a compté pour 106# ce qui ne valait que 100#, donc quand l'intérêt est à $3\frac{1}{2}$, on compte pour $103\frac{1}{2}$, ce qui ne vaut que 100 ; il faut donc actuellement que ce qui devait être payé 106 ne soit plus payé que $103\frac{1}{2}$. Ainsi la somme cherchée doit être le quatrième terme d'une proportion dont les trois premiers sont

$$106 : 103\frac{1}{2} :: 2854 :$$

Ce quatrième terme est 2786 13$^{s}$ 9$^{d}$ $\frac{30}{106}$ ou $\frac{15}{53}$, c'est la somme que le débiteur doit donner pour retirer son billet.

## *De la Règle d'Alliage.*

203. Les questions qui appartiennent à cette règle sont de deux sortes.

Dans l'une, il s'agit de trouver la valeur moyenne de plusieurs sortes de choses, dont le nombre et la valeur particulière de chacune sont connus.

Dans la seconde, il s'agit de connaître les quantités de chaque espèce de choses qui entrent dans un ou plusieurs mélanges; lorsqu'on connaît le prix ou la valeur de chaque espèce, et le prix ou la valeur totale de chaque mélange.

Nous réservons les questions de la seconde sorte pour l'Algèbre

Quant aux questions de la première, voici la règle pour les résoudre.

Multipliez la valeur de chaque espèce de choses, par le nombre des choses de cette espèce, ajoutez tous les produits et divisez la somme par le nombre total des choses de toutes les espèces.

EXEMPLE.

On emploie 200 ouvriers, dont 50 sont payés à raison de 40 sous par jour; 70 à raison de 30 sous; 50 à raison de 25 sous, et 30 à raison de 20 sous : à combien chaque ouvrier revient-il par jour, l'un portant l'autre?

50 ouvriers, à 40 sous par jour, font une dépense

| | |
|---|---|
| de. . . . . | $2000^f$ |
| 70 à $30^s$. . . . . | 2100 |
| 50 à 25. . . . . | 1250 |
| 30 à 20. . . . . | 600 |
| | $5950^f$ |

La dépense de 200 ouvriers est donc de $5950^f$ par jour, et par conséquent (en divisant par 200), chaque ouvrier revient, l'un portant l'autre, à $29^f\ 9^s$ par jour. Les autres questions de cette espèce sont si faciles à résoudre d'après cet exemple, que nous croyons à propos de ne pas insister sur cette matière.

## *Des Progressions arithmétiques.*

204. La progression arithmétique est une suite de termes dont chacun surpasse celui qui le précède, ou en est surpassé, de la même quantité.

Par exemple cette suite....

$$\div 1.4.7.10.13.16.19.22.25. \text{ etc.}$$

est une progression arithmétique, parce que chaque terme y surpasse celui qui le précède, d'une même quantité qui est ici 3.

Les deux points séparés par une barre qu'on voit ici à la tête de la progression, sont destinés à marquer qu'en énonçant cette progression, on doit répéter chaque terme, excepté le premier et le dernier, en cette manière, *1 est à 4, comme 4 est à 7, comme 7 est à 10*, etc.

La progression est dite *croissante* ou *décroissante*, selon que les termes vont en augmentant ou en diminuant; mais comme les propriétés de l'une et de l'autre sont les mêmes, en changeant seulement les mots *plus* en *moins*, *ajouter* en *soustraire*, nous la considérerons ici uniquement comme croissante.

205. On voit donc, d'après la définition de la progression arithmétique, qu'avec le premier terme et la différence commune, ou la raison de la progression, on peut faire tous les autres termes, en ajoutant consécutivement cette raison; et que, par conséquent,

Le second terme est composé du premier, plus la raison.

Le troisième est composé du second, plus la raison; et par conséquent du premier, plus deux fois la raison.

Le quatrième est composé du troisième, plus la raison; et par conséquent du premier, plus trois fois la raison; et ainsi de suite.

206. De sorte qu'on peut dire, en général, qu'*un terme quelconque d'une progression arithmétique est composé du premier, plus autant de fois la raison qu'il y a de termes avant lui*.

207. Donc si le premier terme était zéro, tout autre terme de la progression serait égal à autant de fois la raison qu'il y aurait de termes avant lui.

208. Ce principe peut avoir les deux applications suivantes :

1°. Il sert à trouver un terme quelconque d'une progression sans qu'on soit obligé de calculer ceux qui le précèdent. Qu'on demande, par exemple, quel serait le 100e. terme de cette progression :

$$\div 4.9.14.19.24. \text{ etc.}$$

Puisque le terme cherché doit être le centième, il y a donc 99 termes avant lui; il est donc composé du premier terme 4 et de 99 fois la raison 5, il est donc 4 plus 495, c'est-à-dire 499.

209. 2°. Ce même principe sert à lier deux nombres quelconques par une suite de tant d'autres nombres qu'on voudra, de manière que le tout forme une progression arithmétique; ce qu'on appelle *insérer* entre deux nombres donnés plusieurs *moyens proportionnels arithmétiques*, ou simplement plusieurs *moyens arithmétiques*.

Par exemple, on peut lier 1 et 7 par 5 nombres qui fassent une progression arithmétique avec 1 et 7; ces nombres sont 2, 3, 4, 5, 6; mais comme il n'est pas toujours aisé de voir, du premier coup d'œil, quels doivent être ces nombres, voici comment on peut les trouver à l'aide du principe que nous venons de poser.

Il ne s'agit que de trouver la raison qui doit régner dans cette progression.

Or le plus grand des deux nombres proposés devant être le dernier terme de la progression, doit être composé du premier, c'est-à-dire du plus petit de ces deux nombres, plus autant de fois la raison qu'il y a de termes avant lui; donc si du plus grand de ces deux nombres on retranche le plus petit, le reste sera composé d'autant de fois la raison qu'il doit y avoir de termes avant le plus grand, c'est-à-dire qu'il est le produit de la multiplication de cette raison par le nombre des termes qui précèdent le plus grand : donc (74) si l'on divise ce reste par le nombre des termes qui doivent précéder le plus grand, on aura cette raison.

Or le nombre des termes qui doivent précéder le plus grand est plus grand d'une unité que le nombre des moyens qu'on veut insérer entre les deux : donc, *pour insérer entre deux nombres donnés autant de moyens arithmétiques qu'on voudra, il faut retrancher le plus petit de ces deux nombres, du plus grand, et diviser le reste par le nombre des moyens augmenté d'une unité.*

Le quotient sera la différence ou la raison qui doit régner dans la progression.

par exemple, si entre 4 et 11 on demande d'insérer 8 moyens arithmétiques, je retranche 4 de 11, il me reste 7 que je divise par 9, nombre des moyens augmenté de l'unité; le quotient $\frac{7}{9}$ est la différence qui doit régner dans la progression, qui sera par conséquent :

$$\div\ 4.4\tfrac{7}{9}.5\tfrac{5}{9}.6\tfrac{3}{9}.7\tfrac{1}{9}.7\tfrac{8}{9}.8\tfrac{6}{9}.9\tfrac{4}{9}.10\tfrac{2}{9}.11.$$

Pareillement, si l'on demandait neuf moyens arithmétiques entre 0 et 1, retranchant 0 de 1, il reste 1 qu'il faudrait diviser par 10, nombre des moyens augmenté de l'unité, ce qui donne $\frac{1}{10}$ ou 0, 1 pour la raison. Et par conséquent la progression sera

$$\div 0.0, 1.0, 2.0, 3.0, 4.0, 5.0, 6.0, 7.0, 8.0, 9.\ 1.$$

210. On voit par là qu'entre deux nombres, si voisins qu'ils puissent être l'un de l'autre, on peut toujours insérer tant de moyens arithmétiques qu'on voudra.

Nous n'en dirons pas davantage sur les progressions arithmétiques que nous ne traitons ici que par rapport aux logarithmes dont nous parlerons plus bas; nous aurons occasion d'y revenir ailleurs.

## *Des Progressions géométriques.*

211 La progression géométrique est une suite de termes dont chacun contient celui qui le précède, ou est contenu en lui, le même nombre de fois. Par exemple, cette suite :

$$\div\ 3 : 6 : 12 : 24 : 48 : 96 : 192$$

est une progression géométrique, parce que chaque terme contient celui qui le précède, le même nombre de fois qui y est ici 2.

Ce nombre de fois est ce qu'on appelle *la raison* de la progression.

Les quatre points qui précèdent la progression ont la même signification que les deux points qui précèdent la progression arithmétique (204). Mais on en met quatre pour avertir que la progression est géométrique.

La progression est dite *croissante* ou *décroissante*, selon que les termes vont en augmentant ou en diminuant.

Nous considérerons toujours la progression géométrique comme croissante, parce que les propriétés sont les mêmes dans l'une et dans l'autre, en changeant le mot de *multiplier* en celui de *diviser*, et celui de *contenir* en celui de *être contenu*.

Puisque le second terme contient le premier autant de fois qu'il y a d'unités dans la raison, il est donc composé du premier multiplié par la raison.

Puisque le troisième terme contient le premier autant de fois qu'il y a d'unités dans la raison, il est donc composé du second multiplié par la raison, et par conséquent du premier multiplié par la raison, et encore multiplié par la raison; c'est-à-dire, du premier multiplié par le carré, ou la seconde puissance de la raison.

Puisque le quatrième terme contient le troisième autant de fois qu'il y a d'unités dans la raison, il est donc composé du troisième multiplié par la raison, et par conséquent du premier multiplié par le carré de la raison, et encore multiplié par la raison; c'est-à-dire, multiplié par le cube, ou la troisième puissance de la raison.

Par exemple, dans la *progression ci-dessus*, 6 est composé du premier terme 3 multiplié par la raison 2; 12 est composé du premier terme 3 multiplié par le carré 4 de la raison 2; 24 est composé du premier terme 3 multiplié par le cube de la raison 2.

212. En continuant le même raisonnement, on voit qu'*un terme quelconque de la progression géométrique est composé du premier multiplié par la raison élevée à une puissance marquée par le nombre des termes qui précèdent ce terme quelconque.*

Donc, si le premier terme de la progression est l'unité, chaque autre terme sera formé de la raison même élevée à une puissance marquée par le nombre des termes qui le précèdent, car la multiplication par le premier terme qui est l'unité, n'augmente point le produit.

Pour élever un nombre à une puissance proposée, à la septième, par exemple, il faut, suivant l'idée que nous avons donnée des puissances, multiplier ce nombre par lui-même six fois consécutives. Ainsi, pour élever 2 à la septième puissance, je dirai 2 fois 2 font 4, 2 fois 4 font 8, 2 fois 8 font 16, 2 fois 16 font 32, 2 fois 32 font 64, 2 fois 64 font 128, ce qui serait la septième puissance de 2 ; mais on peut abréger l'opération en diverses manières ; par exemple, je puis d'abord carrer 2, ce qui fait 4 ; cuber 4 ce qui donne 64, et multiplier 64 par 2, ce qui fait 128 ; ou bien je puis cuber 2, ce qui donne 8 ; carrer 8, ce qui donne 64, et multiplier 64 par 2, ce qui donne 128 ; en un mot, peu importe de quelle façon on s'y prenne, pourvu que 2 se trouve 7 fois facteur dans le produit.

213. Le principe que nous venons de poser (212) sur la formation d'un terme quelconque d'une progression, et la remarque que nous venons de faire, peuvent servir à calculer tel terme qu'on voudra de la progression, sans être obligé de calculer ceux qui le précèdent. Si l'on demande, par exemple, quel serait le douzième terme de la progression

$$\div\div 3 : 6 : 12 : 24 : \text{etc.}$$

Comme je sais (212) que ce douzième terme doit être composé du premier, multiplié par la raison élevée à une puissance marquée par le nombre des termes qui précèdent ce douzième, je vois que, pour le former, il faut multiplier 3 par la onzième puissance de la raison 2. Pour former cette onzième puissance, je cube 2, ce qui me donne 8 ; je cube 8, ce qui me donne 512 pour la neuvième puissance, et enfin je multiplie 512, neuvième puissance de la raison, par 4, seconde puissance, et j'ai 2048 pour la onzième puissance de 2 ; je multiplie donc 2048 par 3, et j'ai 6144 pour le douzième terme de la progression.

214. Une autre application qu'on peut faire du même principe, c'est pour trouver tant de moyens proportionnels géométriques qu'on voudra entre deux nombres donnés. Si l'on demandait trois moyens géométriques entre 4 et 64 ; avec un peu

d'attention, on voit que ces trois moyens géométriques sont 8, 16, 32. En effet, $4 : 8 :: 16 :: 32 : 64$ forment une progression géométrique ; mais si l'on proposait d'autre nombre que 4 et 64, ou que l'on demandât tout autre nombre de moyens géométriques, on ne les trouverait pas aussi facilement.

Or, voici comment on peut les trouver en vertu du principe dont il s'agit.

La question se réduit à trouver la raison qui doit régner dans la progression, parce que, quand elle sera trouvée, on formera aisément les termes par des multiplications successives par cette raison.

Qu'il soit question, par exemple, de trouver neuf moyens géométriques entre 2 et 2048.

2048 sera donc le dernier terme d'une progression géométrique qui commencerait par 2, et qui doit avoir neuf termes entre le premier et le dernier, 2048 est donc composé du premier terme 2 multiplié par la raison élevée à une puissance marquée par le nombre des termes qui doivent précéder 2048 ; donc (69) si l'on divise 2048 par le premier terme, le quotient sera la raison élevée à une puissance marquée par le nombre des termes qui doivent précéder 2048 ; donc en cherchant quelle est la racine de cette puissance, on aura la raison : or cette puissance doit être la dixième, puisque devant y avoir neuf termes entre 2 et 2048, il y en a nécessairement dix avant 2048 ; donc il faut extraire la racine dixième du quotient qu'aura donné le plus grand nombre 2048 divisé par le plus petit 2.

215. comme on peut faire le même raisonnement dans tous les cas, concluons donc en général que, *pour insérer entre deux nombres donnés tant de moyens géométriques qu'on voudra, il faut diviser le plus grand de ces deux nombres par le plus petit, ce qui donnera un quotient ; on extraira de ce quotient une racine du degré marqué par le nombre des moyens augmenté de l'unité.*

Ainsi, pour revenir à notre exemple, je divise 2048 par 2,

ce qui me donne 1024, dont je cherche la racine dixième (*), elle est 2; donc la raison est 2. Ainsi, pour former les moyens en question, je multiplie le premier terme 2 continuellement par la raison 2; et après avoir formé neuf moyens, je retombe sur 2048, comme on le voit ici :

$$\div 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128 : 256 : 512 : 1024 : 2048.$$

Pareillement, si l'on demandait de trouver quatre moyens géométriques entre 6 et 48, je diviserais 48 par 6, et du quotient 8 je tirerais la racine cinquième; comme 8 n'a pas de racine cinquième exacte, on ne peut jamais assigner exactement en nombres quatre moyens géométriques entre 6 et 48; mais on peut approcher de cette racine si près qu'on le voudra, par une méthode analogue à celles de la racine carrée et de la racine cubique, et que nous ferons connaître dans l'Algèbre. En attendant, il suffit qu'on conçoive qu'il est possible de trouver un nombre qui, multiplié quatre fois de suite par lui-même, approche de plus en plus de reproduire 8; et qu'il en est de même pour tout autre nombre et pour tout autre racine; de là nous conclurons qu'entre deux nombres quelconques, on peut toujours trouver tant de moyens géométriques qu'on voudra, soit exactement, soit par une approximation poussée à tel degré qu'on voudra, et c'est tout ce qu'il nous faut pour passer aux logarithmes.

## *Des Logarithmes.*

216. Les *Logarithmes* sont des nombres en progression arith-

(*) Nous n'avons pas donné de méthode pour extraire la racine dixième d'un nombre, mais il en est de celle-ci comme de la racine carrée et de la racine cubique : la racine carrée ne doit avoir qu'un chiffre, lorsque le nombre proposé n'en a pas plus de 2; la racine cubique ne doit avoir qu'un chiffre, lorsque le nombre proposé n'en a pas plus de trois; pareillement la racine dixième n'aura jamais qu'un chiffre, tant que le nombre proposé n'en aura pas plus de dix : il en est de même pour les autres racines; la trentième, par exemple, n'aura qu'un chiffre, si le nombre proposé n'a pas plus de trente chiffres; cela se démontre comme on l'a fait pour la racine carrée et la racine cubique.

métique, qui répondent, terme pour terme, à une pareille suite de nombres en progression géométrique. Si l'on a, par exemple, la progression géométrique et la progression arithmétique suivantes :

$$\div 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128 : 256, \text{ etc.}$$
$$\div 3 . 5 . 7 . 9 . 11 . 13 . 15 . 17, \text{ etc.}$$

chaque terme de la suite inférieure est dit le logarithme du terme qui est à pareille place dans la suite supérieure.

217. Un même nombre peut donc avoir une infinité de logarithmes différens, puisqu'à la même progression géométrique on peut faire correspondre une infinité de progressions arithmétiques différentes. Comme nous ne considérons ici les logarithmes que par rapport à l'usage qu'on peut en faire dans les calculs numériques, nous ne nous arrêterons pas à considérer les différentes progressions géométriques et arithmétiques qu'on pourrait comparer entre elles ; nous passons tout de suite à celles qu'on a considérées dans la formation des Tables de Logarithmes.

218. On a choisi pour progression géométrique la progression décuple, et pour progression arithmétique, la suite naturelle des nombres, c'est-à-dire qu'on a choisi les deux progressions suivantes :

$$\div 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : 100000 : 1000000, \text{ etc.}$$
$$\div 0 . 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6, \text{ etc.}$$

219. Ainsi, il sera toujours aisé de reconnaître quel est le logarithme de l'unité suivie de tant de zéro qu'on voudra ; il y a toujours autant d'unités qu'il y a de zéro à la suite de cette unité.

Nous n'enseignerons pas ici la méthode qu'on a suivie pour trouver les logarithmes des termes intermédiaires de la progression décuple ; elle dépend de principes que nous ne pouvons exposer ici ; mais nous allons expliquer cette formation par une voie qui, à la vérité, ne serait pas la plus expéditive pour calculer ces logarithmes, mais qui suffit, tant pour concevoir cette

formation que pour rendre raison des usages auxquels on emploie ces nombres artificiels.

220. D'après la définition que nous avons donnée des logarithmes, on voit que pour avoir le logarithme d'un nombre quelconque, de 3, par exemple; il faut que ce nombre puisse faire partie de la progression géométrique fondamentale. Or, quoiqu'on ne voie pas que trois puisse faire partie de la progression géométrique ∴ 1 : 10 : 100, etc.; cependant on conçoit que si, entre 1 et 10, on insérait un très-grand nombre de moyens géométriques (214), comme on monterait alors de 1 à 10 par des degrés d'autant plus serrés que le nombre de ces moyens serait plus grand, il arriverait de deux choses l'une : ou que quelqu'un de ces moyens se trouverait être précisément le nombre 3 : ou que du moins il s'en trouverait deux consécutifs, entre lesquels le nombre 3 serait compris, et dont chacun différerait d'autant moins de 3, que le nombre des moyens insérés serait plus grand.

Cela posé, si l'on insérait pareillement entre 0 et 1 autant de moyens arithmétiques qu'on a inséré de moyens géométriques entre 1 et 10, chaque terme de la progression géométrique ayant pour logarithme le terme correspondant de la progression arithmétique, on prendrait dans celle-ci pour logarithme de 3 le nombre qui s'y trouverait à pareille place que 3 se trouve dans la progression géométrique; ou si 3 n'était pas exactement quelqu'un des termes de celle-ci, on prendrait, dans la progression arithmétique, le terme qui répondrait à celui de la progression géométrique qui approche le plus du nombre 3.

C'est ainsi qu'on pourrait s'y prendre en effet, si l'on n'avait pas de moyens plus expéditifs. Quoi qu'il en soit, c'est à cela que revient le calcul des logarithmes.

221. Il faut donc se représenter qu'ayant inséré 10000000 moyens géométriques entre 1 et 10, pareil nombre entre 10 et 100, pareil nombre entre 100 et 1000, etc., on a inséré aussi pareil nombre de moyens arithmétiques entre 0 et 1, pareil

nombre entre 1 et 2, pareil nombre entre 2 et 3; qu'ayant rangé tous les premiers sur une même ligne, et tous les seconds au-dessous, on a cherché dans la première le nombre le plus approchant de 2, et on a pris dans la suite inférieure le nombre correspondant; qu'on a cherché de même dans la première le nombre le plus approchant de 3, et qu'on a pris dans la suite inférieure le nombre correspondant; qu'on en a fait de même successivement pour les nombres 4, 5, 6, etc.; qu'enfin, ayant transporté dans une même colonne, comme on le voit dans la table ci-jointe, les nombres 1, 2, 3, 4, 5, etc., on a écrit dans une colonne à côté les termes de la progression arithmétique, qu'on a trouvés correspondant à ceux-là, ou du moins à ceux qui en approchaient le plus; alors on aura l'idée de la formation des logarithmes et de leur disposition dans les tables ordinaires.

*Table des Logarithmes des Nombres naturels depuis* 1 *jusqu'à* 200.

| *Nomb.* | *Logar.* | *Nomb.* | *Logar.* | *Nomb.* | *Logar.* | *Nomb.* | *Logar.* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | Inf. nég. | 51 | 1,707570 | 102 | 2,008600 | 153 | 2,184691 |
| 1 | 0,000000 | 52 | 1,716003 | 103 | 2,012837 | 154 | 2,187521 |
| 2 | 0,301030 | 53 | 1,724276 | 104 | 2,017033 | 155 | 2,190332 |
| 3 | 0,477121 | 54 | 1,732394 | 105 | 2,021189 | 156 | 2,193125 |
| 4 | 0,602060 | 55 | 1,740363 | 106 | 2,025306 | 157 | 2,195900 |
| 5 | 0,698970 | 56 | 1,748188 | 107 | 2,029384 | 158 | 2,198657 |
| 6 | 0,778151 | 57 | 1,755875 | 108 | 2,033424 | 159 | 2,201397 |
| 7 | 0,845098 | 58 | 1,763428 | 109 | 2,037427 | 160 | 2,204120 |
| 8 | 0,903090 | 59 | 1,770852 | 110 | 2,041393 | 161 | 2,206826 |
| 9 | 0,954243 | 60 | 1,778151 | 111 | 2,045323 | 162 | 2,209515 |
| 10 | 1,000000 | 61 | 1,785330 | 112 | 2,049218 | 163 | 2,212188 |
| 11 | 1,041393 | 62 | 1,792392 | 113 | 2,053078 | 164 | 2,214844 |
| 12 | 1,079181 | 63 | 1,799341 | 114 | 2,056905 | 165 | 2,217484 |
| 13 | 1,113943 | 64 | 1,806180 | 115 | 2,060698 | 166 | 2,220108 |
| 14 | 1,146128 | 65 | 1,812913 | 116 | 2,064458 | 167 | 2,222716 |
| 15 | 1,176091 | 66 | 1,819544 | 117 | 2,068186 | 168 | 2,225309 |
| 16 | 1,204120 | 67 | 1,826075 | 118 | 2,071882 | 169 | 2,227887 |
| 17 | 1,230449 | 68 | 1,832509 | 119 | 2,075547 | 170 | 2,230449 |
| 18 | 1,255273 | 69 | 1,838849 | 120 | 2,079181 | 171 | 2,232996 |
| 19 | 1,278754 | 70 | 1,845098 | 121 | 2,082785 | 172 | 2,235528 |
| 20 | 1,301030 | 71 | 1,851258 | 122 | 2,086360 | 173 | 2,238046 |
| 21 | 1,322219 | 72 | 1,857333 | 123 | 2,089905 | 174 | 2,240549 |
| 22 | 1,342423 | 73 | 1,863323 | 124 | 2,093422 | 175 | 2,243038 |
| 23 | 1,361728 | 74 | 1,869232 | 125 | 2,096910 | 176 | 2,245513 |
| 24 | 1,380211 | 75 | 1,875061 | 126 | 2,100371 | 177 | 2,247973 |
| 25 | 1,397940 | 76 | 1,880814 | 127 | 2,103804 | 178 | 2,250420 |
| 26 | 1,414973 | 77 | 1,886491 | 128 | 2,107210 | 179 | 2,252853 |
| 27 | 1,431364 | 78 | 1,892095 | 129 | 2,110590 | 180 | 2,255273 |
| 28 | 1,447158 | 79 | 1,897627 | 130 | 2,113943 | 181 | 2,257679 |
| 29 | 1,462398 | 80 | 1,903090 | 131 | 2,117271 | 182 | 2,260071 |
| 30 | 1,477121 | 81 | 1,908485 | 132 | 2,120574 | 183 | 2,262451 |
| 31 | 1,491362 | 82 | 1,913814 | 133 | 2,123852 | 184 | 2,264818 |
| 32 | 1,505150 | 83 | 1,919078 | 134 | 2,127105 | 185 | 2,267172 |
| 33 | 1,518514 | 84 | 1,924279 | 135 | 2,130334 | 186 | 2,269513 |
| 34 | 1,531479 | 85 | 1,929419 | 136 | 2,133539 | 187 | 2,271824 |
| 35 | 1,544068 | 86 | 1,934498 | 137 | 2,136721 | 188 | 2,274158 |
| 36 | 1,556303 | 87 | 1,939519 | 138 | 2,139879 | 189 | 2,276462 |
| 37 | 1,568202 | 88 | 1,944483 | 139 | 2,143015 | 190 | 2,278754 |
| 38 | 1,579784 | 89 | 1,949390 | 140 | 2,146128 | 191 | 2,281033 |
| 39 | 1,591065 | 90 | 1,954243 | 141 | 2,149219 | 192 | 2,283301 |
| 40 | 1,602060 | 91 | 1,959041 | 142 | 2,152288 | 193 | 2,285557 |
| 41 | 1,612784 | 92 | 1,963788 | 143 | 2,155336 | 194 | 2,287802 |
| 42 | 1,623249 | 93 | 1,968483 | 144 | 2,158362 | 195 | 2,290035 |
| 43 | 1,633468 | 94 | 1,973128 | 145 | 2,161368 | 196 | 2,292256 |
| 44 | 1,643453 | 95 | 1,977724 | 146 | 2,164353 | 197 | 2,294466 |
| 45 | 1,653213 | 96 | 1,982271 | 147 | 2,167317 | 198 | 2,296665 |
| 46 | 1,662758 | 97 | 1,986772 | 148 | 2,170262 | 199 | 2,298853 |
| 47 | 1,672098 | 98 | 1,991226 | 149 | 2,173186 | 200 | 2,301030 |
| 48 | 1,681241 | 99 | 1,995635 | 150 | 2,176091 | | |
| 49 | 1,690196 | 100 | 2,000000 | 151 | 2,178977 | | |
| 50 | 1,698970 | 101 | 2,004321 | 152 | 2,181844 | | |

Les logarithmes renfermés dans cette table n'ont que six chiffres après la virgule : ils en ont sept dans les tables ordinaires; mais cette différence ne nuit en rien à l'usage que nous en ferons ci-après.

222. Remarquons, au sujet de cette table, que le premier chiffre de la gauche de chaque logarithme s'appelle la *Caractéristique*, parce que c'est par ce chiffre qu'on peut juger dans quelle décade est compris le nombre auquel appartient ce logarithme; par exemple, si un nombre a pour caractéristique 3, je sais qu'il appartient à des mille, parce que le logarithme de 1000 est 3, et que celui de 10000 étant 4, tout nombre depuis 1000 jusqu'à 10000 ne peut avoir pour logarithme que 3 et une fraction; il a donc 3 pour caractéristique, et les autres chiffres expriment cette fraction réduite en décimales.

## *Propriétés des Logarithmes.*

223. Comme il ne s'agit ici que des logarithmes tels qu'ils sont dans les tables ordinaires, les propriétés que nous allons exposer ne regardent que les progressions géométriques qui ont l'unité pour premier terme, et les progressions arithmétiques qui ont zéro pour premier terme.

Comparons donc encore, terme à terme, une progression géométrique quelconque, mais dont le premier terme soit l'unité, avec une progression arithmétique aussi quelconque, mais dont le premier terme soit zéro; par exemple, les deux progressions suivantes :

$$\div\!\!\div\ 1 : 3 : 9 : 27 : 81 : 243 : 729 : 2187 : 6561, \text{ etc.}$$
$$\div\ 0 . 4 . 8 . 12 . 16 . 20 . 24 . 28 . 32, \text{ etc.}$$

Il suit de la nature et de la correspondance parfaite de ces deux progressions, qu'autant de fois la raison de la première est facteur dans l'un quelconque des termes de cette progression, autant de fois la raison de la seconde est contenue dans le terme correspondant de cette seconde; par exemple, dans le terme 2187, la raison 3 est sept fois facteur; et dans le terme 28, la raison 4 est contenue sept fois.

En effet, selon ce qui a été dit (206 et 212), la raison est

facteur dans un terme quelconque de la première, autant de fois qu'il y a de termes dans celui-là ; et dans la seconde, un terme quelconque est composé d'autant de fois la raison qu'il y a de termes avant lui. Or, il y a le même nombre de termes de part et d'autre.

Concluons de là, qu'un terme quelconque de la progression géométrique aura toujours pour correspondant, dans la progression arithmétique, un terme qui contiendra la raison de celle-ci, autant de fois que la raison de la première est facteur dans le terme quelconque dont il s'agit.

224. Donc, *si l'on multiplie, l'un par l'autre, deux termes de la progression géométrique, et si l'on ajoute en même temps les deux termes correspondans de la progression arithmétique, le produit et la somme seront deux termes qui se correspondront dans ces progressions.*

Car il est évident que la raison sera facteur dans le produit, autant qu'elle l'est, tant dans l'un des termes multipliés que dans l'autre ; et que la raison de la progression arithmétique sera contenue dans la somme, autant qu'elle l'est, tant dans l'un des termes ajoutés que dans l'autre.

225. Donc on peut, par l'addition seule des deux termes de la progression arithmétique, connaître le produit des deux termes correspondans de la progression géométrique, en supposant ces deux progressions prolongées suffisamment.

Par exemple, en ajoutant les deux termes 8 et 24, qui répondent à 9 et à 729, j'ai 32 qui répond à 6561 ; d'où je conclus que le produit de 729 par 9 est 6561 ; ce qui est en effet.

226. Donc, puisque les nombres naturels qui composent la première colonne de la table ci-dessus, ont été tirés d'une progression géométrique qui commence par l'unité, et puisque leurs logarithmes sont les termes correspondans d'une progression arithmétique qui commence par zéro, il faut en conclure qu'*en ajoutant les logarithmes de deux nombres, on a le logarithme de leur produit.*

De là il est aisé de conclure les usages suivans.

## *Usage des Logarithmes.*

227. *Pour faire une multiplication par logarithmes, il faut ajouter le logarithme du multiplicande au logarithme du multiplicateur, la somme sera le logarithme du produit; c'est pourquoi, cherchant cette somme parmi les logarithmes des tables, on trouvera le produit à côté.* Par exemple si l'on propose de multiplier 14 par 13.

Je trouve dans la petite table ci-dessus que le logarithme de 14 est..... 1,146128
et que celui de 13 est..... 1,113943
La somme..... 2,260071

répond dans la même table au nombre 182 qui est en effet le produit.

228. Pour carrer un nombre, il suffit donc de doubler son logarithme, puisqu'il faudrait ajouter ce logarithme à lui-même, pour multiplier le nombre par lui-même.

229. Par une raison semblable, pour cuber un nombre, il faudra tripler son logarithme; et en général, pour élever un nombre à une puissance quelconque, il faudra prendre son logarithme autant de fois qu'il y a d'unités dans le nombre qui marque cette puissance; c'est-à-dire multiplier son logarithme par le nombre qui marque cette puissance; par exemple, pour élever un nombre à la septième puissance, il faudra multiplier par 7 le logarithme de ce nombre.

230. Donc réciproquement, pour extraire la racine carrée, cubique, quatrième, etc., d'un nombre proposé, il faudra diviser le logarithme de ce nombre par 2, 3, 4, etc., c'est-à-dire, en général, par le nombre qui marque le degré de la racine qu'on veut extraire.

Par exemple, si l'on demande la racine carrée de 144; ayant trouvé, dans la table, que le logarithme de ce nombre est 2,158362, j'en prends la moitié 1,079181; je cherche parmi les logarithmes, à quel endroit se trouve 1,079181; il répond à 12, qui est par conséquent la racine de 144.

Si l'on demande la racine septième de 128, je cherche dans la table son logarithme que je trouve être 2,107210; j'en prends le septième, ou je le divise par 7, et je cherche à quoi répond dans la table le quotient 0,301030; il répond à 2 qui est en effet la racine septième de 128.

231. *Pour trouver le quotient de la division d'un nombre par un autre, il faut retrancher le logarithme du diviseur, du logarithme du dividende; chercher dans la table à quel nombre répond le logarithme restant, ce nombre sera le quotient.*

Par exemple, si l'on veut diviser 187 par 17, je cherche dans la table les logarithmes de ces deux nombres, et je trouve

| | |
|---|---|
| Le logarithme de 187. . . . . | 2,271842 |
| Celui de 17. . . . . | 1,230449 |
| La différence. . . . . | 1,041393 |

répond, dans la table, à 11 qui est en effet le quotient.

Si la division ne pouvait pas être faite exactement, le logarithme restant ne se trouverait qu'en partie dans la table; mais nous allons enseigner, ci-après, ce qu'il faut faire dans ce cas.

La raison de cette règle est fondée sur ce que le quotient multiplié par le diviseur, devant reproduire le dividende (74), le logarithme du quotient, ajouté (227) au logarithme du diviseur, doit composer le logarithme du dividende; et par conséquent, *le logarithme du quotient vaut le logarithme du dividende, moins celui du diviseur.*

232. D'après ce que nous venons de dire, il est très-facile de voir que pour faire une règle de Trois par logarithmes, il faut ajouter le logarithme du second terme au logarithme du troisième, et de la somme retrancher le logarithme du premier.

233. Remarquons que lorsqu'on cherche, dans les tables ordinaires, un logarithme résultant de quelques opérations sur d'autres logarithmes, si l'on ne trouve de différence entre ce logarithme et celui de la table, que sur le dernier chiffre seulement, on doit regarder cette différence comme nulle, parce que les logarithmes de tous les nombres intermédiaires à la

progression décuple, ne sont qu'approchés à environ une demi-unité décimale du septième ordre près.

## *Des Nombres dont les logarithmes ne se trouvent point dans les Tables.*

234. Les fractions et les nombres entiers joints à des fractions n'ont pas leurs logarithmes dans les tables; il en est de même des racines carrées, cubiques, etc., des nombres qui ne sont pas des puissances parfaites du degré de ces racines.

Si l'on demande le logarithme d'un nombre entier joint à une fraction, il faut d'abord réduire le tout en fraction, et ensuite retrancher le logarithme du dénominateur, du logarithme du numérateur. Par exemple, pour avoir le logarithme de $8\frac{3}{11}$, je cherche celui de $\frac{91}{11}$, que je trouve en retranchant 1,041393 logarithme de 11, de 1,959041 logarithme de 91; le reste 0,917648 est le logarithme de $8\frac{3}{11}$, puisque $8\frac{3}{11}$ ou $\frac{91}{11}$ n'est autre chose que 91 divisé par 11.

235. La même raison prouve que pour avoir le logarithme d'une fraction, il faut retrancher pareillement le logarithme du dénominateur, du logarithme du numérateur; mais comme cette soustraction ne peut se faire, puisque le logarithme du dénominateur sera plus grand que celui du numérateur, on retranchera au contraire le logarithme du numérateur de celui du dénominateur; le reste, qui marquera ce dont il s'en faut que la soustraction n'ait pu se faire, sera le logarithme de la fraction en appliquant à ce reste un signe qui marque que la soustraction n'a pas été entièrement faite. Ce signe est celui-ci — qu'on énonce *moins*. Ainsi le logarithme de la fraction $\frac{11}{91}$ serait — 0,917648 (*).

(*) Les nombres précédés du signe — se nomment nombres *négatifs*. Nous

236. Ce signe est destiné à rappeler dans le calcul, que les logarithmes des fractions doivent être employés selon une règle tout opposée à celle que nous avons prescrite pour les logarithmes des nombres entiers, ou des nombres entiers joints à des fractions; c'est-à-dire que si l'on a à multiplier par une fraction, il faut retrancher le logarithme de cette fraction; si, au contraire, l'on a à diviser par une fraction, il faut ajouter son logarithme.

La raison en est, pour la multiplication, que multiplier par une fraction, revient à multiplier par le numérateur, et à diviser ensuite par le dénominateur : donc, lorsqu'on opère par logarithmes, on doit ajouter le logarithme du numérateur, et retrancher ensuite celui du dénominateur, ou, ce qui revient au même, on doit seulement retrancher l'excès du logarithme du dénominateur sur le logarithme du numérateur : or, cet excès est précisément le logarithme de la fraction. A l'égard de la division, la raison en est aussi facile à saisir; en effet, diviser par $\frac{3}{4}$, par exemple, revient (109) à multiplier par $\frac{4}{3}$, donc en opérant par logarithmes, il faut ajouter le logarithme de $\frac{4}{3}$, c'est-à-dire (234) la différence du logarithme de 4, au logarithme de 3, ou du logarithme du dénominateur de la fraction proposée, au logarithme de son numérateur.

237. Il peut arriver, et il arrive assez souvent, qu'en convertissant en une seule fraction l'entier et la fraction dont on cherche le logarithme, il peut arriver, dis-je, que le numérateur soit un nombre qui passe les limites des tables. Par exemple, si l'on demande le logarithme de $53\frac{821}{5704}$, ce nombre réduit en fraction, revient à $\frac{303133}{5704}$, dont le numérateur passe les limites des tables les plus étendues.

---

les ferons connaître plus particulièrement dans l'Algèbre; en attendant nous prévenons que c'est en prendre une idée fausse, que de les regarder comme des nombres au-dessous de zéro. Il n'y a rien au-dessous de zéro.

Il est donc à propos de savoir comment on peut trouver le logarithme d'un nombre qui passe ces limites.

La méthode que nous allons donner n'est pas rigoureuse; mais elle est plus que suffisante pour les usages ordinaires. Avant que de l'exposer, observons :

238. 1°. Qu'en ajoutant 1, 2, 3, etc., unités à la caractéristique du logarithme d'un nombre, on multiplie ce nombre par 10, 100, 1000, etc., puisque c'est ajouter le logarithme de 10, ou de 100, ou de 1000, etc. (219 et 227).

2°. Au contraire, si l'on retranche 1, 2, 3, etc., unités de la caractéristique d'un logarithme, c'est diviser le nombre correspondant par 10, 100, 1000, etc.

239. Cela posé, qu'il soit question de trouver le logarithme de 357859, par exemple.

Je séparerai, par une virgule, sur la droite de ce nombre, autant de chiffres qu'il est nécessaire pour que le reste puisse se trouver dans les tables (*). Ici, par exemple, j'en séparerai deux, ce qui me donnera 3578,59, qui est cent fois plus petit que le nombre proposé 357859.

Je cherche dans les tables le logarithme de 3578, que je trouve être 3,5536403; je prends en même temps à côté de ce logarithme (**) la différence 1214, entre ce même logarithme et celui de 3579; après quoi je fais cette règle de Trois : si pour 1, unité de différence entre les deux nombres 3579 et 3578,

On a 1214 de différence entre leurs logarithmes;

Combien pour 0,59, différence entre les deux nombres 3578,59 et 3578,

Aura-t-on de différence entre leurs logarithmes ? c'est-à-dire

(*) Nous supposons ici que l'on ait entre les mains des Tables ordinaires de logarithmes qui aillent jusqu'à 20000, ou au moins jusqu'à 10000. Celles de M. Rivard et celles de feu M. l'abbé de la Caille sont exactes et commodes.

(**) Ces différences se trouvent dans les Tables, à côté des logarithmes mêmes.

que je cherche le quatrième terme d'une proportion dont les trois premiers sont :

$$1 : 1214 :: 0{,}59 :$$

Ce quatrième terme est 716,26, ou simplement 716, en négligeant les décimales; j'ajoute donc 716 au logarithme 0,5536403 de 3578, et j'ai 3,5537119 pour le logarithme de 3578,59; il ne s'agit plus, pour avoir celui de 357859, que d'ajouter deux unités à la caractéristique du logarithme qu'on vient de trouver; et on aura 5,5537119 pour le logarithme cherché, puisque 357859 est 100 fois plus grand que 3578,59. Si les chiffres qu'on doit séparer sur la droite étaient tous des zéro, après avoir trouvé, dans les tables, le logarithme de la partie qui reste à gauche, il n'y aurait autre chose à faire qu'à ajouter autant d'unités à la caractéristique, qu'on aurait séparé de zéro.

240. S'il s'agit du logarithme d'un nombre accompagné de décimales, on cherchera ce logarithme, comme si le nombre proposé n'avait point de virgule; et après l'avoir trouvé, soit immédiatement dans les tables, soit par la méthode qu'on vient de donner (239), on ôtera autant d'unités à la caractéristique, qu'il y a de décimales dans le nombre proposé, parce qu'ayant considéré le nombre comme s'il n'y avait point de virgule, c'est-à-dire, comme 10, ou 100, ou 1000, etc., fois plus grand qu'il n'est, on doit le rappeler à sa valeur par une diminution convenable sur la caractéristique de son logarithme (238).

241. Enfin, s'il n'y a que des décimales dans le nombre proposé, on cherchera encore ce nombre dans les tables, comme s'il n'y avait pas de virgule; et ayant pris le logarithme correspondant, on le retranchera d'autant d'unités qu'il y a de décimales dans ce même nombre, et on fera précéder le reste du signe —; par exemple, pour avoir le logarithme de 0,03, je cherche celui de 3 qui est 0,477121; je le retranche de deux unités, et appliquant au reste le signe —, j'ai — 1,522879 pour logarithme de 0,03. En effet, 0,03 n'est autre chose que $\frac{3}{100}$,

or, pour avoir le logarithme de $\frac{3}{100}$, il faut (235) retrancher le logarithme de 3, de celui de 100, et appliquer au reste le signe —

## *Des Logarithmes dont les nombres ne se trouvent point dans les Tables.*

242. Cette recherche n'est pas moins nécessaire que la précédente. Par exemple, pour la division, il arrive rarement que le quotient soit un nombre entier. Or, si l'on fait l'opération par logarithme, on ne trouvera dans les tables le logarithme restant que quand le quotient sera un nombre entier. Il y a une infinité d'autres cas de la même espèce.

243. Proposons-nous d'abord de trouver à quel nombre répond un logarithme proposé, soit qu'il excède les limites des tables, soit qu'il tombe entre les logarithmes des tables.

On retranchera de la caractéristique autant d'unités qu'il sera nécessaire, pour qu'on puisse trouver, dans les tables, les premiers chiffres du logarithme proposé, ainsi préparé. Si tous les chiffres se trouvent alors dans les tables, le nombre cherché sera le nombre même qu'on trouve à côté dans les tables, mais en mettant à sa suite autant de zéro qu'on aura ôté d'unités à la caractéristique (238).

Par exemple, le logarithme 7,2273467 se trouve (après avoir ôté trois unités à la caractéristique) répondre au nombre 16879; j'en conclus que le logarithme proposé 7,2273467 répond à 16879000.

Si l'on ne trouve dans les tables que les premiers chiffres du logarithme, on se conduira comme l'exemple qui suit.

Pour trouver à quel nombre appartient le logarithme 5,2432768, j'ôte deux unités à la caractéristique; le logarithme 3,2432768 que j'ai alors, tombe entre les logarithmes de 1750 et 1751 : le nombre auquel il répond est donc 1750 et une fraction.

Afin d'avoir cette fraction, je retranche de mon logarithme

3,2432768, le logarithme de 1750, et j'ai pour différence 2388.

Je prends aussi dans les tables la différence 2481 entre les logarithmes de 1751 et 1750, après quoi je fais cette règle de Trois :

Si 2481 de différence entre les logarithmes de 1751 et 1750,

Répondent à 1, unité de différence entre ces nombres,

A quelle différence de nombres doit répondre la différence 2388 entre mon logarithme et celui de 1750?

Je trouve pour quatrième terme $\frac{2388}{2481}$; ainsi le logarithme 3,2432768 appartient au nombre 1750 $\frac{2388}{2481}$, à très-peu de chose près; par conséquent, le logarithme proposé qui appartient à un nombre 100 fois plus grand (238), a pour nombre correspondant 175000 $\frac{238800}{2481}$, c'est-à-dire 175096 $\frac{624}{2481}$, ou en réduisant en décimales, il a pour nombre correspondant 175096,25.

244. Si le logarithme proposé tombait entre ceux des tables, il n'y aurait aucune unité à retrancher à la caractéristique, et par conséquent point de zéro à ajouter à la fin de l'opération, qu'on ferait d'ailleurs de la même manière.

245. Mais, comme la proportion que nous employons dans cette méthode n'est pas rigoureusement exacte (*), et qu'elle n'approche de la vérité qu'autant que les nombres cherchés sont grands, si le logarithme proposé tombait au-dessous de celui de 1500, il faudrait, pour plus d'exactitude, ajouter à sa caractéristique autant d'unités qu'on pourrait le faire sans passer les bornes des tables; et ayant trouvé le nombre qui approche le plus d'y répondre dans ces tables, on en sépare-

(*) Cette proportion suppose que les différences des logarithmes sont proportionnelles aux différences des nombres, ce qui n'est jamais exactement vrai, mais approche assez, quand les nombres sont un peu grands, et cela suffit pour les usages ordinaires.

rait sur la droite autant de chiffres par une virgule qu'on aurait ajouté d'unités à la caractéristique, ce qui suffira le plus souvent; mais si l'on veut avoir plus de décimales, on fera la proportion comme ci-dessus (243), et réduisant le quatrième terme en décimales, on mettra celles-ci à la suite de celles qu'on a déjà trouvées.

Par exemple, si l'on demande à quel nombre appartient le logarithme 0,5432725; comme ce logarithme tombe entre ceux de 3 et de 4, et que le nombre auquel il appartient est par conséquent beaucoup au-dessous de 1500, je cherche ce logarithme avec trois unités de plus à sa caractéristique, c'est-à-dire que je cherche 3,5432725; je trouve qu'il tombe entre les logarithmes de 3493 et 3494, d'où je conclus que le nombre cherché est 3,493, à moins d'un millième près. Mais si cette approximation ne suffit pas, je prendrai la différence entre mon logarithme et celui de 3493, c'est-à-dire 739; je prendrai pareillement la différence 1243 entre les logarithmes de 3494 et 3493, et je chercherai, en raisonnant comme ci-dessus (243), le quatrième terme d'une proportion qui commencerait par ces trois-ci :

$$1243 : 1 :: 739 :$$

ce quatrième terme evalué en décimales est 0,594; donc le nombre cherché est 3,493594.

Au reste, cette seconde approximation est bornée, parce que les logarithmes des tables n'étant exacts qu'à environ une demi-unité décimale du septième ordre près, les différences sont affectées de ce léger défaut; mais on peut toujours pousser l'approximation avec confiance jusqu'à trois décimales : au surplus, il est rare qu'on ait besoin d'aller jusque-là; mais la remarque que nous faisons doit diriger aussi dans l'usage que nous avons fait ci-dessus (239 et 243) de la même proportion.

246. Si l'on veut avoir la fraction à laquelle répond un logarithme négatif proposé, on retranchera ce logarithme de 1 ou 2, ou 3, ou 4, etc., unités, selon l'étendue des tables; et après avoir trouvé le nombre qui répond au logarithme res-

tant, on en séparera sur la droite, par une virgule, autant de chiffres qu'il y aura eu d'unités dans le nombre dont on aura retranché le logarithme.

Par exemple, si l'on demande à quelle fraction appartient —1,532732, je retranche 1,532732 de 4, et il me reste 2,467268 qui, dans la table, se trouve entre les logarithmes de 293 et de 294; j'en conclus que la fraction cherchée est entre 0,0294 et 0,0293, c'est-à-dire qu'elle est 0,0293, à moins d'un dix-millième près. En effet, retrancher de 4 le logarithme proposé 1,532732, c'est (236) multiplier 10000 par la fraction à laquelle appartient ce même logarithme proposé, ou (ce qui est la même chose) c'est multiplier cette fraction par 10000; donc le nombre qu'on trouve est 10000 fois plus grand; il faut donc le compter pour des dix-millièmes.

Tout ce que nous venons de dire, trouvera abondamment des applications par la suite. Bornons-nous, quant à présent, à donner une idée, par quelques exemples, de l'avantage que les logarithmes procurent pour la facilité et la promptitude des calculs.

EXEMPLE I.

On demande le quotient de 17954 divisé par 13836, approché jusqu'à moins d'un dix-millième près.

| | |
|---|---|
| Logarithme de 17954. . . . . | 4,254161 |
| Logarithme de 13836. . . . . | 4,108430 |
| Reste. . . . . | 0,145731 |

Ce reste, cherché dans les tables, avec une caractéristique plus forte de quatre unités, répond à 13987; donc (238) le quotient cherché est 1,3987.

EXEMPLE II.

On demande la racine cubique de 53, à moins d'un millième près.

| | |
|---|---|
| Le logarithme de 53 est. . . | 1,724276 |
| Son tiers (230) est. . . . . | 0,574759 |

Ce dernier cherché dans les tables avec une caractéristique

plus forte de trois unités répond à 3756; donc (238) la racine cherchée est 3,756.

Pour juger de l'avantage des logarithmes, on n'a qu'à chercher cette racine par la méthode donnée (156). Il ne faut pas pour cela regarder cette dernière comme inutile; car elle s'étend à une infinité de nombres auxquels les logarithmes n'atteindraient pas, par rapport aux bornes des tables.

EXEMPLE III.

Veut-on avoir, à moins d'un centième près, la racine cinquième du cube de 5736.

On triplera le logarithme 3,758609, de 5736, et on aura 11,275827, pour le logarithme du cube de 5736. Prenant le cinquième de ce dernier logarithme, on a 2,255165, pour logarithme de la racine cinquième du cube de 5736. Ce logarithme cherché dans les tables, avec une caractéristique plus forte de deux unités, pour avoir des centièmes, répond entre les nombres 17995 et 17996; la racine cherchée est donc 179,95 à moins d'un centième près.

EXEMPLE IV.

Qu'il soit question de trouver quatre moyens proportionnels géométriques entre $\frac{2}{3}$ et $5\frac{3}{4}$

Il faudrait (215) pour avoir la raison qui doit régner dans la progression, diviser $5\frac{3}{4}$ par $2\frac{2}{3}$, et extraire la racine cinquième du quotient.

Par logarithmes, cette opération est très-simple. Je détermine, par les tables, le logarithme de $5\frac{3}{4}$ ou $\frac{23}{4}$; c'est 0,759668.

Je détermine pareillement le logarithme de $2\frac{2}{3}$; c'est 0,425969.

Je retranche (231) ce logarithme du premier, et j'obtiens 9,333699; prenant donc (230) le cinquième de ce dernier, j'ai

0,066740 pour le logarithme de la raison cherchée. Ce logarithme, cherché dans les tables, avec une caractéristique plus forte de 4 unités, pour avoir 4 décimales, répond à 11661; à moins d'une unité près; donc la raison est 1,1661, à moins d'un dix-millième près. Il ne s'agit donc plus pour avoir les moyens proportionnels, que de multiplier le premier terme $2\frac{2}{3}$ par 1,1661, puis le produit par 1,1661, et ainsi de suite.

Mais ces opérations peuvent être faites beaucoup plus promptement, à l'aide des logarithmes, en ajoutant successivement au logarithme 0,425969 du premier terme $2\frac{2}{3}$, le logarithme 0,066740 de la raison, son double, son triple et son quadruple, en sorte qu'on aura 0,492709; 0559449; 0626189; 0692929 pour les logarithmes des quatres moyens proportionnels demandés; et si l'on cherche ces logarithmes dans les tables, avec trois unités de plus à la caractéristique, on trouve que ces quatre moyens proportionnels sont 3,109; 3,626; 4,228; 4,931.

REMARQUE.

Lorsque dans une opération où l'on fait usage des logarithmes, il s'en trouve quelques-uns que l'on doit retrancher, on peut simplifier l'opération par l'observation suivante.

Lorsqu'on a à retrancher un nombre quelconque d'un autre qui est *l'unité suivie d'autant de zéro qu'il y a de chiffres dans le premier*, l'opération se réduit à écrire la différence entre 9 et chacun des chiffres du nombre proposé, à l'exception du dernier, pour lequel on écrit la différence entre 10 et ce chiffre. Par exemple, si j'ai 526927 à retrancher de 1000000, je retranche successivement les chiffres 5, 2, 6, 9, 2, de 9; et le dernier chiffre 7, je le retranche de 10; et j'ai 473073 pour reste.

Ce reste est ce qu'on appelle le *complément arithmétique* du nombre poposé.

La soustraction faite de cette manière, étant trop simple pour pouvoir être comptée pour une opération, il s'ensuit que lorsqu'on aura à former un résultat de l'additio : et de la sous-

traction de plusieurs nombres, on pourra toujours réduire l'opération à l'addition. Par exemple, s'il s'agissait d'ajouter les deux nombres 672736, 426452 et de retrancher de leur somme les deux nombres 432752, 18675, ce qui exige deux additions et une soustraction, je substitue à ces opérations la suivante :

| | |
|---|---|
| | 672736 |
| | 426452 |
| Complément arith. de 432752. . . | 567248 |
| Complément arith. 18675. . . | 981325 |
| Somme. . . . . | 2647761 |

C'est-à-dire que j'ajoute ensemble les deux premiers nombres proposés, et les complémens arithmétiques des deux derniers : la somme est 2647761. Il faut en supprimer le premier chiffre 2 ; et les chiffres restans 647761 sont le résultat cherché.

La raison de cette opération est facile à sentir, en remarquant que si, au lieu de retrancher 432752, comme on le proposait, j'ajoute son complément arithmétique, c'est-à-dire 1000000 moins 432452, je fais en même temps la soustraction proposée et une augmentation de 1000000, c'est-à-dire d'une dixaine au premier chiffre du résultat; donc pour chaque complément arithmétique que j'ai introduit, j'aurai une dixaine de trop à l'égard du premier chiffre du résultat.

L'application de ceci aux logarithmes est évidente.

Qu'il soit question, par exemple, de diviser 3760, par 79. Il faudrait retrancher le logarithme de 79, de celui de 3760. Au lieu de cette opération, j'écris

| | |
|---|---|
| Log. 3760. . . . . | 3,575188 |
| Complément arithm. du log. 79. . | 8,102373 |
| Somme. . . . . | 11,677561 |

Ainsi 1,677561 est le logarithme du quotient, et répond à 47,59 à moins d'un centième près.

Supposons, pour second exemple, qu'il soit question de multiplier $\frac{675}{527}$ par $\frac{952}{377}$; il faudrait (106) multiplier 675 par

952, et 527 par 377; puis, diviser le premier produit par le second. Par logarithmes, on opérera ainsi

| | |
|---|---|
| Log. 675..... | 2,829304 |
| Log. 952..... | 2,978637 |
| Complément arithmét. du log. 527..... | 7,278189 |
| Complément arithmét. du log. 377..... | 7,423659 |
| Somme..... | 20,509789 |

Le Logarithme du produit est donc 0,509789 qui, cherché avec trois unités de plus à la caractéristique, répond à 3,234.

On peut faire usage du complément arithmétique pour mettre les logarithmes de fractions sous la même forme que ceux des nombres entiers, et les employer de même dans le calcul; par là on évitera la distinction des logarithmes négatifs et des logarithmes positifs. Il suffira de se souvenir que la caractéristique du logarithme des fractions proprement dites, est trop forte de 10 unités.

Par exemple, pour avoir le logarithme de $\frac{3}{4}$ qui n'est (96) autre chose que 3 divisé par 4, au lieu de retrancher le logarithme de 4 de celui de 3, c'est-à-dire de retrancher le logarithme de 3 de celui de 4 et de donner au reste le signe — (235); *au logarithme de 3, j'ajoute le complément arithmétique du logarithme de 4;*

| | |
|---|---|
| Log. 3..... | 0,477121 |
| Complément arithmétique du log. 4..... | 9,397940 |
| Somme..... | 9,875061 |

Cette somme est le logarithme de $\frac{3}{4}$ dont la caractéristique est trop forte de 10 unités. Or, il n'est pas nécessaire de faire actuellement la diminution, on peut la rejeter à la fin des opérations dans lesquelles on emploiera ce logarithme. La même règle s'applique aux fractions décimales; ainsi, pour avoir le

logarithme de 0,575 qui n'est autre chose que $\frac{575}{1000}$, au logarithme de 575, j'ajouterai le complément arithmétique du logarithme de 1000. En employant ainsi les complémens arithmétiques, au lieu des logarithmes négatifs des fractions, il n'en est pas plus difficile de trouver, dans les tables, les valeurs en décimales, de ces mêmes fractions. Dès que je saurai qu'un logarithme proposé est ou renferme un ou plusieurs complémens arithmétiques, je sais que sa caractéristique est trop forte d'autant de dixaines qu'il y entre de complémens arithmétiques; ainsi, si elle passe ce nombre de dixaines, il sera facile de la diminuer et de trouver le nombre auquel appartient ce logarithme, et qui sera un nombre entier, ou un nombre entier joint à une fraction. Mais si la caractéristique est au-dessous du nombre de dixaines qu'elle est censée renfermer de trop, elle appartient certainement à une fraction que je trouverai de cette manière: je chercherai, par ce qui a été dit, à quel nombre répond le logarithme proposé, et lorsque je l'aurai trouvé, j'en séparerai par une virgule, autant de dixaines de chiffres sur la droite qu'il y aura de dixaines de trop dans la caractéristique. Par exemple, si l'on me donnait 8,732235 pour logarithme résultant d'une opération dans laquelle il est entré un complément arithmétique, je vois, puisque sa caractéristique est au-dessous d'une dixaine, qu'il appartient à une fraction. Je cherche d'abord (242) à quel nombre répond 8,732235, considéré comme logarithme d'un nombre entier; je trouve qu'il répond à 539802500; séparant 10 chiffres, j'ai 0,0539802500 pour valeur très-approchée de la fraction qui répond au logarithme proposé.

Mais, comme il est très rarement nécessaire d'avoir ces fractions à un tel degré de précision, on abrégera en diminuant tout de suite la caractéristique du logarithme proposé, autant qu'il est nécessaire pour la faire tomber parmi celles des tables; et prenant seulement le nombre correspondant, on séparera autant de chiffres de moins que ne le prescrit la règle précédente, autant de moins, dis-je, qu'on aura ôté d'unités à la caractéris-

tique. Ainsi, dans le cas présent, je diminuerai la caractéristique de 5 unités, et ayant trouvé que le nombre correspondant est 5398, j'en séparerais seulement 5 chiffres, et j'aurais 0,05398.

Dans les élévations aux puissances, il faudra observer qu'en multipliant (229) le logarithme par le nombre qui marque le degré de la puissance, il se trouvera qu'on multipliera aussi ce dont la caractéristique se trouvera être trop forte. Ainsi, en élevant au cube, par exemple, s'il entre un complément arithmétique dans le logarithme proposé, c'est-à-dire si la caractéristique est trop forte de dix unités, celle du logarithme du cube sera trop forte de 30 unités, et ainsi des autres. Il sera donc facile de la ramener à sa juste valeur.

Dans les extractions des racines, pour éviter toute méprise, lorsqu'il entrera des complémens arithmétiques dans les logarithmes dont on fera usage, on aura soin d'ajouter ou d'ôter à la caractéristique autant de dixaines qu'il est nécessaire pour que ce dont elle sera trop forte soit précisément d'autant de dixaines qu'il y a d'unités dans le nombre qui marque le degré de la racine; et ayant, conformément à la règle ordinaire, divisé par le nombre qui marque le degré de la racine, la caractéristique sera trop forte précisément de 10 unités. Par exemple, si l'on demande la racine cubique de $\frac{276}{547}$, au logarithme de 276, j'ajoute le complément arithmétique de celui de 547.

| | |
|---|---|
| Log. 276..... | 2,440909 |
| Complément arith. du log. 547..... | 7,262013 |
| Somme..... | 9,702922 |

à la caractéristique de laquelle j'ajoute 20

afin qu'elle devienne trop forte de 3 dixaines, et j'ai 29,702922 dont le tiers 9,900974 est le logarithme de la racine cubique demandée, mais avec dix unités de trop à la caractéristique;

conformément à ce qui a été observé ci-dessus, je trouve que cette racine cubique est 0,7961, à moins d'un millième près.

L'usage des complémens arithmétiques est principalement utile dans les calculs de la trigonométrie, et par conséquent dans plusieurs opérations du Pilotage que l'on veut faire avec une certaine exactitude.

FIN DE L'ARITHMÉTIQUE DE BEZOUT.

# NOTES

SUR

# L'ARITHMÉTIQUE;

PAR LE BARON REYNAUD,

Chevalier de la Légion-d'Honneur, Examinateur pour l'admission à l'École Polytechnique, à l'École Spéciale Militaire et à l'École de Marine, Docteur de la Faculté des Sciences, Membre de plusieurs Académies, etc.

QUINZIÈME ÉDITION.

PARIS,

BACHELIER, PÈRE ET FILS,

LIBRAIRES POUR LES MATHÉMATIQUES,

QUAI DES AUGUSTINS, N° 55.

1832

## *Ouvrages du Baron Reynaud.*

1°. *Traité d'Arithmétique* à l'usage des Ingénieurs du Cadastre, 5 fr.

2°. *Traité d'Arithmétique* à l'usage des Élèves qui se destinent aux Écoles royales Polytechnique, Militaire, de Marine, et des Forêts (16e édit., 1832) 4 fr. 50 c.

3°. *Elémens d'Algèbre*, 8e édition, 1830, 7 fr. 50 c.

4°. *Cours de Mathématiques*, à l'usage des Élèves de la Marine et des Aspirans à ces Écoles, par MM. *Reynaud* et *Nicollet*; 3 v. in-8, 1829.
1er. vol., Arithmétique et Algèbre, par M. *Reynaud*. 5 fr.
2e vol., Géométrie et Trigonométrie, par M. *Nicollet*. 7 fr.
3e vol., Statique (sous presse).

5°. *Trigonométrie rectiligne et sphérique*, suivie des Tables de logarithmes (à cinq décimales) de Lalande (3e édition), 3 fr.

6°. *Tables de logarithmes* (à sept décimales) pour les nombres et les lignes trigonométriques, in-12 (édition stéréotype) 1829. 3 fr. 50 c.

7°. *Traité d'Application* de l'Algèbre à la Géométrie. (2e édit. sous presse).

8°. *Manuel de l'Ingénieur du Cadastre*, in-4°, 12 fr.

9°. *Problèmes et développemens* sur les diverses parties des Mathématiques, 6 fr.

10°. *Traité élémentaire de Mathématiques et de Physique*, suivi de notions sur la *Chimie* et sur l'*Astronomie*, à l'usage des Élèves qui se préparent aux examens pour le Baccalauréat ès-lettres, 2e édit., revue, corrigée et considérablem. augmentée, 2 vol. in-8° avec 21 pl. 1832, 12 fr. 50 c.

11°. *Fragmens sur l'Algèbre et la Trigonométrie.* (Épuisé.)

12°. *Théorèmes et Problèmes de Géométrie*, suivis de la *Géométrie descriptive*, de la *Perspective*, des *Ombres*, de la *Gnomonique*, etc. (Sous presse).

13°. *Traité d'Arpentage* de Lagrive, avec les Notes de Reynaud, 7 fr.

## *Notes sur Bezout.*

14°. *Arithmétique de Bezout* avec les notes, 15e édit. 1832, 3 fr. 50 c.

15°. *Géométrie de Bezout* avec des notes contenant un grand nombre de Problèmes, et des *Élémens de Géométrie descriptive* (7e édit.), 6 fr.

16°. *Algèbre* et Application de l'Algèbre à la Géométrie, avec les notes, 6 fr.

Les Notes sur l'Arithmétique, sur la Géométrie et sur l'Algèbre, se vendent séparément.

*Nota.* L'*Arithmétique* (16e édition), l'*Algèbre* (8e édition), l'*Application de l'Algèbre à la Géométrie*, comprenant la *Trigonométrie*, et les Notes sur l'*Algèbre* et sur la *Géométrie* de Bezout, sont particulièrement destinées aux Élèves qui se proposent d'entrer à l'École royale Polytechnique et à l'École spéciale Militaire de Saint-Cyr. Ces ouvrages renferment les solutions des principales difficultés relatives aux examens.

---

IMPRIMERIE DE ALFRED COURCIER,
rue du Jardinet, n° 12.

# AVERTISSEMENT.

Mon but, en publiant cette nouvelle édition des *Notes sur l'Arithmétique*, a été de réunir dans un petit volume toute la partie de l'Arithmétique nécessaire aux Candidats de l'École Polytechnique, de la Marine et des Écoles militaires. J'ose espérer que ce *Traité* sera, par sa concision, utile aux élèves qui voudront se préparer aux examens d'admission à ces écoles.

La clarté des *méthodes arithmétiques* convient à la faiblesse des commençans, et les formes variées dont elles sont susceptibles, en exerçant l'esprit des jeunes gens, les disposent à saisir les considérations abstraites de l'Algèbre.

*Les procédés algébriques, employés de trop bonne heure, accoutument les élèves à se laisser aveuglément conduire par le* MÉCANISME *des transformations*, tandis que les considérations fines et ingénieuses qu'exigent les solutions arithmétiques fortifient le raisonnement et le préparent aux artifices brillans de l'analyse. Ces motifs m'ont déterminé à *présenter toutes les démonstrations sous une forme entièrement arithmétique*, car je pense qu'*on ne doit avoir recours à l'Algèbre qu'à l'instant où les ressources de l'Arithmétique deviennent insuffisantes*.

Les *Notes* sont divisées en neuf chapitres :

Le *premier chapitre* renferme la numération et le calcul des nombres entiers abstraits.

Le *deuxième chapitre* traite des propriétés des facteurs d'un produit et de la divisibilité des nombres.

Le *troisième chapitre* traite des fractions et des décimales.

Le *quatrième chapitre* est consacré aux mesures anciennes et nouvelles, et au calcul des nombres concrets complexes et incomplexes.

Le *cinquième chapitre* a pour objet de faire voir comment on peut résoudre les problèmes d'arithmétique les plus compliqués, à l'aide des seules combinaisons des quatre règles.

Le *sixième chapitre* traite de la formation des quarrés et des cubes, de l'extraction de la racine quarrée et de la racine cubique, des puissances et des racines.

Le *septième chapitre* se compose des rapports, des proportions et des progressions. J'ai principalement insisté sur les propriétés des proportions et des progressions qui sont en usage dans la *Géométrie*, et qui servent de base à la théorie des logarithmes.

Le *huitième chapitre* contient la théorie arithmétique des logarithmes; on y fait connaître les limites des erreurs qui peuvent résulter de leur emploi. Il est terminé par de nombreux exemples qui mettront les élèves en état de lever toutes les difficultés relatives à l'usage des logarithmes.

Le *neuvième chapitre* donne la théorie générale des différens systèmes de numération, et en particulier du *système duodécimal*.

On trouve à la fin de ce volume des *Tableaux qui* contiennent les rapports des mesures et des monnaies des différens pays ainsi qu'une *Table des logarithmes* des nombres entiers, compris entre 1 et 10,000.

Les numéros placés entre parenthèses indiquent les renvois aux articles correspondans de cette nouvelle édition. Par exemple, dans la page 20, le signe (n° 7) indique un renvoi au principe établi dans l'article 7 de la page 9.

# TABLE DES MATIÈRES

# CONTENUES DANS LES NOTES

# SUR L'ARITHMÉTIQUE.

## CHAPITRE PREMIER.

*Numération, Addition, Soustraction, Multiplication et Division des Nombres entiers.*


But de l'Arithmétique. N° 1.
De la Numération. N° 2.
Définitions des nombres abstraits et concrets. N° 3.
De l'Addition. N° 4.
De la Soustraction. N° 5.
De la Multiplication. Nos 6...8.
De la Division. Nos 9...10.
Preuves des quatre règles. N° 11.


## CHAPITRE DEUXIÈME.

*Propriété des Facteurs d'un produit. Divisibilité des nombres.*


Propriétés des Facteurs d'un produit. Nos 12...15.
De la divisibilité des Nombres. Nos 16...26.
Preuves par 9 et par 11. N° 27.
Des Nombres premiers; moyen de les obtenir. Nos 28...29.
Théorie du plus grand commun Diviseur. Nos 30...34.
Propriétés des nombres premiers. Nos 35 et 36.
Décomposer un nombre en ses facteurs premiers. N° 37.
Déterminer tous les diviseurs d'un nombre. N° 38.
Déterminer le plus grand commun diviseur, au moyen des facteurs premiers. N° 39.

Calculer le plus petit nombre divisible par des nombres donnés. N° 40.

## CHAPITRE TROISIÈME.

### *Des Fractions et des Décimales.*

Origine et numération des fractions. N° 41.
Propriétés des fractions. N° 42.
Addition et Soustraction. Réduction au même dénominateur. N°s 43 et 44.
Multiplication. Fractions de fractions. N° 45.
Division d'une fraction par une fraction. N° 46.
Des Nombres fractionnaires. N° 47
Transformer un nombre entier en un nombre fractionnaire équivalent N° 48.
Relations qui existent entre le dividende, le diviseur et le quotient. N° 49.
Trouver les entiers contenus dans un nombre fractionnaire. N° 50.
Calcul des fractions jointes à des nombres entiers. N° 51.
Des fractions irréductibles. Réduire une fraction à sa plus simple expression. N° 52.
Le système adopté pour écrire les nombres entiers s'applique aux fractions décimales. N° 53.
Effets produits sur un nombre décimal, lorsqu'on déplace la *virgule*. N° 54.
Transformer un nombre décimal en fraction; et réciproquement, convertir en décimales une fraction dont le dénominateur est l'unité suivie de plusieurs zéro. N° 55.
Énoncer un nombre décimal écrit en chiffres, et réciproquement. N° 56.
Calcul des nombres décimaux. N° 57.
Réduire une fraction en décimales. N° 58.
Conversion des fractions décimales périodiques en fractions ordinaires. N° 59.
Valeurs approchées d'un nombre décimal, d'une fraction et d'un produit. Méthode pour découvrir si la division du numérateur d'une fraction par son dénominateur, conduira à un quotient exact ou périodique. N°s 60 et 61.
Valeurs approchées d'un nombre décimal. N°s 62 et 63.
Méthode abrégée de multiplication de deux nombres décimaux. N° 64.

## CHAPITRE QUATRIÈME.

### *Mesures anciennes et nouvelles. Calcul des nombres concrets.*

Nomenclature des mesures anciennes. N° 65.
Calcul des nombres concrets. N°s 66...72.
Conversion des fractions concrètes en nombres complexes et en décimales. N°s 73 et 74.
Nomenclature, Numération et Calcul des nouvelles mesures. N°s 75 et 76.

Rapport entre les diverses unités des mesures anciennes et nouvelles. N° 77.
Usage des *Tables* pour convertir les mesures anciennes en mesures nouvelles et réciproquement. N° 78.

## CHAPITRE CINQUIÈME.

### *Problèmes d'Arithmétique.*

But de ce chapitre. N° 79.
Règles de trois, simples et composées. N° 80.
Des intérêts simples et composés. N° 81.
Problèmes sur les intérêts simples. N° 82.
Règle d'escompte. N° 83.
Règle de compagnie ou de société. N° 84.
Règle de troc. N° 85.
Problèmes sur les intérêts composés. N° 86.
Problèmes sur les mélanges. N° 87.
Des alliages. N° 88.
Problèmes divers. N° 89.

## CHAPITRE SIXIÈME.

### *Des Quarrés et de la Racine quarrée, des Cubes et de la Racine cubique. Des Puissances et des Racines.*

Définitions du quarré et de la racine quarrée. N^os 90 et 91.
Extraction de la racine quarrée des nombres entiers. N^os 92...98.
Extraction de la racine quarrée des fractions et des nombres décimaux. N^os 99...104.
Définition du cube et de la racine cubique. N^os 105 et 106.
Extraction de la racine cubique des nombres entiers. N^os 106...113.
Extraction de la racine cubique des fractions et des nombres décimaux. N^os 114...118.
Définitions générales des puissances et des racines. Extraction des racines dont les *indices* ne renferment que les facteurs premiers 2 et 3. N° 119.

## CHAPITRE SEPTIÈME.

### *Des Rapports, des Proportions et des Progressions.*

Des Rapports arithmétiques et géométriques. N° 120.
Des Proportions arithmétiques et géométriques. N^os 121...138.
Usages des proportions pour résoudre les problèmes. N^os 139...141.

Des Progressions arithmétiques. N^os 142...146.
Des Progressions géométriques. N^os 147...151.

## CHAPITRE HUITIÈME.

### *Théorie des Logarithmes.*

Définition et propriétés générales des logarithmes. N^os 152...154.
Propriétés des logarithmes dans le système particulier dont la base est 10. N° 155.
Calcul d'une table de logarithmes dans la base 10. N° 156.
Disposition de la table de logarithmes. N° 157.
Des nombres positifs et négatifs. N^os 158 et 159.
Trouver le logarithme d'un nombre donné. N^os 160 et 161.
Trouver à quel nombre appartient un logarithme donné. N° 162.
Limites des erreurs que l'on peut commettre en faisant usage des *logarithmes*. N° 163.
Des *complémens arithmétiques*. N° 164.
Usage des logarithmes pour abréger les calculs. N° 166.

## CHAPITRE NEUVIÈME.

Des différens systèmes de numération. N° 167.
Système duodécimal. N^os 168...173.
Tableaux de comparaison pour les mesures et les monnaies françaises et étrangères.
Table de logarithmes des nombres entiers depuis un jusqu'à dix mille.

FIN DE LA TABLE DES NOTES.

# NOTES
# SUR L'ARITHMÉTIQUE.*

## CHAPITRE PREMIER.

### *Numération, Addition, Soustraction, Multiplication, et Division des nombres entiers.*

1. Tout ce qui est susceptible d'augmentation et de diminution se nomme *quantité.* Il serait impossible de prendre une idée exacte des grandeurs des quantités de même espèce, si l'on ne choisissait pas parmi elles une certaine quantité qui pût leur servir de terme de comparaison; cette quantité se nomme *unité;* la réunion de plusieurs unités de même grandeur compose un *nombre entier.*

La manière de former les nombres entiers, de les énoncer et de les écrire, est l'objet de la *numération*, et la science qui a pour but d'enseigner à effectuer diverses *opérations* sur les nombres se nomme *Arithmétique.*

### *De la Numération.*

2. Pour *former les nombres entiers,* on part de l'unité; l'unité ajoutée à elle-même, donne le nombre *deux;* et en ajoutant suc-

---

* Nous ferons usage dans ces Notes des *signes*

| + | − | × | = |
|---|---|---|---|
| qui signifient respectivement | | | |
| *plus* | *moins* | *multiplié par* | *égale.* |

cessivement l'unité à chaque nombre obtenu, on compose les nombres *trois, quatre, cinq, six, sept, huit, neuf.* Ce dernier augmenté d'un, donne le nombre *dix;* la collection de dix unités forme un nouvel *ordre* d'unités nommé *dixaine;* et de même qu'on a compté depuis une unité jusqu'à neuf unités, on a compté aussi depuis une dixaine jusqu'à neuf dixaines; mais au lieu des mots, une dixaine, deux dixaines, trois dixaines, quatre dixaines, cinq dixaines, six dixaines, sept dixaines, huit dixaines, neuf dixaines, on dit : *dix, vingt, trente, quarante, cinquante, soixante, soixante-dix, quatre-vingt, quatre-vingt-dix.* On substitue quelquefois aux trois derniers mots ceux de *septante, octante, nonante.*

Pour exprimer les nombres compris entre deux dixaines consécutives, on énonce successivement les dixaines et les unités; ainsi, la collection de trois dixaines et de sept unités, se nomme *trente-sept.* Il faut excepter de ce système les six premiers nombres compris entre dix et vingt, car au lieu des mots, dix-un, dix-deux, dix-trois, dix-quatre, dix-cinq, dix-six, on dit : *onze, douze, treize, quatorze, quinze, seize.* La collection de neuf dixaines et de neuf unités forme le nombre *quatre-vingt-dix-neuf;* celui-ci augmenté d'un, donne le nombre *cent,* composé de dix dixaines, et la réunion de dix dixaines se nomme *centaine.* On compte depuis une centaine jusqu'à neuf centaines, et pour désigner les nombres compris entre deux centaines consécutives, on ajoute aux noms, cent, deux cents, ....., neuf cents, ceux des quatre-vingt-dix-neuf premiers nombres. On parvient ainsi au nombre neuf cent quatre-vingt-dix-neuf; celui-ci augmenté d'un, donne dix centaines; cette collection de dix centaines forme une nouvelle unité principale nommée *mille;* et de même qu'on a compté par unités, dixaines et centaines d'unités, depuis une unité jusqu'à mille unités, on compte par unités, dixaines et centaines de mille, depuis une unité de mille jusqu'à mille unités de mille, nommées *million.* Quant aux nombres compris entre deux mille consécutifs, on ajoute au nom des mille, les noms des neuf cent quatre-vingt-dix-neuf premiers nombres. Le nombre, neuf cent quatre-vingt-dix-neuf

mille neuf cent quatre-vingt-dix-neuf, augmenté d'un, donne une collection de mille mille, ou un *million;* mille millions forment un *billion;* et ainsi de suite.

D'après ce système de *numération parlée,* le nom d'un nombre ne dépend que de la combinaison des noms des neuf cent quatre-vingt-dix-neuf premiers nombres, avec les mots *mille, million, billion,* etc.; de sorte que *l'énoncé d'un nombre n'exprime jamais plus de neuf unités, neuf dixaines et neuf centaines de chaque espèce.*

Les UNITÉS SIMPLES ou du premier ordre, les MILLE ou unités du quatrième ordre, les MILLIONS ou unités du septième ordre, etc., sont les unités des *ordres ternaires,* parce qu'elles se succèdent de trois en trois.

La simplicité du système de la *numération parlée,* résultant du petit nombre de mots qu'il a suffi de créer pour exprimer tous les nombres, a fourni l'idée de les écrire à l'aide de quelques *signes* nommés *chiffres.* Ainsi, de même qu'on employa neuf noms pour énoncer les neuf premiers nombres, on adopta neuf chiffres pour les représenter; et comme les combinaisons de ces neuf noms avec ceux des divers ordres d'unités avaient donné les noms de tous les nombres, on convint que les chiffres placés les uns à côté des autres indiqueraient par leur valeur le nombre des unités de chaque espèce, et par leur position l'ordre de ces unités. Ces chiffres sont :

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Ils représentent les nombres

*un, deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit, neuf.*

Pour écrire un nombre composé d'unités, de dixaines, de centaines, etc., on place à la suite les uns des autres les chiffres qui indiquent le nombre des unités de chaque ordre, de manière que le chiffre des unités ou du 1$^{er}$ ordre, occupe le 1$^{er}$ rang à droite; celui des dixaines ou du 2$^{e}$ ordre, le 2$^{e}$ rang; etc.

D'après cette convention, le nombre neuf mille cinq cent soixante-sept s'écrit ainsi 9567.

Lorsque le nombre ne contient pas des unités de tous les ordres inférieurs à ses plus hautes unités, on a recours au chiffre 0, nommé *zéro*, qui n'ayant aucune valeur par lui-même, sert seulement à conserver aux *chiffres significatifs*, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, le rang qui convient à l'ordre de leurs unités. Ainsi, le nombre neuf cent sept millions cinq cent trois, s'écrit 907 000 503.

En général : *Pour mettre en chiffres un nombre énoncé, on écrit successivement à côté les unes des autres (en commençant par la gauche), les centaines, les dixaines et les unités de chaque ordre ternaire, et l'on remplace par des zéro, les unités, dixaines et centaines qui manquent.*

Réciproquement : *Pour énoncer un nombre écrit, on le partage en tranches de trois chiffres à partir de la droite, sauf à ne laisser qu'un ou deux chiffres dans la dernière tranche; commençant ensuite par la gauche, on énonce chaque tranche comme si elle était seule, et on lui donne le nom des unités de cette tranche.*

Remarque. Notre système de numération a été nommé *système décimal*, parce qu'on y emploie *dix* chiffres, et l'on dit par cette raison que la *base* de ce système est *dix*.

*Suivant qu'on met un zéro, ou deux zéro, ou trois zéro,* etc., *à la droite d'un nombre, on rend ce nombre,* 10 *fois, ou* 100 *fois, ou* 1000 *fois,* etc., *plus grand.*

Par exemple, en posant deux zéro à droite de 248, on rend ce nombre 100 fois plus grand, car dans le résultat, 24 800, chacun des chiffres 2, 4, 8, exprime des unités cent fois plus grandes qu'auparavant.

3. Un nombre est *abstrait* ou *concret*, suivant qu'on fait *abstraction* de la nature de ses unités ou qu'on y a égard. Ainsi, 3 et 5 fois sont des *nombres abstraits*, et 3 toises est un *nombre concret*.

Les nombres concrets composés d'unités de diverses grandeurs, tel que le nombre 5 toises 3 pieds, sont dits *complexes*, et par opposition, ceux qui ne renferment que des unités de même grandeur sont des nombres *incomplexes*.

## ADDITION.

4. *Le but de l'*ADDITION *est de calculer un nombre nommé* SOMME, *qui contienne à lui seul toutes les unités de plusieurs autres nombres.*

La somme de plusieurs nombres pourrait donc s'obtenir en réunissant successivement toutes leurs unités. Mais, pour faciliter l'opération, on fait dépendre l'addition totale, d'additions partielles plus simples. Ainsi, au lieu d'ajouter 37 fois l'unité à 42, pour découvrir la somme des nombres 42 et 37, on dit : la somme des nombres 42, 37, doit contenir toutes leurs parties; elle se compose donc des 4 dixaines et des 2 unités de 42, plus des 3 dixaines et des 7 unités de 37; réunissant les dixaines avec les dixaines et les unités avec les unités, la somme cherchée est 7 dixaines plus 9 unités, ou 79.

En général : *Pour additionner plusieurs nombres, on les met les uns sous les autres, de manière que leurs unités de même ordre se trouvent dans une même colonne verticale. On place ensuite un trait sous ces nombres, pour les séparer du résultat qu'on mettra dessous. On fait la somme des nombres contenus dans la colonne des unités; quand cette somme n'excède pas* 9, *on l'écrit au résultat sous la colonne des unités; quand elle surpasse* 9, *on n'écrit que ses unités, et l'on retient les dixaines pour les joindre à la colonne des dixaines, sur laquelle on opère d'une manière semblable; et ainsi de suite.*

EXEMPLE.

$$\left.\begin{array}{r} 59038 \\ 2987 \\ 64509 \end{array}\right\} \text{nombres à ajouter.}$$

$$\overline{126534} \quad \text{somme.}$$

REMARQUE. *Pour effectuer l'addition, il est plus commode de commencer par la droite que par la gauche;* car, lorsqu'on commence par la droite, l'addition de chaque colonne fournit un chiffre du résultat. Il n'en serait pas toujours de même si l'on commençait par la gauche, car si l'addition d'une colonne donnait plus de 9 unités, il faudrait écrire les unités et ajouter les dixaines de surplus au chiffre déjà placé sous la colonne précédente; ce qui ne pourrait se faire qu'en changeant ce chiffre.

## SOUSTRACTION.

5. *La* SOUSTRACTION *a pour but de retrancher un nombre d'un autre ; le résultat se nomme* RESTE *ou* DIFFÉRENCE.

La différence entre deux nombres, ajoutée au plus petit de ces nombres, doit donc donner le plus grand.

Par conséquent, la soustraction peut s'effectuer en ôtant du plus grand des deux nombres donnés, toutes les unités du plus petit, ou en cherchant ce qu'il faut ajouter au plus petit des nombres donnés pour obtenir le plus grand ; le résultat exprime le reste cherché. Par exemple, on obtiendra la différence 32, entre 59 et 27, en ôtant 27 fois l'unité de 59, ou en cherchant combien il faut ajouter d'unités à 27 pour trouver 59. Mais on peut abréger le calcul, car ôter 27 unités de 59 unités, revient à ôter 2 dixaines et 7 unités, de 5 dixaines et 9 unités; retranchant donc 2 dixaines de 5 dixaines, et 7 unités de 9 unités, le reste, composé de 3 dixaines et 2 unités, sera 32.

Lorsque quelques-uns des chiffres du nombre à soustraire sont plus grands que ceux du même rang dans le nombre dont on soustrait, on rend les soustractions partielles possibles à l'aide d'*emprunts ;* ainsi, pour ôter 29 de 67, on *emprunte* une des 6 dixaines de 67 ; ce qui revient à décomposer 67, en 5 dixaines et 17 unités ; la question est réduite à retrancher 2 dixaines et 9 unités, de 5 dixaines et 17 unités ; ce qui donne le reste 3 dixaines plus 8 unités, ou 38.

Il est un cas qui pourrait encore embarrasser, c'est celui où le chiffre sur lequel on devrait emprunter serait un zéro. En voici un exemple :

| | | |
|---|---|---|
| De | 8005, ou 7 mille, 9 centaines, 9 dixaines, | 15 unités |
| ôtez | 467, ou 4 centaines, 6 dixaines, | 7 unités |
| Reste | 7538, ou 7 mille, 5 centaines, 3 dixaines, | 8 unités. |

Comme on ne peut ôter 7 de 5, il faut *emprunter ;* or l'*emprunt* ne peut se faire que sur le premier chiffre significatif 8 ; on emprunte donc un mille sur les 8 mille; ce mille valant 10 centaines, on en laisse 9 sur les centaines; la centaine qui reste

valant 10 dixaines, on en laisse 9 au rang des dixaines; la dixaine qui reste, jointe aux 5 unités, donne 15 unités; le mille emprunté se trouve ainsi décomposé en 9 centaines, 9 dixaines et 10 unités. On voit que cela se réduit à diminuer d'un le chiffre 8, sur lequel on emprunte, à remplacer les zéro qui le précèdent par des 9, et à ajouter 10 aux 5 unités. Retranchant 7 unités de 15 unités, 6 dixaines de 9 dixaines, 4 centaines de 9 centaines, et diminuant le 8 de l'unité de mille empruntée, on trouve que le reste demandé est 7538.

En général: *Pour retrancher un nombre d'un autre, placez le plus petit sous le plus grand, de manière que les unités de même ordre se correspondent; mettez un trait sous ces nombres; retranchez chaque chiffre inférieur du chiffre supérieur correspondant, en commençant par la droite, et placez chaque reste partiel sous la colonne qui l'a fourni. Quand le chiffre inférieur ne surpassera pas le chiffre supérieur correspondant, posez leur différence. Quand le chiffre inférieur sera plus grand que le chiffre supérieur correspondant, empruntez une des unités du premier chiffre significatif à gauche, qui devra, par conséquent, être diminué d'un; augmentez de dix le chiffre supérieur sur lequel vous opérez, et s'il y a des zéro compris entre ce chiffre et celui sur lequel vous avez emprunté, remplacez ces zéro par des neuf. Lorsque vous serez parvenu à la dernière colonne, vous poserez dessous le reste qu'elle aura fourni; ce qui terminera l'opération.*

Remarque. *On peut toujours effectuer directement la soustraction en la commençant par la droite. Il n'en serait pas de même en la commençant par la gauche;* car, si des chiffres du nombre à soustraire étaient plus grands que les chiffres correspondans du nombre dont on veut le soustraire, comme les chiffres précédens seraient employés par les soustractions précédentes, on ne pourrait plus rendre la soustraction possible par un *emprunt*, à moins de changer les chiffres du reste déjà obtenus.

## MULTIPLICATION.

6. *Le but de la* MULTIPLICATION *est de prendre un nombre nommé* MULTIPLICANDE, *autant de fois qu'il y a d'unités dans un autre nombre nommé* MULTIPLICATEUR ; *le résultat se nomme* PRODUIT.

Le multiplicande et le multiplicateur sont les deux *facteurs* du produit.

D'après cette définition, pour obtenir le produit, on peut écrire le multiplicande autant de fois qu'il y a d'unités dans le multiplicateur; la somme exprime le produit demandé.

*Le multiplicateur est toujours abstrait*, car il marque combien de fois on doit prendre le multiplicande.

*Le produit est de la nature du multiplicande*, car il exprime la somme de plusieurs nombres égaux au multiplicande.

La multiplication pouvant s'effectuer par l'addition, il est facile de former tous les produits deux à deux des nombres d'un seul chiffre; ces produits sont réunis dans la *table* suivante, attribuée à *Pythagore*.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 |
| 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 |
| 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 | 32 | 36 |
| 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 |
| 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 | 42 | 48 | 54 |
| 7 | 14 | 21 | 28 | 35 | 42 | 49 | 56 | 63 |
| 8 | 16 | 24 | 32 | 40 | 48 | 56 | 64 | 72 |
| 9 | 18 | 27 | 36 | 45 | 54 | 63 | 72 | 81 |

La 1re ligne renferme les neuf premiers nombres. La 2e contient les produits de ces nombres par 2, et se forme en ajoutant chacun de ces nombres à lui-même. La 3e contient les produits des neuf premiers nombres par 3, et se forme en ajoutant les nombres de la 2e ligne avec ceux de la 1re; et ainsi de suite.

D'après la formation de cette *table*, le produit 48, de 6 par 8, est à la rencontre des deux lignes qui commencent l'une par 6 et l'autre par 8.

7. On voit que *le produit de deux nombres d'un seul chiffre ne change pas dans quelque ordre qu'on effectue la multiplication. Cette propriété convient à tous les nombres;* car, pour former le produit d'un nombre par un autre, il suffit de multiplier successivement chaque unité du premier nombre par le second; ce qui donne le second nombre répété autant de fois qu'il y a d'unités dans le premier, c'est-à-dire le second nombre multiplié par le premier.

Par exemple, le produit de 3 par 4 est égal à 1 plus 1 plus 1, multiplié par 4, ou à 4 plus 4 plus 4, ou à 4 multiplié par 3.

8. *Le produit de deux nombres quelconques ne dépend que des produits de deux nombres d'un seul chiffre.* En effet, soit proposé de multiplier 567 par 234; après avoir disposé le calcul de la manière suivante :

| | |
|---|---|
| 567 | *multiplicande,* |
| 234 | *multiplicateur,* |
| 2268 | 1er *produit partiel de* 567 *par* 4, |
| 17010 | 2e *produit partiel de* 567 *par* 30, |
| 113400 | 3e *produit partiel de* 567 *par* 200, |
| 132678 | *somme des produits partiels, ou produit total de* 567 *par* 234, |

on observe que, pour obtenir le produit demandé, il suffit de prendre le multiplicande 234 fois, ou 200 fois plus 30 fois plus 4 fois; ce qui revient à multiplier successivement 567 par les parties 200, 30 et 4 du multiplicateur; la somme de ces produits partiels sera le produit total de 567 par 234.

1°. Pour obtenir le produit de 567 par 4, on pourrait écrire 4 fois 567; la somme 2268 serait le produit demandé; mais, comme cette addition revient à prendre 4 fois les 7 unités, 4

fois les 6 dixaines et 4 fois les 5 centaines du multiplicande, on se dispense d'écrire 4 fois 567, et l'on dit : 4 fois 7 font 28, je pose 8 et je *retiens* 2 dixaines; 4 fois 6 dixaines font 24 dixaines et 2 de retenue valent 26 dixaines, ou 2 centaines plus 6 dixaines; j'écris donc les 6 dixaines, et j'ajoute les 2 centaines de retenue à 4 fois 5 centaines, ce qui me donne 22 centaines, que je pose.

2°. On obtiendrait le produit de 567 par 30, en calculant la *somme* de 30 nombres égaux à 567, et comme 30 est égal à 10 fois 3, cette *somme* est formée de 10 sommes partielles composées chacune de 3 nombres égaux à 567; or 3 fois 567 font 1701, et pour prendre 10 fois 1701, il suffit de mettre un zéro à la droite de 1701 (*Remarque* du n° 2). Par conséquent on trouvera le produit de 567 par 30, en multipliant d'abord 567 par 3, et en posant un zéro à la droite du résultat 1701; ce qui revient à mettre 1701 au rang des dixaines.

3°. On prouverait de même que multiplier 567 par 200 se réduit à multiplier 567 par 2, et à mettre le produit 1134 au rang des centaines.

La somme de ces trois produits partiels compose le produit total 132678.

En général : *Pour multiplier un nombre par un autre, écrivez le multiplicateur sous le multiplicande, et mettez un trait sous ces nombres; multipliez le multiplicande successivement par chaque chiffre du multiplicateur, et placez le premier chiffre de chaque produit partiel de manière qu'il exprime des unités de même ordre que le chiffre qui a servi de multiplicateur; mettez un trait sous les produits partiels; leur somme, que vous poserez dessous, sera le produit total.*

Remarque. Quand les facteurs d'un produit sont terminés par des zéro, on abrège le calcul en effectuant d'abord la multiplication sans avoir égard à ces zéro, et l'on met ensuite tous ces zéro sur la droite du produit obtenu.

Les divers produits d'un nombre par 2, 3, 4, 5, etc., sont les *multiples* de ce nombre.

## DIVISION.

9. *La* DIVISION *a pour but, connaissant un produit de deux facteurs, nommé* DIVIDENDE, *et un de ses facteurs, nommé* DIVISEUR, *de trouver l'autre facteur nommé* QUOTIENT.

Le diviseur multiplié par le quotient devant reproduire le dividende, on pourrait obtenir le quotient par des soustractions successives, en cherchant combien de fois le diviseur est contenu dans le dividende; mais ce calcul devenant fort long, lorsque le diviseur est contenu un grand nombre de fois dans le dividende, on y a suppléé par une méthode abrégée qui a reçu le nom de *division*.

EXEMPLE. Soit proposé de diviser 472878 par 567.

On disposera le calcul de la manière suivante :

| | | | |
|---|---|---|---|
| *Dividende*. . . | 472878 | 567 | *Diviseur.* |
| | 4536 | 834 | *Quotient.* |
| | 19278 | | |
| | 1701 | | |
| | 2268 | | |
| | 2268 | | |
| *Dernier reste.* | 0 | | |

Le dividende 472878 étant compris entre 56700 et 567000, c'est-à-dire entre $567 \times 100$ et $567 \times 1000$, le quotient est nécessairement compris entre 100 et 1000; ce quotient est donc composé de centaines, de dixaines et d'unités. Le premier chiffre à gauche du quotient exprimera donc des centaines.

Le produit des centaines du quotient par le diviseur 567 étant des centaines, ne peut se trouver que dans les 4728 centaines du dividende. On trouvera donc le premier chiffre du quotient en cherchant combien de fois le diviseur 567 est contenu dans le premier dividende partiel 4728.

Or, 4728 contient la somme des trois produits partiels des 7 unités, des 6 dixaines et des 5 centaines de 567, par le pre-

mier chiffre du quotient; et le dernier de ces produits exprimant des centaines, ne peut se trouver que dans les 47 centaines de 4728. Par conséquent, 47 est composé du produit du premier chiffre 5 du diviseur par le premier chiffre du quotient, et des retenues de centaines qui peuvent avoir été fournies par les deux autres produits partiels. Il en résulte que si l'on cherche combien de fois 5 est contenu dans 47, le nombre 9, qu'on obtiendra, exprimera le premier chiffre du quotient ou un chiffre trop grand, mais jamais un chiffre trop petit.

Pour essayer le chiffre 9, on multiplie 567 par 9; le produit 5103 surpassant 4728, le chiffre 9 est trop fort.

Pour essayer le chiffre 8, on forme le produit 4536 de 567 par 8; ce produit étant moindre que 4728, on est certain que le diviseur 567 est contenu 8 fois dans 4728; de sorte que le premier chiffre du quotient est 8. On écrit ce chiffre au quotient.

Cela posé; si du dividende 472878, qui renfermait les trois produits partiels des 8 centaines, des dixaines et des unités du quotient par le diviseur 567, on retranche 567 fois 8 centaines, ou 8 fois 567 centaines, ou 4536 centaines, le reste 19278 ne contiendra plus que les produits des dixaines et des unités du quotient par le diviseur. On peut donc considérer le premier reste 19278 comme un nouveau dividende partiel formé du produit du diviseur 567 par un quotient partiel dont les dixaines et les unités sont celles du quotient total.

La question est ainsi réduite à diviser 19278 par 567. Raisonnant comme ci-dessus, on observe que le produit du chiffre des dixaines du quotient par le diviseur 567 se trouvant dans les 1927 dixaines de 19278, on trouvera ce chiffre, en cherchant combien de fois 567 est contenu dans 1927; à cet effet, on cherche combien de fois 5 est contenu dans 19; le nombre 3 qu'on obtient exprime le chiffre des dixaines du quotient ou un chiffre trop fort. Pour essayer le chiffre 3, on multiplie 567 par 3; le produit 1701 étant moindre que 1927, le chiffre des dixaines du quotient est 3. Le produit 1701 exprimant des dixaines, on retranche 1701 dixaines de 19278; le reste 2268

étant le produit du diviseur par le chiffre des unités du quotient, on obtiendra ce chiffre en divisant 2268 par 567, ou, ce qui est plus simple, en divisant 22 par 5. Le nombre 4 que l'on obtient exprime les unités du quotient total, car en retranchant 4 fois 567 de 2268, le reste est zéro. Le quotient demandé est donc 834.

Dans la pratique, on n'écrit que les chiffres nécessaires à la formation des dividendes partiels 4728, 1927, 2268, de sorte que le calcul s'exécute de cette manière abrégée.

| | |
|---|---|
| 472878 | 567 |
| 4536 | 834 |
| 1927 | |
| 1701 | |
| 2268 | |
| 2268 | |
| 0 | |

Le 1^er^ dividende partiel 4728 contenant 8 fois le diviseur 567, on pose 8 au quotient; on ôte 8 fois 567, ou 4536, de 4728, et à la droite du reste 192 on abaisse le chiffre 7 du dividende, ce qui fournit le 2^e^ dividende partiel 1927 que l'on divise par 567; le quotient 3 est le 2^e^ chiffre du quotient demandé; on retranche 3 fois 567, ou 1701, de 1927, et à la droite du reste 226 on abaisse le dernier chiffre 8 du dividende; ce qui donne le 3^e^ dividende partiel 2268 que l'on divise par 567; le quotient 7 est le dernier chiffre du quotient total; on ôte 4 fois 567 de 2268, ce qui détermine le dernier reste 0.

Lorsqu'on veut *découvrir les chiffres du quotient sans tâtonnement*, on observe que le diviseur n'étant jamais contenu plus de 9 fois dans chaque dividende partiel, il suffit de former une *table* des produits du diviseur 567 par les nombres

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Ces produits sont

567, 1134, 1701, 2268, 2835, 3402, 3969, 4536, 5103.

L'inspection de cette *table* fait voir combien de fois le diviseur 567 est contenu dans chaque dividende partiel.

Par exemple, le premier dividende partiel 4728 tombant entre 4536 et 5103, c'est-à-dire entre $567 \times 8$ et $567 \times 9$, on voit que 567 est contenu 8 fois dans 4728.

La table des produits du diviseur par les nombres d'un seul chiffre offre l'avantage de réduire la division à des soustractions successives. Il est bon d'en faire usage quand le quotient doit renfermer un grand nombre de chiffres.

Cette table peut se former par des additions successives du diviseur. Par exemple, en ajoutant 567 à 567, la somme 1134 exprime 2 fois 567; ajoutant 567 à 1134, le résultat 1701 exprime 3 fois 567; et ainsi de suite.

Il est toujours facile de déterminer la partie du dividende qui renferme le produit du diviseur par le chiffre des plus hautes unités du quotient, et l'on en déduit quel est ce chiffre. Mais, les produits partiels du diviseur par les autres chiffres du quotient étant confondus dans le dividende, il n'est pas possible d'apercevoir ces produits dans le dividende total; ce qui empêche de trouver directement les autres chiffres du quotient, avant d'avoir obtenu celui de ses plus hautes unités. *Il est donc indispensable de commencer par la recherche du premier chiffre à gauche du quotient.*

Pour qu'un chiffre mis au quotient soit exact, il faut et il suffit que le produit du diviseur par ce chiffre puisse se retrancher du dividende partiel correspondant, et que le reste soit moindre que le diviseur. Si le reste surpassait le diviseur, le chiffre mis au quotient serait trop faible au moins d'une unité, car le diviseur serait contenu au moins une fois de plus dans le dividende partiel.

Les raisonnemens précédens conduisent à cette règle générale: *Pour diviser un nombre par un autre, écrivez le diviseur à la droite du dividende, et placez un trait entre ces nombres; mettez un autre trait sous le diviseur, pour le séparer du quotient demandé que vous poserez dessous. Prenez assez de chiffres sur la gauche du dividende pour que le nombre qui*

*en résulte contienne le diviseur ; cherchez le nombre qui exprime combien de fois ce dividende partiel contient le diviseur, ce nombre sera le* 1^er^ *chiffre à gauche du quotient ; écrivez le* 1^er^ *chiffre du quotient sous le diviseur; multipliez le diviseur par ce chiffre, et mettez le produit sous le* 1^er^ *dividende partiel ; placez un trait sous ces nombres, et retranchez-les l'un de l'autre ; écrivez dessous le reste, et abaissez à sa droite le* 1^er^ *des chiffres du dividende qui n'ont pas encore été employés; vous obtiendrez un nouveau dividende partiel, sur lequel vous opérerez comme sur le précédent; ce qui déterminera le* 2^e^ *chiffre du quotient que vous écrirez à la suite du* 1^er^. *Vous répéterez les mêmes opérations jusqu'à l'entier épuisement des chiffres du dividende. Lorsqu'un dividende partiel sera moindre que le diviseur, le chiffre correspondant du quotient sera un zéro.*

Pour trouver combien de fois le diviseur est contenu dans un dividende partiel, on peut déterminer combien de fois le 1^er^ chiffre du diviseur est contenu dans le 1^er^ chiffre, ou dans les deux premiers chiffres de ce dividende partiel, suivant que le dividende partiel a autant de chiffres que le diviseur, ou a un chiffre de plus ; ce nombre exprime le chiffre correspondant du quotient, ou un chiffre trop fort; il ne donne jamais un chiffre trop petit.

Au lieu de poser sous chaque dividende partiel le produit du diviseur par le chiffre correspondant du quotient pour faire ensuite la soustraction, on évite d'écrire ce produit, et l'on fait la soustraction en employant une méthode abrégée que nous appliquerons à l'exemple suivant :

| | |
|---|---|
| de | 4728 |
| ôtez 8 fois | 567 |
| reste | 192. |

Il s'agit d'ôter 8 fois 7 unités, 8 fois 6 dixaines et 8 fois 5 centaines de 4728.

Le premier produit partiel 8 fois 7 ou 56 unités ne pouvant être soustrait des 8 unités de 4728, on ajoute assez de dixaines à 8 unités pour que la soustraction devienne possible, c'est-à-dire

5 dixaines, ce qui donne 58. On ôte 56 de 58 et l'on pose le reste 2 sous le chiffre des 8 unités. Or, en ajoutant 5 dixaines à 4728, le reste total a été augmenté de 5 dixaines; pour lui rendre sa valeur exacte, il suffit d'ajouter 5 dixaines à l'une des parties du nombre à soustraire, ce qui revient à regarder ces 5 dixaines comme une *retenue* que l'on ajoute au produit partiel 8 fois 6 dixaines avant de le soustraire; et comme 8 fois 6 plus 5 valent 53, il ne s'agit plus que d'ôter 53 dixaines et 8 fois 5 centaines des 472 dixaines du nombre 4728.

Pour soustraire les 53 dixaines, on ajoute 6 centaines ou 60 dixaines aux 2 dixaines de 4728, on ôte alors 53 dixaines de 62 dixaines, et l'on écrit le reste 9 dixaines dans la colonne des dixaines.

Mais en ajoutant 6 centaines au nombre dont on soustrait, le reste total a augmenté de 6 centaines; pour le diminuer de ces 6 centaines, on ajoutera 6 centaines au produit partiel 8 fois 5 centaines qui reste à soustraire, ce qui donnera 46 centaines; on ôtera 46 centaines des 47 centaines de 4728, et l'on posera le reste 1 centaine au rang des centaines. Ce qui complètera le reste total 192.

Le mécanisme du calcul précédent se réduit à dire : 8 fois 7 font 56, 56 de 58 reste 2; 8 fois 6 font 48 et 5 de retenue font 53, 53 de 62 reste 9; 8 fois 5 font 40, et 6 de retenue font 46, 46 de 47 reste 1.

D'après ce qui précède, voici le tableau des opérations pour diviser 472878 par 57...

| | |
|---|---|
| 472878 | 567 |
| 1927 | 834 |
| 2268 | |
| 0 | |

*Dans tout le cours d'une division, le dividende est égal au produit du diviseur par le quotient obtenu, plus le reste qui correspond à ce quotient partiel.* En effet, on est parvenu à ce reste en ôtant successivement du dividende, les produits partiels du diviseur par les chiffres trouvés au quotient; cela revient à

retrancher du dividende, le produit total du diviseur par le quotient obtenu; le reste correspondant à ce quotient exprime donc l'excès du dividende sur le produit du diviseur par le quotient déjà obtenu. Ce qui démontre le principe énoncé.

10. Nous avons supposé dans les exemples précédens, que le dividende était le produit du diviseur par un nombre entier, et dans ce cas la division a conduit à un dernier reste égal à zéro. Mais cette condition n'est pas toujours satisfaite. Lorsqu'on divise deux nombres quelconques l'un par l'autre, il arrive souvent que le dividende n'est pas le produit du diviseur par un nombre entier; dans ce cas, on parvient à un dernier reste (moindre que le diviseur) qui n'est pas nul.

Par exemple: soit à diviser 25 par 7; le quotient doit être tel que multiplié par 7, il donne 25; or 25 tombe entre 7 fois 3 et 7 fois 4; le quotient demandé est donc plus grand que 3 et moindre que 4, il n'est donc pas assignable en nombre entier. Le nombre 3 qu'on obtient au quotient est ce qu'on appelle *le quotient entier* ou la *partie entière* du quotient.

En général, lorsqu'on propose de diviser un nombre par un autre, on effectue la division d'après la règle du n° 9, jusqu'à ce qu'on parvienne à un reste moindre que le diviseur; le nombre obtenu au quotient est le quotient exact, ou la *partie entière* du quotient, selon que le reste est nul, ou n'est pas nul.

On dit qu'un nombre est *divisible* par un autre, quand la division se fait sans reste. Ainsi, 12 est *divisible* par 3, car la division fournit le *quotient exact* 4, et le reste est zéro.

## *Preuves des quatre règles.*

11. Le but de la *preuve* est de vérifier l'exactitude du résultat par une opération différente de celle qui l'a fourni.

Pour faire la *preuve de l'addition*, on cherche la somme des unités de chaque colonne verticale en commençant par la première à gauche; on retranche chaque somme partielle de celle qu'elle est censée avoir donnée, et l'on écrit chaque reste sous la colonne correspondante; quand la somme est exacte, le dernier

reste est zéro; le reste placé sous chaque colonne exprime des dixaines d'unités de la colonne suivante. En voici un exemple :

989 } *nombres à ajouter.*
878 }

1867 *somme.*
110 *retenues.*

Pour vérifier si 1867 est la somme des nombres 989, 878, on commence par la gauche et l'on dit: la colonne des centaines en contient 9 plus 8, ou 17; mais la somme totale renferme 18 centaines; la centaine de surplus provient donc d'une retenue de 10 dixaines, faite dans l'addition de la colonne des dixaines; cette colonne devrait donc renfermer 16 dixaines; mais elle n'en contient que 8 plus 7, ou 15; la dixaine de surplus résulte donc d'une retenue de 10 unités, faite dans l'addition de la colonne des unités, qui doit conséquemment renfermer 17 unités, car n'étant précédée d'aucune colonne à droite, elle ne peut avoir été augmentée par aucune retenue; cette colonne contient effectivement 17 unités; de sorte que la retenue placée au rang des unités est zéro. La somme obtenue est donc exacte.

Pour faire la *preuve de la soustraction*, on ajoute le reste au plus petit nombre, la somme doit être égale au plus grand nombre.

La *preuve de la multiplication* s'effectue en divisant le produit par l'un de ses facteurs, le quotient doit être égal à l'autre facteur.

Pour faire la *preuve de la division*, on multiplie le diviseur par le nombre entier obtenu au quotient et l'on ajoute le dernier reste à ce produit; la somme doit être égale au dividende.

Remarque. Si l'on examine attentivement la méthode que nous venons d'exposer pour vérifier chaque règle, on reconnaîtra que *la* preuve *sert à augmenter la probabilité de l'exactitude du résultat, sans pouvoir cependant en convaincre d'une manière absolue;* car il est toujours possible, en faisant la preuve, de commettre des erreurs qui détruisent celles qui ont conduit au résultat.

# CHAPITRE DEUXIÈME.

## *Propriétés des facteurs d'un produit. Divisibilité des nombres.*

12. *Le produit de plusieurs nombres entiers ne change pas de valeur dans quelque ordre qu'on effectue les multiplications.*

Nous prouverons d'abord que le produit de trois facteurs ne change pas de valeur quand on transpose les deux derniers facteurs. Nous en déduirons que dans le produit d'un nombre quelconque de facteurs, on peut intervertir l'ordre de deux facteurs consécutifs sans changer le produit, et il sera facile d'en conclure le principe énoncé.

Soit le produit $4 \times 3 \times 5$. Pour effectuer les multiplications dans l'ordre indiqué, il faut multiplier d'abord 4 par 3, et multiplier ensuite le résultat par 5.

Or, multiplier 4 par 3 revient à former la somme de 3 nombres égaux à 4. Donc

$$4 \times 3 = 4 + 4 + 4.$$

Il reste à multiplier $4 \times 3$ par 5; ce qui revient à prendre 5 fois chacune des trois parties 4, 4, 4, qui composent $4 \times 3$, et à en faire la somme. Donc

$$4 \times 3 \times 5 = 4 \times 5 + 4 \times 5 + 4 \times 5.$$

Le produit $4 \times 3 \times 5$ est donc égal à $4 \times 5$ répété 3 fois, ou à $4 \times 5 \times 3$.

On peut donc transposer les deux derniers facteurs 3, 5, du produit $4 \times 3 \times 5$.

Il est facile d'en conclure qu'on peut intervertir l'ordre de deux facteurs consécutifs, quel que soit le nombre des facteurs.

Pour fixer les idées, nous considérerons le produit

$$2\times 6\times 4\times 3\times 5\times 8\times 9\times 7,$$

et nous ferons voir qu'on peut intervertir deux facteurs consécutifs quelconques, 3 et 5 par exemple.

Le produit $2\times 6\times 4\times 3\times 5$ devant être effectué, avant qu'on multiplie par les facteurs 8, 9, 7, il suffit de prouver que $2\times 6\times 4\times 3\times 5 = 2\times 6\times 4\times 5\times 3$.

Le produit 48 des facteurs 2, 6, 4, devant être formé avant qu'on multiplie par les facteurs 3 et 5, la question se réduit à démontrer que $48\times 3\times 5 = 48\times 5\times 3$,
et l'on a prouvé précédemment que cette égalité est vraie.

Il résulte de ce qui précède que, sans changer la valeur d'un produit, on peut faire occuper à chaque facteur toutes les places, en l'avançant successivement d'un rang vers la droite ou vers la gauche.

Par exemple, le produit des facteurs 3, 4, 5 peut être effectué de ces six manières différentes :

$$3\times 4\times 5,\ 3\times 5\times 4,\ 5\times 3\times 4,\ 5\times 4\times 3,\ 4\times 5\times 3,\ 4\times 3\times 5.$$

Les diverses formes que prend un produit indiqué, lorsqu'on change l'ordre des facteurs, sont les *permutations* de ce produit.

Toutes les permutations d'un produit ont la même valeur.

Remarque. Pour que la démonstration précédente convienne au produit de deux facteurs, il suffit de considérer un produit de trois facteurs dont le premier est l'unité.

Par exemple, s'il s'agit des facteurs 3 et 4, on observe que

$$1\times 3\times 4 = 1\times 4\times 3;$$

ce qui se réduit à $3\times 4 = 4\times 3$, car $1\times 3 = 3$ et $1\times 4 = 4$.

Cette propriété a été démontrée directement (n° 7).

13. *Pour multiplier un nombre par le produit de plusieurs facteurs, il suffit de multiplier successivement par les facteurs du produit;* c'est-à-dire que la multiplication d'un nombre par le produit de plusieurs facteurs se réduit à multiplier ce nombre

par le premier facteur, à multiplier le produit qui en résulte par le second facteur; et ainsi de suite jusqu'au dernier facteur.

Pour fixer les idées, nous proposerons de multiplier 2 par le produit 3.5 (*) des facteurs 3 et 5. Il résulte des propriétés du n° 12, que

$$2 \times 3.5 = 3.5 \times 2 = 3 \times 5 \times 2 = 2 \times 3 \times 5 = 2.3 \times 5.$$

L'égalité $2 \times 3.5 = 2.3 \times 5$ fait voir que pour multiplier 2 par le produit 3.5 des facteurs 3, 5, il suffit, après avoir multiplié 2 par 3, de multiplier le produit 2.3 par 5.

Les mêmes transformations pouvant se faire quels que soient la valeur et le nombre des facteurs, le principe est démontré.

Remarque. *Selon qu'un des facteurs d'un produit augmente ou diminue, le produit augmente ou diminue en même temps,* car on peut prendre pour multiplicande le facteur qui varie, et pour multiplicateur le produit des autres facteurs; et alors il est évident que si le multiplicande augmente ou diminue, le produit doit jouir de la même propriété.

14. *Lorsqu'on multiplie un facteur d'un produit par un nombre, le produit est multiplié par ce nombre.*

En effet; soit le produit des facteurs 2, 3, 4. Si l'on multiplie le facteur 3, par 5, le produit $2 \times 3 \times 4$ deviendra $2 \times 3.5 \times 4$, et sera multiplié par 5, car il résulte des principes des n^os^ 12 et 13, que

$$2 \times 3.5 \times 4 = 2 \times 3 \times 5 \times 4 = 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 2.3.4 \times 5.$$

15. *Le nombre des chiffres d'un produit est au plus égal au nombre des chiffres de ses facteurs, et il ne peut être moindre que le nombre total des chiffres des facteurs diminué du nombre des facteurs et augmenté d'un.* En effet,

1°. Chaque facteur étant moindre que l'unité suivie d'autant de zéro qu'il y a de chiffres dans ce facteur, le produit est moindre que l'unité suivie d'autant de zéro qu'il

(*) L'expression 3.5 indique le produit effectué des facteurs 3 et 5.

y a de chiffres dans tous les facteurs; ce produit ne peut donc pas renfermer plus de chiffres qu'il n'y en a dans tous les facteurs.

2°. Chaque facteur ne saurait être moindre que l'unité suivie d'autant de zéro moins un, qu'il y a de chiffres dans ce facteur. Le produit ne peut donc pas être moindre que l'unité suivie d'un nombre de zéro marqué par le nombre total des chiffres des facteurs diminué du nombre des facteurs.

## *Propriétés relatives à la divisibilité des nombres.*

16. *Quand plusieurs nombres ont un diviseur commun, leur somme a le même diviseur;* car le quotient de chaque nombre par le diviseur commun étant un nombre entier, la réunion de ces quotiens partiels est un nombre entier qui exprime le quotient total de la division de la somme des nombres proposés par le diviseur commun.

17. *Tout diviseur d'un nombre divise donc les multiples de ce nombre.*

18. *Lorsqu'une somme est composée de deux parties, tout nombre qui divise la somme et la première partie divise la deuxième partie;* car la différence entre la somme et la 1re partie étant égale à la 2e partie, si l'on divise la somme et la 1re partie par leur diviseur commun, les deux quotiens seront des nombres entiers, et leur différence, qui sera un nombre entier, exprimera le quotient de la 2e partie par le diviseur commun, ce dernier quotient sera donc effectivement un nombre entier.

19. *Le reste d'une division ne change pas lorsqu'on augmente ou qu'on diminue le dividende d'un multiple du diviseur;* car le reste exprime l'excès du dividende sur le plus grand multiple du diviseur qui y est contenu.

20. *Le reste de la division d'un nombre par* 2 *ou par* 5, *est le même que le reste de la division de son premier chiffre à droite par* 2 *ou par* 5. *Le reste de la division d'un nombre par* $2 \times 2$ *ou par* $5 \times 5$, *est le même que le reste de la divi-*

*sion par* $2 \times 2$ *ou par* $5 \times 5$ *du nombre exprimé par ses deux premiers chiffres à droite. Et ainsi de suite.*

Pour fixer les idées, nous considérerons le nombre 43728 et le diviseur $5 \times 5$. Le nombre 43728 est égal à $43700 + 28$. Or, 43700 est divisible par $5 \times 5$, car 43700 est le produit de 437 par 100, et 100 étant égal à $10 \times 10$, ou à $5 \times 2 \times 5 \times 2$, ou à $5 \times 5 \times 2 \times 2$, *le facteur* 100 *est divisible par* $5 \times 5$. Le reste de la division de 43728 par $5 \times 5$ ou 25 est donc le même que celui de 28 par 25 (n° 19).

Des raisonnemens analogues pouvant s'appliquer à tous les autres cas, le principe énoncé est démontré.

21. *Pour qu'un nombre soit divisible par* 2 *ou par* 5, *il faut et il suffit que le chiffre des unités soit un multiple de* 2 *ou de* 5. *Pour qu'un nombre soit divisible par* $2 \times 2$ *ou par* $5 \times 5$, *il faut et il suffit que ses deux premiers chiffres à droite forment un nombre qui admette ce diviseur, et ainsi de suite.* Cela résulte du principe précédent.

22. *Pour qu'un nombre soit divisible par* 10, *il faut et il suffit que son premier chiffre à droite soit un zéro.*

Par exemple 230 est divisible par 10, car 230 est égal à $23 \times 10$, et 235 n'est pas divisible par 10, car 235, qui est égal à $230 + 5$, se compose de 230 qui est divisible par 10 et de 5 qui n'est pas divisible par 10.

REMARQUE. Les nombres *divisibles* par 2 s'appellent *nombres pairs*, à cause de leur propriété d'être décomposables en deux parties *pareilles*; et par opposition, les autres nombres sont dits *impairs*. De sorte que la suite des *nombres naturels* 1, 2, 3, 4, 5, 6, etc., est composée des *nombres pairs* 2, 4, 6, 8, 10, 12, etc., et des *nombres impairs* 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, etc.

Ainsi, *tout nombre terminé par un des chiffres* 0, 2, 4, 6, 8 *est* PAIR, *et tout nombre terminé par un des chiffres* 1, 3, 5, 7, 9, *est* IMPAIR.

23. *Pour trouver le reste de la division d'un nombre par* 9, *il suffit d'additionner les chiffres du nombre proposé. Quand la somme de ces chiffres est moindre que* 9, *elle exprime le reste cherché; lorsqu'elle est égale à* 9, *le reste est zéro; quand*

*elle surpasse* 9, *on opère sur elle comme sur le nombre propose, en additionnant les chiffres ; et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on parvienne à une somme qui n'excède pas* 9 ; *si cette dernière somme est moindre que* 9, *elle exprimera le reste cherché, et si elle est égale à* 9, *le reste sera zéro.*

En effet : chacun des nombres 10, 100, 1000, etc., est un multiple de 9, augmenté de 1, car ces nombres se décomposent en $9+1$, $99+1$, $999+1$, etc., et les parties 9, 99, 999, etc., sont divisibles par 9. Le nombre exprimé par un chiffre significatif suivi de plusieurs zéro est donc un multiple de 9, augmenté de ce chiffre significatif. Il en résulte que tout nombre est un multiple de 9 augmenté de la somme de ses chiffres significatifs ; le reste de la division d'un nombre par 9 est donc le même que celui de la somme des chiffres significatifs par 9 ; ce qui démontre la propriété énoncée.

Ainsi, pour obtenir le reste de la division de 349 par 9, on dit : 3 et 4 font 7 ; 7 et 9 valent 16 ; 1 et 6 donnent 7 ; le reste demandé est 7.

On peut omettre tous les 9 dans l'addition des chiffres significatifs, car cela revient à diminuer le nombre donné d'un multiple de 9, ce qui ne change pas le reste de la division par 9 (n° 19).

On obtiendrait donc également le reste de la division d'un nombre par 9, en ajoutant ces chiffres, et en retranchant 9 à mesure que la somme égale ou surpasse 9.

24. *Pour obtenir le reste de la division d'un nombre par* 3, *on forme la somme des chiffres de ce nombre ; quand cette somme surpasse* 9, *on additionne ces chiffres, et l'on continue ces additions successives jusqu'à ce qu'on parvienne à une somme qui n'excède pas* 9. *Cette dernière somme, diminuée du plus grand multiple de* 3 *qui peut y être contenu, exprime le reste demandé. Dans l'addition des chiffres significatifs, on peut omettre les multiples* 3, 6, 9, *du diviseur* 3.

En effet ; les nombres 10, 100, 1000, etc., sont des multiples de 3 augmentés de 1, car ces nombres se décomposent en $9+1$, $99+1$, $999+1$, etc. ; et 3 divisant 9, les par-

ties 9, 99, 999, etc., sont divisibles par 3. On en déduit, par des raisonnemens analogues à ceux du n° 23, que le reste de la division d'un nombre par 3 est le même que celui de la somme de ses chiffres significatifs par 3, ce qui conduit à la règle énoncée.

25. *Pour qu'un nombre soit divisible par* 9 *ou par* 3, *il faut et il suffit que la somme de ses chiffres soit un multiple de* 9 *ou de* 3. Cela résulte des propriétés des n^os^ 23 et 24.

26. *Pour obtenir le reste de la division d'un nombre par* 11, *on calcule deux sommes : l'une des chiffres de rang impair à partir de la droite, l'autre des chiffres de rang pair ; de la première somme, augmentée s'il est nécessaire d'un multiple de* 11, *on retranche la seconde somme ; on opère sur le reste de cette soustraction comme sur le nombre donné : et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on parvienne à un reste moindre que* 11 ; *ce dernier reste exprime le reste demandé.*

La démonstration de cette propriété dépend des deux principes suivans :

1°. L'unité suivie d'un nombre pair de zéro, est un multiple de 11 augmenté de 1 ; car

$$100 = 99 + 1,\quad 10000 = 9999 + 1,\quad 1000000 = 999999 + 1,\text{ etc.},$$

et 99 étant divisible par 11, tout nombre composé d'un nombre pair de 9 est divisible par 11.

*Tout chiffre significatif suivi d'un nombre pair de zéro est donc un multiple de* 11 *augmenté de ce chiffre.*

2°. L'unité suivie d'un nombre impair de zéro est un multiple de 11 diminué de 1 ; car

$$10 = 11 - 1,$$
$$1000 = 990 + 10 = 990 + 11 - 1,$$
$$100000 = 99990 + 10 = 99990 + 11 - 1,\text{ etc.}$$

et chacun des nombres 99, 9999, etc., étant divisible par 11, les nombres 10, 1000, 100000, etc., sont des multiples de 11 diminués de 1.

*Tout chiffre significatif suivi d'un nombre impair de zéro est donc un multiple de* 11 *diminué de ce chiffre significatif.*

Cela posé : comme en partant de la droite d'un nombre, la valeur de chaque chiffre de rang impair est exprimée par ce chiffre suivi d'un nombre pair de zéro, le nombre déterminé par ce chiffre est un multiple de 11 augmenté de ce chiffre (1°.). On déduirait de même de (2°.) que chaque chiffre de rang pair exprime un multiple de 11 diminué de ce chiffre. Le nombre donné est donc un multiple de 11 augmenté de la somme des chiffres de rang impair, et diminué de la somme des chiffres de rang pair. Quand la 1re somme n'est pas moindre que la 2e, le nombre est un multiple de 11 augmenté de la différence entre ces deux sommes; de sorte que le reste de la division de cette différence par 11, est le même que celui de la division du nombre proposé par 11. Lorsque la 1re somme est moindre que la 2e, on ramène ce cas au précédent en augmentant cette 1re somme d'un multiple convenable de 11, car cela revient à ajouter ce multiple de 11 au nombre donné, ce qui ne change pas le reste de la division de ce nombre par 11 (n° 19).

On en déduit la règle énoncée.

Ainsi, le reste de la division de 62410 par 11, est $0+4+6$ diminué de $1+2$, ou 7 ; celui de la division de 6241 par 11 est $1+2+11$ diminué de $4+6$, ou 4. Le reste de la division de 827081920 par 11 est $9+8+7+8$ diminué de $2+1+2$, ou $32-5$ ou 27, ou $7-2$, ou enfin 5.

Remarque. *Quand la différence entre la somme des chiffres de rang impair et la somme des chiffres de rang pair est un multiple de* 11, *ou est zéro, le nombre est divisible par* 11 ; car en vertu de la règle précédente, le reste de la division de ce nombre par 11 est zéro.

27. *Lorsqu'on divise deux nombres et leur produit par un même nombre, on obtient trois restes; le produit des deux premiers restes, s'il est moindre que le diviseur, est égal au troisième reste; et s'il n'est pas moindre que le diviseur, en le diminuant du plus grand multiple du diviseur qui y est contenu, le résultat est le troisième reste.*

Pour fixer les idées, considérons les nombres 31 et 65; les restes des divisions de ces nombres par 9 étant 4 et 2.

31 est un multiple de 9 augmenté de 4.
65 est un multiple de 9 augmenté de 2.

Or, le produit de 31 par 65 est composé des quatre produits partiels de chacune des deux parties du multiplicande par chacune des deux parties du multiplicateur; c'est-à-dire du produit de deux multiples de 9, de deux fois un multiple de 9; de quatre fois un multiple de 9, et de deux fois 4; la somme de ces quatre produits, qui exprime le produit de 31 par 65, est donc un multiple de 9 augmenté de deux fois 4; et en effet, le produit de 31 par 65 est 2015, et le reste de la division de 2015 par 9 est $2+1+5$, ou 8, ou $4\times 2$.

Cette propriété conduit à une méthode fort simple pour faire la *preuve de la multiplication par* 9 *et par* 11. Dans la *preuve par* 9, on cherche les restes des divisions du multiplicande, du multiplicateur et du produit par le diviseur 9; le produit des deux premiers restes, diminué du plus grand multiple du diviseur qui peut y être contenu, doit être égal au troisième reste. Quand cette condition n'est pas remplie, on doit en conclure qu'il y a une erreur de calcul.

La *preuve par* 11 s'exécute d'une manière semblable.

Exemple. Soit proposé de *vérifier si* 24451 *est le produit de* 326 *par* 75.

Pour faire la *preuve par* 9, on cherche les restes 2, 3, 7, des divisions par 9 des nombres 326, 75, 24451; le produit 6 des deux premiers restes n'étant pas égal au troisième reste 7, on a nécessairement commis une faute de calcul.

Pour faire la *preuve par* 11, on cherche les restes 7, 9, 9, des divisions par 11 des nombres 326, 75, 24451; le produit 63 des deux premiers restes, diminué de $11\times 5$, n'étant pas égal au 3e reste 9, le produit 24451 n'est pas exact.

Remarque. Le reste de la division d'un nombre par 9 ne changeant pas quand ce nombre augmente d'un multiple de 9, il en résulte que si l'effet produit par des fautes de calcul est tel que

le résultat d'une multiplication est trop fort ou trop faible d'un multiple de 9, la preuve par 9 n'indiquera pas cette erreur.

Par exemple, si en multipliant 47 par 12, on trouvait 582 pour résultat, la preuve par 9 n'indiquerait aucune erreur, et cependant ce résultat est trop fort de $9 \times 2$.

Par une raison semblable, la preuve par 11 est en défaut, quand les erreurs commises sont des multiples de 11.

Le dividende diminué du dernier reste devant être égal au produit du diviseur par le quotient, la méthode précédente donne le moyen de faire la *preuve de la division par* 9 *et par* 11.

28. *Un nombre est dit* PREMIER, *lorsqu'il n'est divisible que par lui-même et par l'unité.*

Il résulte des propriétés des nos 20, 22, 25, 26, que les nombres terminés par un des chiffres 0, 2, 4, 6, 8, sont divisibles par 2, que les nombres terminés par 5 sont divisibles par 5, que tout nombre est divisible par 3 quand la somme de ces chiffres est un multiple de 3, et qu'un nombre est divisible par 11 quand la différence entre la somme des chiffres de rang pair et la somme des chiffres de rang impair, est un multiple de 11 ou est zéro. Aucun de ces nombres (excepté 2, 3, 5 et 11) ne peut donc être *premier.*

Par conséquent : *On ne doit chercher les nombres premiers que parmi les nombres*

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 49, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 91, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 119, 127, 131, 133, 137, 139, 149, 151, 157, 161, 163, 167, 169, 173, 179, 181, etc.

Ceux de ces nombres qui ne sont divisibles par aucun des nombres premiers moindres que leur moitié sont *premiers,* car un nombre n'est jamais divisible par un autre plus grand que sa moitié.

On trouve de cette manière que les nombres premiers

sont (*) :

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, etc.

29. Deux nombres sont dits *premiers entre eux*, quand ils n'ont pas de facteur commun : ainsi, 10 et 21, ou $2\times5$ et $3\times7$, sont *premiers entre eux ;* on dit aussi que 10 est *premier avec* 21.

Les *facteurs* et les *diviseurs* qui sont des nombres *premiers*, prennent aussi les noms de *facteurs premiers* et de *diviseurs premiers*. Ainsi, 35 est le produit des facteurs premiers 5 et 7 ; ces deux derniers nombres sont les diviseurs premiers de 35.

30. Le plus grand de tous les diviseurs communs à plusieurs nombres, est ce qu'on nomme leur *plus grand commun diviseur.*

Nous allons d'abord faire voir comment on peut *trouver le plus grand commun diviseur de deux nombres.*

Pour fixer les idées, nous considérerons les nombres 48 et 18 ; leur plus grand commun diviseur ne pouvant surpasser 18, on est conduit à diviser 48 par 18 ; car, dans le cas où la division réussirait, 18 serait le plus grand commun diviseur demandé ; cela n'arrive pas dans notre exemple, 48 divisé par 18, donne le quotient entier 2, et le reste 12. De sorte que

$$48 = 18 \times 2 + 12 \quad (\text{n}^\circ 9).$$

Il résulte de cette égalité et des propriétés énoncées (n$^{os}$ 16, 17, 18), que le plus grand commun diviseur de 48 et 18 est le même que celui de 18 et 12. En effet, le plus grand commun diviseur à 48 et 18, divise la somme 48 et $18 \times 2$ qui est l'une de ses parties ; il doit donc diviser l'autre partie 12 ; divisant 18 et 12, il ne peut surpasser le plus grand commun diviseur de 18 et 12 ; mais ce dernier divisant 12 et $18 \times 2$,

(*) Les nombres 49, 91, 119, 133, 161, 169, ne sont pas *premiers*, car 169 est divisible par 13 et les autres nombres sont divisibles par 7.

divise la somme 48; il divise donc 48 et 18, il ne peut donc surpasser le plus grand commun diviseur de 48 et 18; ces deux plus grands communs diviseurs ne pouvant pas être plus grands l'un que l'autre, sont égaux.

On peut encore le démontrer en disant : tout nombre qui divise 48 et 18 divisant 12, et tout nombre qui divise 18 et 12 divisant 48, il en résulte que tous les diviseurs communs de 48 et 18 sont les mêmes que ceux de 18 et 12; et que par conséquent, le plus grand commun diviseur de 48 et 18 est le même que celui de 18 et 12.

Les mêmes raisonnemens étant applicables à des nombres quelconques, on voit que *tout diviseur commun à deux nombres divise le reste de leur division*, et que *le plus grand commun diviseur de deux nombres est le même que celui qui existe entre le plus petit de ces nombres et le reste de la division du plus grand nombre par le plus petit.*

La question est ainsi réduite à chercher le plus grand commun diviseur de 18 et 12; pour l'obtenir, on divise 18 par 12, ce qui fournit le quotient 1 et le reste 6. Le plus grand commun diviseur de 18 et 12 est le même que celui de 12 et 6, et 6 divisant exactement 12, ce dernier plus grand commun diviseur est 6. Le plus grand commun diviseur de 48 et 18 est donc 6.

On dispose ordinairement les calculs précédens de cette manière :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Quotiens..... | 2 | 1 | 2 | |
| Dividendes et diviseurs. | 48 | 18 | 12 | 6 |
| | 36 | 12 | 12 | |
| Restes..... | 12 | 6 | 0 | |

En général : *pour trouver le plus grand commun diviseur de deux nombres, divisez le plus grand par le plus petit; si le reste est zéro, le plus petit nombre sera le plus grand commun diviseur cherché; s'il y a un reste, divisez le plus petit des nombres proposés par ce* 1^er^ *reste; si le reste de cette di-*

*vision est zéro, le 1^er^ reste sera le diviseur cherché; dans le cas contraire, divisez le 1^er^ reste par le 2^e^; si le 3^e^ reste est zéro, le 2^e^ sera le diviseur cherché; s'il n'est pas zéro, divisez le 2^e^ reste par le 3^e^. Continuez à diviser les restes successifs les uns par les autres, jusqu'à ce que vous parveniez à un quotient exact; le reste qui divisera exactement le reste précédent sera le plus grand commun diviseur demandé.*

31. On déduit des raisonnemens du n° 24, que *tout diviseur commun à deux nombres divise les restes successifs que l'on obtient en cherchant le plus grand commun diviseur de ces deux nombres*, et que *le plus grand commun diviseur de deux nombres est le même que celui de deux restes consécutifs quelconques.*

Par conséquent : 1°. Tout diviseur commun à deux nombres, divise leur plus grand commun diviseur.

2°. Quand on obtient un reste égal à l'unité, ou lorsque deux restes successifs sont premiers entre eux, ou quand on trouve un reste qui est premier et qui ne divise pas le reste précédent, les deux nombres donnés n'ont pas d'autre commun diviseur que l'unité, et sont *premiers entre eux.*

3°. Lorsque deux nombres sont premiers entre eux, la recherche de leur plus grand commun diviseur conduit nécessairement à un reste égal à l'unité.

32. *Le nombre de divisions à effectuer pour obtenir le plus grand commun diviseur, ne peut jamais excéder la moitié du plus petit des deux nombres proposés.*

En effet : lorsqu'on parvient à deux restes consécutifs dont la différence est 1, en les divisant l'un par l'autre, on trouve le reste 1; ce qui indique que les nombres donnés n'ont pas de facteur commun. Par conséquent, toutes les fois que les nombres proposés ont un commun diviseur autre que l'unité, les restes successifs diminuent au moins de deux unités à chaque division. Ce qui démontre la propriété énoncée.

33. Le reste d'une division étant égal au dividende moins le produit du diviseur par le quotient, il est facile de voir que *lorsqu'on connaît les restes successifs qui sont fournis par*

*la recherche du plus grand commun diviseur entre deux nombres, pour en déduire les restes auxquels conduirait la recherche du plus grand commun diviseur entre les produits de ces deux nombres par un nombre donné, il suffit de multiplier par ce nombre donné, tous les restes obtenus dans la première opération.*

Par exemple, la recherche du plus grand commun diviseur entre 48 et 17 fournissant les restes 14, 3, 2, 1, 0, la recherche du plus grand commun diviseur entre $48\times 5$ et $17\times 5$ donnerait les restes $14\times 5$, $3\times 5$, $2\times 5$, $1\times 5$ et $0\times 5$, ou 0.

34. *Le plus grand commun diviseur de plusieurs nombres* se déduit facilement de ce qui précède.

Par exemple, pour obtenir le plus grand commun diviseur de 48, 18 et 15, on cherche d'abord le plus grand commun diviseur de 48 et 18 qui est 6, et celui de 6 et 15 qui est 3; ce dernier est le plus grand commun diviseur demandé.

En effet: *tout diviseur commun à 48, 18 et 15, devant diviser 48 et 18, divise 6 (n° 31): il doit donc diviser 6 et 15.* Mais 6 étant facteur de 48 et 18, tout diviseur commun à 6 et 15, divise 48, 18 et 15. Le plus grand commun diviseur de 48, 18 et 15, est donc le même que celui de 6 et 15.

Le plus grand commun diviseur de trois nombres est donc le même que celui qui existe entre l'un de ces nombres et le plus grand commun diviseur des deux autres.

Tout diviseur de 48, 18 et 15, divisant 6 et 15, divise le plus grand commun diviseur de 6 et 15, et ce dernier plus grand commun diviseur est celui de 48, 18 et 15. Tout diviseur commun à trois nombres, divise donc leur plus grand commun diviseur.

En général: *Pour trouver le plus grand commun diviseur de plusieurs nombres, il suffit de chercher successivement le plus grand commun diviseur entre le premier nombre et le deuxième; entre le plus grand commun diviseur obtenu et le troisième nombre; et ainsi de suite jusqu'au dernier des nombres donnés;*

*le plus grand commun diviseur fourni par la dernière opération est celui des nombres donnés.*

On trouve de cette manière que le plus grand commun diviseur des nombres 90, 126 et 540, est 18.

35. *Lorsqu'un nombre divise le produit de deux facteurs, s'il est premier avec un des facteurs, il divise nécessairement l'autre facteur.*

En effet, supposons que le nombre 6 divise le produit $35 \times 12$ et soit premier avec le facteur 35; les nombres 35 et 6 n'ayant pas de facteur commun, la recherche de leur plus grand commun diviseur conduirait au reste 1 (n° 31); la recherche du plus grand commun diviseur entre $35 \times 12$ et $6 \times 12$ conduirait donc au reste $1 \times 12$ ou 12 (n° 33). Mais on suppose que 6 divise $35 \times 12$, et $6 \times 12$ est évidemment divisible par 6; le reste 12, auquel conduirait la recherche du plus grand commun diviseur entre $35 \times 12$ et $6 \times 12$, est donc divisible par 6 (n° 31). Ce qui démontre le principe énoncé.

36. *Tout nombre premier qui divise un produit divise nécessairement un des facteurs de ce produit.*

En effet, soit un nombre premier 7 qui divise le produit $9 \times 18 \times 35$; si 7 ne divise pas 9, les nombres 7 et 9 n'auront pas d'autre facteur commun que l'unité et seront par conséquent premiers entre eux. Or, on peut considérer $9 \times 18 \times 35$ comme le produit de 9 par $18.35$; le nombre 7 qui divise le produit de 9 par $18.35$, étant premier avec 9, il faut que 7 divise $18.35$ ou $18 \times 35$. Par une raison semblable, si 7 ne divise pas le facteur 18 du produit $18 \times 35$, les nombres 7 et 18 seront premiers entre eux; il faudra donc que 7 divise 35.

37. Pour *décomposer un nombre en ses facteurs premiers*, on le divise successivement par chacun des nombres premiers, 2, 3, 5, etc. qui n'excèdent pas sa moitié, jusqu'à ce qu'on obtienne un quotient exact (*). On divise ce quotient par le

(*) Si aucune de ces divisions ne réussissait, le nombre proposé serait premier; il ne serait donc pas décomposable en facteurs.

nombre premier qui a servi de diviseur; si le nouveau quotient est exact, on le divise par le même nombre premier; et l'on continue ces divisions jusqu'à ce qu'on obtienne un quotient qui ne soit plus divisible par le nombre premier qui a servi de diviseur. On opère ensuite sur le dernier quotient obtenu comme sur le nombre proposé, en observant que ce quotient ne peut être divisible que par des nombres premiers plus grands que celui qui a servi de diviseur. On continue ces calculs jusqu'à ce qu'on parvienne à un quotient qui soit un nombre premier. Le nombre proposé est égal au produit de ce dernier quotient par tous les nombres qui ont servi de diviseurs.

1^er^ Exemple. *Décomposer* 1155 *en ses facteurs premiers.*

Ce nombre n'est pas divisible par 2 (n° 21); il est divisible par 3 (n° 25) et donne le quotient 385; de sorte que

$$1155 = 3 \times 385.$$

La question se réduit à déterminer les facteurs premiers de 385; ce nombre n'est pas divisible par 3 (n° 25), mais il l'est par 5 (n° 21) et fournit le quotient 77; donc

$$385 = 5 \times 77 \quad \text{et} \quad 1155 = 3 \times 5 \times 77.$$

Il ne s'agit plus que de décomposer 77 en ses facteurs premiers; 77 n'est pas divisible par 5 (n° 21), mais 7 divise 77 et donne le quotient 11; ce quotient étant un nombre premier, on voit que $1155 = 3 \times 5 \times 7 \times 11$.

On dispose ordinairement ce calcul de la manière suivante:

| | |
|---|---|
| 1155 | 3 |
| 385 | 5 |
| 77 | 7 |
| 11 | 11 |

De sorte que tous les facteurs premiers 3, 5, 7, 11, de 1155, se trouvent dans une même colonne verticale.

2e Exemple. *Décomposer* 360 *en ses facteurs premiers.*

On trouve que $360 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5$.

38. Pour *trouver tous les diviseurs d'un nombre*, on le décompose d'abord en ses facteurs premiers; ces facteurs et leurs produits deux à deux, trois à trois, etc., sont les diviseurs demandés.

1er Exemple. *Trouver les diviseurs de* 1155.

On dispose le calcul de la manière suivante :

| | |
|---|---|
| 1155 | 3 |
| 385 | 5, 15 |
| 77 | 7, 21, 35, 105 |
| 11 | 11, 33, 55, 165, 77, 231, 385, 1155. |

Les diviseurs premiers de 1155 étant 3, 5, 7, 11, on obtiendra les autres diviseurs, en formant les produits 2 à 2, 3 à 3, etc., des nombres 3, 5, 7, 11; à cet effet, on multiplie le second diviseur 5 par le premier diviseur 3, et l'on écrit le produit 15 à côté de 5; on effectue la multiplication du troisième diviseur 7, par chacun des diviseurs précédens 3, 5, 15, et l'on écrit les produits 21, 35, 105, à la droite de 7. Enfin, la multiplication du diviseur 11, par chacun des diviseurs précédens 3, 5, 15, 7, 21, 35, 105, donne les autres diviseurs 33, 55, 165, 77, 231, 385, 1155, de 1155.

2e Exemple. *Déterminer les diviseurs de* 360.

On exécute le calcul de la manière suivante :

| | |
|---|---|
| 360 | 2 |
| 180 | 2, 2×2 ou 4 |
| 90 | 2, 2×4 ou 8 |
| 45 | 3, 3×2 ou 6, 3×4 ou 12, 3×8 ou 24 |
| 15 | 3, 3×3 ou 9, 3×6 ou 18, 3×12 ou 36, 3×24 ou 72 |
| 5 | 5, 5×2, 5×4, 5×8, 5×3, 5×6, 5×12, 5×24, 5×9, 5×18, 5×36, et 5×72. |

En effectuant les multiplications indiquées, on trouve que les diviseurs de 360 sont

2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 45, 60, 72, 90, 120, 180, 360.

39. Lorsqu'on a décomposé des nombres en leurs facteurs premiers, on en déduit facilement leur *plus grand commun diviseur,* car il suffit de former un produit dans lequel chacun des facteurs premiers de ces nombres entre autant de fois qu'il se trouve dans celui des nombres donnés où il entre le plus petit nombre de fois.

Par exemple, les nombres 90, 126, 540, décomposés en facteurs premiers, deviennent

$$2\times3\times3\times5,\quad 2\times3\times3\times7,\quad 2\times2\times3\times3\times3\times5.$$

Leur plus grand commun diviseur est donc $2\times3\times3$ ou 18. Le procédé du n° 34 conduit au même résultat.

40. *Pour déterminer le plus petit nombre divisible par des nombres donnés, il suffit de décomposer ces nombres en leurs facteurs premiers, et de former ensuite un produit dans lequel chacun de ces facteurs premiers entre autant de fois qu'il se trouve dans celui des nombres donnés où il entre le plus grand nombre de fois.*

On trouvera de cette manière que le plus petit nombre divisible par 90, 126 et 540 est $2\times2\times3\times3\times3\times5\times7$ ou 3780 ; et que le plus petit nombre divisible par 60, 72 et 175, est 12600.

# CHAPITRE TROISIÈME.

## *Numération et Calcul des fractions. Théorie des décimales.*

41. Nous avons vu (n° 10) que lorsque la division conduit à un reste qui n'est pas nul, le quotient total n'est pas assignable en nombre entier. Par exemple, le quotient de 25 par 7 est plus grand que 3 et moindre que 4. Pour prendre une idée exacte de ce quotient, on observe que 25 étant égal à 21 plus 4, on obtiendra le quotient de la division de 25 par 7 en réunissant celui de 21 par 7 à celui de 4 par 7; or, le quotient de 21 par 7 est 3; il reste donc à diviser 4 par 7. Pour évaluer ce dernier quotient, on conçoit l'unité divisée en 7 parties égales, chacune de ces parties exprime le quotient de 1 par 7, puisque l'une d'elles prise 7 fois donne le dividende 1. Mais, 4 est égal à 1 plus 1 plus 1 plus 1; on obtiendra donc le quotient de 4 par 7, en prenant 4 fois le *septième* de 1; de sorte que le septième de 4 est la même chose que 4 fois le septième de 1. Ajoutant les deux quotiens partiels de 21 par 7 et de 4 par 7, on voit que le quotient total de la division de 25 par 7 est formé de 3 unités, plus de 4 des 7 parties égales dont on peut concevoir que l'unité est composée.

La partie qu'on ajoute aux unités du quotient étant toujours moindre que l'unité, a reçu le nom de *fraction.*

Pour écrire la fraction qui exprime le quotient du dernier reste par le diviseur, on place le diviseur sous ce reste, et l'on sépare ces deux nombres par un trait. Ainsi, le quotient total de 25 par 7, est 3 plus $\frac{4}{7}$, ou plus simplement $3\frac{4}{7}$.

Pour *énoncer les fractions*, on donne des noms particuliers aux diverses subdivisions de l'unité. Selon que l'unité est divisée

en 2, 3, 4, parties égales, chacune de ces parties est appelée *un demi, un tiers, un quart.* Lorsque l'unité est divisée en plus de quatre parties égales, on forme le nom de chaque partie en ajoutant la terminaison *ième* au mot qui désigne le nombre de ces parties.

Comme dans une fraction, le nombre inférieur sert à *dénommer* l'espèce des parties d'unité qui entrent dans la fraction, et comme le nombre supérieur en désigne le *nombre,* le premier s'appelle *dénominateur,* et l'autre *numérateur.* Le numérateur et le dénominateur sont les *deux termes* de la fraction.

*Une fraction peut être considérée, ou comme indiquant le quotient du numérateur par le dénominateur, ou comme exprimant que l'unité a été divisée en autant de parties égales qu'il y a d'unités dans le dénominateur, et qu'on prend autant de ces parties qu'il y a d'unités dans le numérateur.* Nous considérerons les fractions sous ce dernier point de vue, parce qu'il conduit plus facilement aux règles qui servent à les calculer.

42. *Une fraction ne change pas de valeur quand on multiplie ou quand on divise ses deux termes par le même nombre.* En effet, soit la fraction $\frac{3}{7}$; si le dénominateur restant le même, on multiplie le numérateur par 4, elle deviendra $\frac{12}{7}$ et sera rendue quatre fois plus grande, car la 2e fraction contient quatre fois plus de parties que la 1re, et ces parties sont de même grandeur dans les deux fractions. Si le numérateur 3 ne changeant pas, on multiplie le dénominateur par 4, la fraction $\frac{3}{7}$ deviendra $\frac{3}{28}$ et sera rendue quatre fois plus petite, car elle renfermera autant de parties que la fraction $\frac{3}{7}$, et chaque partie sera quatre fois plus petite, puisque l'unité sera divisée en quatre fois plus de parties égales. Cela posé: puisqu'en multipliant le numérateur d'une fraction par 4, on la rend quatre fois plus grande, tandis qu'on la rend quatre fois plus petite en multipliant son

dénominateur par 4, il en résulte qu'elle ne change pas de valeur quand on multiplie ses deux termes par 4.

On prouverait de même, qu'en divisant le numérateur d'une fraction par 4, on la rend quatre fois plus petite; et qu'en divisant le dénominateur par 4, on la rend quatre fois plus grande. *Une fraction ne change donc pas de valeur quand on divise ses deux termes par un même nombre.*

43. *La somme de plusieurs fractions de même dénominateur est égale à une fraction dont le numérateur est la somme des numérateurs des fractions proposées, et dont le dénominateur est le même que celui de ces fractions.* En effet, les dénominateurs étant égaux, les fractions sont composées de parties de même grandeur; or chacun des numérateurs indique le nombre de ces parties; on obtiendra donc leur nombre total en prenant la somme des numérateurs; et pour exprimer que cette somme est formée de parties de même grandeur que celles des fractions proposées, on lui donnera le dénominateur de ces fractions.

Ainsi, la somme des fractions $\frac{2}{7}, \frac{3}{7}$, est composée de 2 parties plus 3 parties égales à $\frac{1}{7}$, ou de 5 parties égales à $\frac{1}{7}$, ou de $\frac{5}{7}$.

On démontrerait de même que *pour soustraire l'une de l'autre deux fractions de même dénominateur, il suffit de prendre la différence entre les numérateurs et de l'affecter du dénominateur commun.* La différence entre $\frac{5}{7}$ et $\frac{2}{7}$ est donc $\frac{3}{7}$.

44. *Pour ajouter ou soustraire des fractions de dénominateurs différens, on les réduit d'abord au même dénominateur, en multipliant les deux termes de chacune d'elles par le produit des dénominateurs de toutes les autres*, et la question est ramenée à la précédente.

Par exemple, pour calculer la somme des fractions $\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{6}{7}$, on les réduit d'abord au même dénominateur; ce qui donne les fractions équivalentes $\frac{70}{105}, \frac{84}{105}, \frac{90}{105}$; la somme des numéra-

teurs 70, 84, 90, étant 244, la somme des fractions proposées est $\frac{244}{105}$.

REMARQUE. Lorsque les dénominateurs des fractions proposées ne sont pas premiers entre eux, on peut réduire ces fractions à un dénominateur commun plus petit que le produit des dénominateurs; car on peut, dans ce cas, déterminer un nombre moindre que ce produit et divisible par chacun des dénominateurs.

Par exemple, les fractions $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{15}$ peuvent être ramenées à trois fractions équivalentes dont le dénominateur est 60, nombre divisible par 3, 6, 15; on trouve les numérateurs de ces nouvelles fractions en divisant successivement 60 par chacun des dénominateurs 3, 6, 15, et en multipliant les numérateurs 2, 5, 7, par les quotiens respectifs 20, 10, 4; on obtient de cette manière les fractions $\frac{40}{60}$, $\frac{50}{60}$, $\frac{28}{60}$ égales aux fractions proposées.

Pour obtenir le plus petit dénominateur commun, il suffit de déterminer (n° 40) le plus petit nombre divisible par chacun des dénominateurs des fractions proposées. Dans l'exemple précédent le plus petit dénominateur commun est 30.

45. *La multiplication d'une fraction par un nombre entier s'exécute en multipliant le numérateur, ou en divisant le dénominateur par ce nombre entier.* Cela se déduit des raisonnemens du n° 42.

Ainsi, le produit de $\frac{5}{28}$ par 4 est $\frac{20}{28}$ ou $\frac{5}{7}$.

*Lorsque le multiplicateur est une fraction, il faut généraliser le sens attaché au mot* MULTIPLIER. *Nous considérerons donc la multiplication comme ayant pour but de calculer un nombre, nommé* PRODUIT, *qui soit composé avec un nombre connu, nommé* MULTIPLICANDE, *de la même manière qu'un nombre donné, nommé* MULTIPLICATEUR, *est composé avec l'unité.*

Il suit de cette définition que *le produit de plusieurs fractions*

*est exprimé par une fraction dont le numérateur est le produit des numérateurs des fractions proposées, et dont le dénominateur est le produit des dénominateurs des mêmes fractions.*

En effet, soit proposé de multiplier $\frac{2}{3}$ par $\frac{4}{5}$; le multiplicateur $\frac{4}{5}$ étant les $\frac{4}{5}$ de l'unité, le produit sera les $\frac{4}{5}$ du multiplicande $\frac{2}{3}$. Or, le 5$^e$ de $\frac{2}{3}$ est $\frac{2}{15}$; les $\frac{4}{5}$ de $\frac{2}{3}$ valent donc 4 fois $\frac{2}{15}$, ou $\frac{8}{15}$.

Remarque. Lorsqu'on multiplie plusieurs fractions entre elles, on prend des *fractions de fractions*. Par exemple, former le produit des fractions $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{7}{11}$, c'est prendre les $\frac{7}{11}$ des $\frac{4}{5}$ de $\frac{2}{3}$, car pour effectuer cette multiplication dans l'ordre indiqué, il faut d'abord multiplier $\frac{2}{3}$ par $\frac{4}{5}$, c'est-à-dire prendre les $\frac{4}{5}$ de $\frac{2}{3}$, ce qui donne $\frac{2\times 4}{3\times 5}$; on doit ensuite multiplier ce produit par $\frac{7}{11}$, c'est-à-dire en prendre les $\frac{7}{11}$; ce qui donne $\frac{2\times 4\times 7}{3\times 5\times 11}$; on a donc pris les $\frac{7}{11}$ des $\frac{4}{5}$ de $\frac{2}{3}$.

En général, pour *évaluer une fraction de fraction*, on effectue le produit de toutes les fractions ordinaires qui entrent dans son énoncé.

46. *La division d'une fraction par une autre s'effectue en multipliant la fraction dividende par la fraction diviseur renversée.* En effet, soit proposé de diviser $\frac{2}{3}$ par $\frac{4}{5}$; le quotient doit être tel que, multiplié par le diviseur $\frac{4}{5}$, il donne un produit égal au dividende $\frac{2}{3}$; les $\frac{4}{5}$ du quotient sont donc égaux

à $\frac{2}{3}$; le 5$^e$ du quotient est donc le quart de $\frac{2}{3}$, ou $\frac{2}{3\times 4}$; le quotient demandé est donc 5 fois $\frac{2}{3\times 4}$, ou $\frac{2\times 5}{3\times 4}$, ou $\frac{2}{3}\times\frac{5}{4}$. Ce qui démontre la règle énoncée.

On en déduit que, *lorsque les fractions ont le même dénominateur, il suffit de diviser le numérateur de la* 1$^{re}$ *par celui de la* 2$^e$, *et lorsqu'elles ont le même numérateur, de diviser le dénominateur de la* 2$^e$ *par celui de la* 1$^{re}$.

47. Les fractions, d'après leur origine, sont moindres que l'unité; mais leur calcul conduit quelquefois à des expressions de même forme plus grandes que l'unité; ces dernières sont des *nombres fractionnaires* ou *expressions fractionnaires*. Cependant nous comprendrons ces deux classes de quantités sous le nom génériques de *fractions*.

Une fraction est d'autant plus grande que son numérateur est plus grand et que son dénominateur est plus petit. Suivant que le numérateur est moindre ou plus grand que le dénominateur, ou est égal au dénominateur, la fraction est moindre ou plus grande que l'unité, ou est égale à l'unité. Ces propriétés résultent de la définition des fractions.

Par conséquent, pour *comparer entre elles les grandeurs de plusieurs fractions*, il suffit de les réduire au même dénominateur.

48. Pour *transformer un nombre entier en une fraction équivalente qui ait un dénominateur donné*, on multiplie le nombre entier par le dénominateur, le produit exprime le numérateur de la fraction demandée, car cela se réduit à multiplier et à diviser le nombre donné par un même nombre, ce qui ne change pas sa valeur. Ainsi, le nombre 5 est équivalent à chacune des fractions $\frac{5\times 3}{3}$, $\frac{5\times 9}{9}$, $\frac{5}{1}$, etc.

49. Une fraction étant égale au quotient de son numérateur par son dénominateur (n° 41), les principes des n$^{os}$ 42 et 47 démontrent les propriétés suivantes : Le quotient ne change pas quand on multiplie ou quand on divise le dividende et le diviseur

par un même nombre; le quotient est d'autant plus grand que le dividende est plus grand et que le diviseur est plus petit; suivant que le dividende est moindre ou plus grand que le diviseur, ou est égal au diviseur, le quotient est moindre ou plus grand que l'unité, ou égal à l'unité; pour multiplier le quotient par un nombre, il suffit de multiplier le dividende ou de diviser le diviseur par ce nombre; réciproquement, le quotient est divisé par un nombre, en divisant le dividende ou en multipliant le diviseur par ce nombre.

50. Pour *trouver les entiers contenus dans un nombre fractionnaire,* on effectue la division du numérateur par le dénominateur. Par exemple, le nombre fractionnaire $\frac{13}{5}$ est composé de 2 unités plus $\frac{3}{5}$, ou de $2\frac{3}{5}$.

51. Les principes précédens comprennent tout le calcul des fractions. Lorsqu'on veut *opérer sur des fractions jointes à des nombres entiers,* on effectue le calcul de la manière que nous allons indiquer :

1°. Dans l'*addition des entiers joints à des fractions,* on calcule la somme des fractions qui accompagnent les entiers, on en extrait les unités qu'elle peut contenir et l'on joint à cette somme les entiers qui accompagnent les fractions; le résultat exprime la somme demandée. Ainsi, pour ajouter $7\frac{5}{9}$ à $3\frac{8}{9}$, on extrait de la somme $\frac{13}{9}$ des fractions $\frac{5}{9}$, $\frac{8}{9}$, l'unité qu'elle contient; ce qui donne $1\frac{4}{9}$; ajoutant à $1\frac{4}{9}$, les entiers 7, 3, le résultat $11\frac{4}{9}$ est la somme demandée.

2°. Dans la *soustraction des entiers joints à des fractions,* on retranche directement la fraction de la fraction et le nombre entier du nombre entier. Quand la fraction à soustraire est la plus grande, on *emprunte* sur la *partie entière* du nombre dont on soustrait. En voici des exemples :

| | |
|---|---|
| de $8\frac{5}{7}$ | de $6\frac{2}{7}$ |
| ôtant $2\frac{3}{7}$ | ôtant $3\frac{4}{7}$ |
| reste $6\frac{2}{7}$ | reste $2\frac{5}{7}$. |

Pour ôter $2\frac{3}{7}$ de $8\frac{5}{7}$, on retranche $\frac{3}{7}$ de $\frac{5}{7}$ et 2 de 8; la réunion des restes partiels compose le reste total $6\frac{2}{7}$. Pour soustraire $3\frac{4}{7}$ de $6\frac{2}{7}$, on emprunte une des 6 unités du plus grand nombre; cette unité, qui vaut $\frac{7}{7}$, jointe aux $\frac{2}{7}$ qu'il y avait déjà, donne $\frac{9}{7}$, desquels ôtant $\frac{4}{7}$, il reste $\frac{5}{7}$; et comme on a emprunté 1 sur le 6, on ôte 3 de 5; ce qui fournit le reste 2; la réunion des restes partiels $\frac{5}{7}$ et 2, forme le reste total $2\frac{5}{7}$.

3°. *Pour la multiplication et la division des entiers joints à des fractions*, on réduit les entiers en fractions et on opère ensuite d'après les règles des n°s 45 et 46.

Les *preuves des quatre règles sur les fractions* s'exécutent comme s'il s'agissait de nombres entiers, avec cette seule différence, que pour l'addition, on doit ajouter à la colonne des fractions la retenue placée sous les unités.

52. On dit qu'une fraction est *irréductible*, lorsqu'elle ne peut se réduire à une forme plus simple, c'est-à-dire quand elle ne peut être exprimée exactement par aucune fraction équivalente ayant des termes respectivement moindres.

Il suit de cette définition, que *les deux termes d'une fraction irréductible n'ont jamais de facteur commun*, et que *deux fractions irréductibles dont les termes sont différens ne peuvent jamais avoir la même valeur.*

* *Quand les deux termes d'une fraction n'ont pas de facteur commun, cette fraction est irréductible.*

En effet, si une fraction $\frac{12}{35}$ dont on suppose que les deux

termes n'ont pas de facteur commun, pouvait être égale à une fraction $\frac{8}{20}$ ayant des termes respectivement moindres, en réduisant ces fractions au même dénominateur $35 \times 20$, les nouveaux numérateurs $12 \times 20$, $8 \times 35$, devraient être égaux; et comme $12 \times 20$ est divisible par 12, le produit $8 \times 35$ devrait être aussi divisible par 12; or on suppose que 12 est premier avec 35; 12 devrait donc diviser 8 (n° 35); ce qui est impossible, puisque le numérateur 12 de la fraction $\frac{12}{35}$ est supposé plus grand que le numérateur 8 de la fraction plus simple $\frac{8}{20}$. La fraction $\frac{12}{35}$ ne peut donc se réduire à une forme plus simple; elle est donc irréductible.

Par conséquent, *pour réduire une fraction à sa plus simple expression, il suffit de diviser ses deux termes par leur plus grand commun diviseur.*

*S'il s'agit de la fraction* $\frac{330}{462}$, on cherchera le plus grand commun diviseur de 462 et 330, qui est 66; et l'on divisera les deux termes par 66, ce qui fournira la fraction irréductible $\frac{5}{7}$.

La fraction $\frac{113}{355}$ est irréductible, car le plus grand commun diviseur de ses deux termes est l'unité.

## *Théorie des décimales.*

53. La simplicité du calcul des nombres entiers, comparée à la complication du calcul des fractions, a fait naître l'idée de subdiviser l'unité principale en parties de dix en dix fois plus petites; ces parties ont été nommées *fractions décimales*, ou *unités décimales*, ou *décimales*; ainsi, l'unité principale se divise en dix parties égales nommées *dixièmes*, chaque dixième vaut dix *centièmes*, un centième vaut dix *millièmes*, etc.

Le système adopté pour écrire les nombres entiers s'applique aux décimales, le 1er chiffre à droite des unités exprime des dixièmes, le 2e des centièmes, le 3e des millièmes, etc. Je distinguerai le chiffre des unités principales en mettant à sa droite une *virgule* de la forme ,.

Le *nombre décimal* 23,45 vaut donc 23 unités plus 4 dixièmes plus 5 centièmes; les chiffres placés à droite de la virgule sont les *chiffres décimaux* ou les *décimales* de ce nombre; ainsi le nombre 23,457 contient trois chiffres décimaux ou trois décimales, sa *partie décimale* est 457, et 23 s'appelle sa *partie entière* ou ses *unités entières,* ou ses *entiers.*

54. D'après ces conventions, *un nombre décimal est multiplié ou est divisé autant de fois par le facteur* 10, *qu'on avance la virgule de rangs vers la droite ou vers la gauche de ce nombre.* Ainsi, en avançant la virgule de deux rangs vers la droite de 3,456, on multiplie ce nombre par $10 \times 10$ ou par 100, car chacun des chiffres du résultat 345,6 exprime des unités cent fois plus grandes. Pour obtenir le quotient de 3,45 par 10000, on place à la gauche de la partie entière un nombre suffisant de zéro pour qu'on puisse avancer ensuite la virgule de quatre rangs vers la gauche; le résultat 0,000345 est le quotient demandé.

55. *Tout nombre décimal équivaut à une fraction dont le numérateur est le nombre décimal abstraction faite de la virgule, et dont le dénominateur est l'unité suivie d'autant de zéro qu'il y a de chiffres à droite de la virgule.* En effet; supprimer la virgule dans un nombre décimal revient à avancer la virgule d'autant de rangs à droite qu'il y a de décimales; on multiplie donc ce nombre par l'unité suivie d'autant de zéro qu'il y a de chiffres à droite de la virgule; il faut donc diviser le résultat par l'unité suivie de ce même nombre de zéro. Par exemple, lorsqu'on supprime la virgule dans le nombre 3,45, le résultat 345 est 100 fois plus grand que 3,45; 3,45 est donc égal à $\frac{345}{100}$.

Pour *convertir en décimales une fraction dont le dénomina-*

*teur est l'unité suivie de plusieurs zéro, on écrit le numérateur et on sépare autant de décimales sur sa droite qu'il y a de zéro dans le dénominateur,* car cela revient à effectuer la division du numérateur par le dénominateur (n° 54); ainsi, $\frac{345}{100}$ est égal à 3,45.

Remarque. Quand le numérateur ne contient pas le nombre de chiffres nécessaire au placement de la *virgule*, on y supplée en mettant des zéro sur la gauche du numérateur. Par exemple, le dénominateur de $\frac{405}{100000}$ contenant 5 zéro, la règle prescrit de séparer 5 décimales sur la droite de 405; on remplace donc 405 par 00405, et séparant les 5 décimales, le résultat 0,00405 exprime la fraction proposée.

56. Pour *énoncer un nombre décimal écrit en chiffres,* on peut le séparer arbitrairement en plusieurs tranches, et énoncer ensuite chaque tranche comme si elle était seule, en ajoutant le nom de l'ordre des unités du premier chiffre à droite de ces diverses tranches. Dans la pratique, on conçoit le nombre décomposé en deux tranches séparées par la virgule; quelquefois on énonce le nombre abstraction faite de la virgule et on ajoute le nom de l'espèce des unités du premier chiffre décimal à droite. Ainsi, 227,39 peut s'énoncer

*Vingt-deux dixaines, sept cent trente-neuf centièmes,*
*ou deux cent vingt-sept unités, trente-neuf centièmes,*
*ou vingt-deux mille sept cent trente-neuf centièmes,*
*ou*, etc.,

Réciproquement, pour *écrire un nombre décimal énoncé,* on écrit successivement, à partir de la gauche, le nombre d'unités de chaque espèce indiqué dans l'énoncé du nombre proposé, et on place ensuite la virgule de manière que chaque chiffre occupe le rang qui convient à l'espèce de ses unités.

57. L'*addition* et la *soustraction des nombres décimaux* s'effectuent comme sur les nombres entiers, en ayant soin de placer les unités de même grandeur les unes sous les autres, et en observant qu'en allant de droite à gauche, dix unités d'un ordre

quelconque en valent une de l'ordre suivant. En voici des exemples :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Nombres à ajouter... | 97,876 | 9,87 | 3705,2 | 9000,40070012 |
| | 45,121 | 45,6 | 89,7501 | 8210,5673 |
| Sommes..... | 142,997 | 55,47 | 3794,9501 | 17210,96800012 |
| Soustractions..... | de.... | 142,997 | 100,21 | 17210,96800012 |
| | ôtez... | 97,876 | 47,873 | 9000,40070012 |
| | reste... | 45,121 | 52,337 | 8210,5673 |

La *multiplication de plusieurs nombres décimaux* s'effectue comme s'il n'y avait pas de virgule, on sépare ensuite autant de décimales sur la droite du produit qu'il y a de chiffres décimaux dans tous les facteurs réunis. En effet, chaque facteur est équivalent à une fraction dont le numérateur est ce facteur dans lequel on a fait abstraction de la virgule, et dont le dénominateur est l'unité suivie d'autant de zéro qu'il y a de décimales dans ce facteur ; le produit demandé est donc égal à une fraction dont le numérateur est le produit de tous les nombres entiers qui résultent de la suppression de la virgule dans les facteurs proposés, et dont le dénominateur est l'unité suivie d'autant de zéro qu'il y a de décimales dans tous les facteurs ; pour convertir cette fraction en décimales, il suffit d'écrire son numérateur et de séparer autant de chiffres décimaux sur sa droite qu'il y a de zéro dans le dénominateur ; ce qui démontre la règle énoncée. Ainsi, pour multiplier 0,04 par 0,0012, on forme le produit 48 de 4 par 12 ; la règle prescrivant de séparer six décimales sur la droite de ce produit, on remplace 48 par 0000048, et séparant les six décimales, le résultat 0,000048 exprime le produit demandé ; on peut d'ailleurs le vérifier, car les facteurs 0,04 et 0,0012, sont équivalens aux fractions $\frac{4}{100}$, $\frac{12}{10000}$, dont le produit est $\frac{48}{1000000}$ ou 0,000048.

*La division de deux nombres décimaux* présente deux cas :

1°. Quand le dividende et le diviseur ont le même nombre de chiffres décimaux, on obtient le quotient en effectuant la division comme s'il n'y avait pas de virgule, car le dividende et

le diviseur sont égaux à des fractions de même dénominateur, dont le quotient s'obtient en divisant le numérateur de la 1re par celui de la 2e; et ces numérateurs sont les nombres décimaux dans lesquels on fait abstraction de la virgule.

2°. Lorsque le dividende et le diviseur ne contiennent pas le même nombre de décimales, on ramène ce cas au précédent en plaçant des zéro à la droite du nombre qui a le moins de décimales. Ainsi, pour diviser 6,8 par 0,034, on remplace 6,8 par le nombre équivalent 6,800; et la division de 6800 par 0034 ou par 34, fournit le quotient 200 demandé.

*Les opérations de l'Arithmétique sur les nombres décimaux se vérifient d'après les règles données pour les nombres entiers.*

Remarque. Pour *opérer sur des nombres entiers et décimaux, combinés avec des fractions*, on transforme tous ces nombres en fractions ordinaires.

58. Pour *réduire une fraction en décimales*, on divise le numérateur par le dénominateur, en ayant soin, lorsqu'on a obtenu les unités du quotient, de placer une virgule de cette forme, sur leur droite, et de convertir les restes successifs en dixièmes, en centièmes, en millièmes, etc. (ces conversions s'effectuent en mettant un zéro sur la droite de chaque reste). Les chiffres qu'on obtient à la suite des unités du quotient expriment les dixièmes, les centièmes, les millièmes, etc., du nombre décimal équivalent à la fraction proposée.

On trouve ainsi que les fractions $\frac{69}{20}$, $\frac{7}{40}$, $\frac{3}{11}$, $\frac{697}{4950}$, sont exprimées par les nombres 3,45, 0,175, 0,272727 etc., 0,0136767 etc.

Les fractions décimales dans lesquelles plusieurs chiffres se répètent dans le même ordre et à l'infini, sont des *fractions décimales périodiques*, et la partie décimale qui se reproduit périodiquement s'appelle la *période*.

Lorsque la période commence au chiffre des dixièmes, la fraction est *périodique simple*; quand la période ne commence qu'après un certain nombre de décimales, la fraction est *périodique mixte*. Ainsi, 0,272727 etc. est une fraction décimale pé-

riodique *simple* dont la période est 27; et $0,13676767$ etc. est une fraction décimale périodique *mixte* dont la période est 67, la *partie non périodique* est 013.

59. *Les fractions décimales périodiques peuvent toujours être converties en fractions ordinaires.* En effet :

1°. Soit la fraction décimale périodique simple $0,272727$ etc.; si l'on pouvait en déduire une autre expression composée de la même partie périodique, en retranchant ces deux expressions l'une de l'autre, la partie périodique disparaîtrait, et il serait facile d'en déduire la valeur de la fraction périodique proposée. Pour y parvenir, on désignera par $x$ la valeur de $0,2727$ etc.;

on aura
$$100 \text{ fois } x = 27,272727 \text{ etc.}$$
$$1 \text{ fois } x = 0,272727 \text{ etc.}$$

Retranchant ces deux égalités l'une de l'autre, et observant que les parties décimales périodiques disparaissent, on trouvera

$$99 \text{ fois } x = 27: \quad \text{donc } x = \frac{27}{99}.$$

Par conséquent : *Toute fraction décimale périodique simple, moindre que l'unité, est équivalente à une fraction ordinaire qui a pour numérateur la période, et pour dénominateur un nombre composé d'autant de 9 qu'il y a de chiffres dans la période.*

2°. Pour convertir une fraction décimale périodique mixte en fraction ordinaire, on place successivement la virgule à droite et à gauche de la première période, ce qui donne deux nombres composés de la même partie périodique; la différence entre ces nombres ne contenant plus la partie périodique, il est facile d'en déduire la valeur de la fraction proposée.

Par exemple, soit la fraction $8,013676767$ etc., dont la période est 67; en désignant sa valeur par $x$, on a

$$100000 \text{ fois } x = 801367,6767 \text{ etc.}$$
$$1000 \text{ fois } x = 8013,6767 \text{ etc.}$$

Retranchant 1000 fois $x$ de 100000 fois $x$, et observant que

les périodes disparaissent, on trouve que

$$99000 \text{ fois } x = 801367 - 8013 ; \text{ d'où } x = \frac{801367 - 8013}{99000}.$$

La comparaison de cette valeur de $x$ avec le nombre $8,013676767$ etc., conduit à la règle suivante :

*Pour convertir une fraction décimale périodique mixte en fraction ordinaire, transportez successivement la virgule à droite et à gauche de la première période; la différence entre les parties entières des nombres décimaux qui en résultent exprime le numérateur de la fraction demandée. Pour former le dénominateur, prenez un nombre composé d'autant de* 9 *qu'il y a de chiffres dans la période, et mettez autant de zéro à la droite de ce nombre qu'il y a de chiffres entre la virgule et la première période.*

Cette règle convient également aux fractions périodiques simples, plus grandes et plus petites que l'unité, en observant que cette espèce de fractions périodiques n'ayant aucun chiffre entre la virgule et la première période, il ne faut pas mettre de zéro à la suite des 9 du dénominateur de la fraction ordinaire équivalente.

Les règles précédentes conduisent aux résultats suivans :

$$0,999 \text{ etc.} = \frac{9}{9} = 1, \quad 0,00999 \text{ etc.} = \frac{9}{900} = \frac{1}{100} = 0,01,$$

$$20,3040404 \text{ etc.} = \frac{20304 - 203}{990} = \frac{20101}{990},$$

$$137,252525 \text{ etc.} = \frac{13725 - 137}{99} = \frac{13588}{99}.$$

60. *On peut toujours s'assurer d'avance si la division du numérateur d'une fraction par son dénominateur conduira à un quotient exact.* En effet :

1°. *Quand le dénominateur est l'unité suivie de plusieurs zéro, la division fournit un quotient exact;* et la règle du n° 55 conduit directement au nombre décimal qui est équivalent à la fraction proposée.

2°. *Lorsque le dénominateur, n'étant pas l'unité suivie de plu-*

*sieurs zéro, ne contient que les facteurs premiers 2 et 5 de la* BASE 10, *la fraction peut toujours s'exprimer exactement en décimales;* car en multipliant les deux termes de la fraction un certain nombre de fois par 2 ou par 5, de manière que chacun des facteurs 2 et 5 entre le même nombre de fois dans le nouveau dénominateur, on la transforme en une fraction équivalente dont le dénominateur est l'unité suivie de plusieurs zéro.

La fraction $\frac{7}{40}$ est de cette espèce, car

$$\frac{7}{40} = \frac{7}{2\times2\times2\times5} = \frac{7\times5\times5}{2\times2\times2\times5\times5\times5} = \frac{7\times5\times5}{10\times10\times10} = \frac{175}{1000} = 0{,}175.$$

La division de 7 par 40 conduirait au même résultat (n° 58).

REMARQUE. Le dénominateur de la fraction $\frac{7}{40}$ contenant *trois* fois le facteur 2 et une fois le facteur 5, on voit que cette fraction est exprimée par un nombre qui a *trois* chiffres décimaux.

En général : lorsque le dénominateur d'une fraction irréductible ne renferme que les facteurs 2, 5, et n'est pas l'unité suivie de plusieurs zéro, pour découvrir combien il y aura de chiffres décimaux dans le nombre décimal qui exprime la fraction proposée, il suffit de chercher quel est celui de ces facteurs qui entre le plus grand nombre de fois dans le dénominateur ; ce nombre de fois indique le nombre des chiffres décimaux demandé.

3°. *Quand le dénominateur d'une fraction irréductible contient d'autres facteurs que 2 et 5, la fraction ne peut pas se réduire exactement en décimales, et le quotient qui se prolonge indéfiniment est périodique.*

En effet, les deux termes de la fraction proposée n'ayant pas de facteur commun, les facteurs autres que 2 et 5 qui entrent dans le dénominateur y resteront toujours quand on multipliera les deux termes par un même nombre; on ne pourra donc pas transformer la fraction donnée en une fraction ayant pour dénominateur l'unité suivie de plusieurs zéro ; la fraction proposée ne se réduira donc pas exactement en déci-

males, car tout nombre décimal est équivalent à une fraction dont le dénominateur est l'unité suivie de plusieurs zéro.

La division du numérateur par le dénominateur de la fraction proposée conduira donc à un quotient composé d'une infinité de chiffres ; d'ailleurs les restes successifs étant moindres que le diviseur, on parviendra nécessairement à un reste déjà obtenu ; multipliant ce reste par 10, et continuant la division, on aura pour dividendes partiels des nombres égaux aux précédens et qui se succéderont dans le même ordre ; donc on retrouvera au quotient, dans le même ordre, des chiffres qui ont été déjà obtenus. Par conséquent le quotient sera périodique.

Exemple. Soit la fraction $\frac{3}{11}$.

La règle du n° 58 conduit au calcul suivant :

| | |
|---|---|
| 1er dividende partiel... 3 unités. | 11 diviseurs. |
| | 1er quotient partiel... 0 unités. |
| 2e dividende partiel... 30 dixièmes. | 2e quotient partiel... 2 dixièmes. |
| 3e dividende partiel... 80 centièmes. | 3e quotient partiel... 7 centièmes. |
| 4e dividende partiel... 30 millièmes. | 4e quotient partiel... 2 millièmes. |
| 5e dividende partiel... 80 dix-mill. | 5e quotient partiel... 7 dix-mill. |
| etc..... etc. | etc..... etc. |
| | Quotient total..... 0,272727 etc. |

La comparaison du 4e dividende partiel avec le 2e fait voir que les chiffres décimaux 2, 7, obtenus au quotient, doivent se reproduire à l'infini et dans le même ordre, car le 2e dividende partiel 30 dixièmes ayant donné le quotient 27 centièmes et le reste 30 millièmes, le 4e dividende partiel 30 millièmes, qui est cent fois plus petit que le 2e, déterminera un quotient cent fois plus petit, 27 dix-millièmes, avec un reste cent fois plus petit, 30 cent-millièmes ; et ainsi de suite ; ce qui conduira au quotient périodique indéfini 0,272727 etc.

Remarque. On approche d'autant plus de la valeur de $\frac{3}{11}$ qu'on calcule plus de décimales au quotient. En effet, les restes alternatifs 8 et 3, diminuent très rapidement de valeur, car ils représentent successivement des dixièmes, des centièmes, etc. ;

et comme en les divisant par 11, on trouve ce qui manque au quotient obtenu pour être exact, on peut toujours prendre assez de décimales au quotient pour que le nombre décimal qui en résulte diffère d'aussi peu qu'on voudra de $\frac{3}{11}$.

61. 1°. *Lorsque le dénominateur d'une fraction ne contient aucun des facteurs 2 et 5, la réduction de cette fraction en décimales conduit toujours à un quotient périodique simple.*

Si l'on réduit d'abord cette fraction à sa plus simple expression, on obtiendra une fraction irréductible dont le dénominateur ne contiendra aucun des facteurs 2 et 5. La conversion de cette dernière fraction en décimales fournissant toujours un quotient périodique (n° 60, 3°.), il suffit de prouver que la période commencera nécessairement aux dixièmes.

Si le quotient était périodique mixte, il serait exprimé par une fraction ordinaire dont le dénominateur serait terminé par un ou plusieurs zéro (n° 59, 2°.); cette fraction étant égale à une fraction irréductible dont le dénominateur ne renferme aucun des facteurs 2 et 5 de 10, tous les facteurs 2 et 5 de son dénominateur devraient entrer dans son numérateur, qui devrait être par conséquent divisible par 10; le premier chiffre de ce numérateur devrait donc être un zéro; or, il est facile de conclure de la règle du n° 59, 2°., que ce premier chiffre ne peut jamais être un zéro. La période commence donc aux dixièmes.

Par exemple, soit la fraction $\frac{6}{63}$ dont le dénominateur ne renferme aucun des facteurs 2 et 5; elle se réduit à $\frac{2}{21}$, ou à $\frac{2}{3\times 7}$. Si la division de 2 par 21 pouvait fournir un quotient périodique mixte, tel que $0,2345656$ etc., par exemple, la période étant 56, la règle du n° 59, 2°., donnerait

$$0,2345656 \text{ etc.} = \frac{23456 - 234}{99000}.$$

Cette fraction ordinaire devant se réduire à $\frac{2}{3\times 7}$, tous les

facteurs 2 et 5 du dénominateur 99000 doivent pouvoir disparaître, ce qui exige qu'ils entrent en même nombre dans le numérateur 23456 — 234 ; ce numérateur doit donc être divisible par 10 ; son premier chiffre à droite doit donc être un zéro ; il faudrait donc qu'après avoir retranché 234 de 23456, le premier chiffre du reste fût zéro, le dernier chiffre 4 de la partie non périodique devrait donc être égal au dernier chiffre de la période ; ce qui est contre l'hypothèse. Il est donc absurde de supposer que la période ne commence pas aux dixièmes.

2°. *Quand le dénominateur d'une fraction irréductible contient des facteurs 2 et 5 combinés avec d'autres facteurs, la réduction de cette fraction en décimales conduit toujours à un quotient périodique mixte.*

En effet, soit la fraction $\frac{7}{30}$ dont le dénominateur est le produit des facteurs 2, 3, 5. Si la division de 7 par 30 pouvait conduire à un quotient périodique simple, à 0,3737 etc. par exemple, la règle du n° 59, 1°., donnant

$$0,373737 \text{ etc.} = \frac{37}{99},$$

les fractions $\frac{7}{30}$, $\frac{37}{99}$, seraient égales ; et en les réduisant au même dénominateur les nouveaux numérateurs $7 \times 99$, $37 \times 30$ seraient égaux. Or, par l'hypothèse, le dénominateur 30 de la fraction proposée est divisible par 2 et par 5 ; le produit $7 \times 99$ serait donc divisible par 2 et par 5. Mais, la fraction $\frac{7}{30}$ étant supposée irréductible, le numérateur 7 n'est divisible par aucun des facteurs 2, 5, du dénominateur ; le nombre 99 serait donc divisible par 2 et par 5 ; ce qui est impossible, puisqu'un nombre terminé par un 9 n'est divisible ni par 2 ni par 5 (n° 21).

62. *Lorsqu'un nombre n'est pas terminé par une infinité de 9, la totalité des chiffres que l'on supprime vers sa droite a toujours une valeur moindre qu'une unité du dernier ordre conservé.*

Par exemple, soit le nombre $37,46785$ etc.; en supprimant tous les chiffres placés à la droite du chiffre 6 des centièmes, la partie supprimée $0,00785$ etc., est moindre que la fraction décimale périodique mixte $0,00999$ etc., ou qu'un centième (n° 59).

Par conséquent : *Pour obtenir la valeur d'un nombre à moins d'une unité décimale d'un ordre donné, il suffit de supprimer les chiffres qui expriment des unités inférieures à cet ordre.*

D'après cela, *pour trouver la valeur d'une fraction ordinaire à moins d'une unité décimale d'un ordre donné,* il ne s'agit que d'effectuer la division du numérateur par le dénominateur, d'après la règle du n° 58, et de continuer le calcul jusqu'au chiffre du quotient qui exprime des unités décimales de l'ordre donné.

On trouve ainsi que la valeur, à moins d'un millième d'unité, de la fraction $\frac{3}{11}$, ou du quotient de 3 par 11, est $0,272$.

63. Pour *approcher le plus possible de la valeur d'un nombre décimal, en supprimant plusieurs chiffres à sa droite,* distinguez trois cas : si le premier chiffre à supprimer est moindre que 5, supprimez-le avec ceux qui le suivent; s'il est plus grand que 5, ou si, étant 5, il est suivi d'autres chiffres significatifs, augmentez d'un le dernier chiffre conservé; s'il est égal à 5 et n'est pas suivi d'autres chiffres significatifs, vous pourrez laisser le dernier chiffre à conserver tel qu'il est, ou l'augmenter d'un. Dans ces trois cas, l'erreur ne saurait excéder une demi-unité du dernier ordre conservé.

Par exemple, suivant qu'on ne veut conserver que deux ou trois décimales, la valeur la plus approchée possible de $5,6237$ etc., est $5,62$ ou $5,624$; car, dans le 1$^{er}$ cas, en prenant $5,62$, la partie négligée $0,0037$ etc. est moindre que $0,005$ ou qu'un demi-centième; et, dans le 2$^{e}$ cas, $0,0007$ etc. étant plus grand que $0,0005$, ce qu'il faut ajouter à $5,6237$ etc. pour obtenir $5,624$, est moindre que $0,0005$ ou qu'un demi-millième.

64. Nous allons faire voir comment on peut *abréger la multiplication de deux nombres qui contiennent beaucoup de chiffres, lorsqu'on n'a besoin que d'une valeur approchée du produit.*

EXEMPLE. *Calculer le produit de* $8,74623$ *etc. par* $2,34567$ *etc. à moins d'un dixième d'unité.*

Pour y parvenir, on effectue la multiplication de manière que le premier chiffre à droite de chaque produit partiel exprime des *millièmes*, c'est-à-dire des unités cent fois plus petites que celles du premier chiffre à droite du produit demandé. Ce qui conduit au calcul suivant :

| | | | |
|---|---|---|---|
| Multiplicande..... | | | $8,74623$ etc. |
| Multiplicateur..... | | | $2,34567$ etc. |
| $2$ | fois $8,746$ | donnent | $17,492$ |
| $0,3$ | fois $8,74$ | donnent | $2,622$ |
| $0,04$ | fois $8,7$ | donnent | $0,348$ |
| $0,005$ | fois $8$ | donnent | $0,040$ |
| Somme des produits partiels.... | | | $20,502$. |

Le produit cherché est $20,5$.

En effet; lorsqu'on a multiplié par le chiffre 2 des unités du multiplicateur, on a négligé dans le multiplicande les unités *inférieures aux millièmes*; l'erreur qui en résulte dans le produit partiel correspondant est donc moindre que 2 fois $0,000999$, etc., ou que 2 fois $0,001$ ou que $0,002$.

On prouverait de même que, dans les trois autres produits partiels, les erreurs sont respectivement moindres que

$$0,3 \times 0,01, \quad 0,04 \times 0,1, \quad 0,005 \times 1$$

ou que $0,003$ , $0,004$ , $0,005$.

Or, en négligeant le reste $0,00067$ etc. du multiplicateur, l'erreur qui en résulte dans le produit total est moindre que $8,74623$ etc. $\times$ $0,000999$ etc., ou que $8,74623$ etc. $\times$ $0,001$, ou que $0,00874623$ etc.

L'erreur qui a été introduite dans le produit total est donc moindre que la somme $0,022746$ etc., des nombres

$$0,002, \quad 0,003, \quad 0,004, \quad 0,005, \quad 0,00874623 \text{ etc.}$$

Cette erreur est donc effectivement moindre qu'un dixième d'unité.

# CHAPITRE QUATRIÈME.

## *Mesures anciennes et nouvelles. Calcul des nombres complexes et incomplexes.*

### *Mesures anciennes.*

65. Les *anciennes mesures* sont composées d'un grand nombre d'unités différentes; les subdivisions de ces unités ne sont soumises à aucune loi constante. Nous nous bornerons à indiquer les mesures qui étaient le plus en usage

1°. Les *longueurs* s'évaluent en *toises, pieds, pouces, lignes, points,* et *aunes*. La *lieue* et le *mille* servent à évaluer les *distances.*

La toise se divise en 6 pieds, le pied en 12 pouces, le pouce en 12 lignes, et la ligne en 12 points.

L'aune est de 3 pieds 7 pouces 10 lignes $\frac{5}{6}$.

La *lieue de poste* vaut 2000 toises ou 2 *milles.*

2°. Les *surfaces* de peu d'étendue se mesurent avec des *toises quarrées* (*), des pieds quarrés, des pouces quarrés, etc.

L'*aune quarrée* est une surface qui a une aune de long sur une aune de large; cette largeur se divise habituellement en *tiers;* en *quarts* et en *huitièmes*. Une aune à $\frac{5}{8}$ est une surface qui a une aune de long sur $\frac{5}{8}$ d'aune de large. Ainsi, une aune quarrée vaut 3 aunes à $\frac{1}{3}$ ou 4 aunes à $\frac{1}{4}$ ou 8 aunes à $\frac{1}{8}$.

(*) Les définitions exactes du *quarré* et du *cube* ne peuvent se donner qu'en *Géométrie.*

Les surfaces des terrains s'évaluent en *arpens* et en *perches*.

La perche de Paris est un quarré dont chaque côté a 18 pieds, cette surface est de 324 pieds quarrés; l'arpent vaut 100 perches.

3°. Les *volumes* s'évaluent en *toises cubes*, en *pieds cubes*, etc. On mesure les *matières sèches*, telles que les *grains*, avec le *setier* qui se divise en 12 *boisseaux*, et le boisseau qui vaut 16 *litrons*. Pour mesurer les *liquides*, on fait usage du *muid* et de la *pinte*, le muid de Paris vaut 288 pintes.

4°. L'unité de *poids* est la *livre poids* qui vaut 16 *onces*, l'once vaut 8 *gros*, le gros vaut 3 *deniers* et le denier vaut 24 *grains*.

5°. L'ancienne *unité monétaire* est la *livre tournois* qui se décompose en 20 *sous*; un sou vaut 12 *deniers*.

6°. Les *mesures temporaires* ou de *durée* sont : l'*année* qui se divise en 365 *jours*, le jour qui est de 24 *heures*, l'heure qui vaut 60 *minutes*, et la minute qui vaut 60 *secondes*. La collection de 100 années se nomme un *siècle*.

On a adopté des *signes* particuliers pour *simplifier l'écriture des diverses mesures*. Ainsi, pour désigner 2 toises 3 pieds 4 pouces 5 lignes, on écrit $2^{\mathrm{T}}\,3^{pi}\,4^{po}\,5^{li}$; l'expression $12^{\#}\,3^{\mathscr{s}}\,5^{\mathscr{d}}\,\frac{2}{11}$ représente 12 livres 3 sous 5 deniers plus $\frac{2}{11}$ de denier; pour indiquer 15 livres 7 onces 4 gros 2 deniers 9 grains, et 2 heures 3 minutes 5 secondes, on écrit $15\text{lb}\ 7^{o}\ 4^{c}\ 2^{\mathscr{d}}\ 9^{g}$, et $2^{h}\ 3'\ 5''$.

On déduit de ce qui précède que

$$1^{\mathrm{T}}=6^{pi}=72^{po}=864^{li},\quad 1\text{lb}=16^{o}=128^{c}=384^{\mathscr{d}}=9216^{g},\quad 1^{\#}=20^{\mathscr{s}}=240^{\mathscr{d}}.$$

66. Pour *opérer sur des nombres concrets*, on commence par examiner s'ils satisfont à certaines conditions que nous allons faire connaître, et qui leur sont imposées par la nature de chaque règle; lorsque ces conditions sont remplies, on opère sur les nombres en faisant abstraction de l'espèce de leurs unités; le nombre abstrait qu'on obtient exprime de combien d'unités le résultat cherché se compose; l'espèce de ces unités est déterminée par l'état de la question.

Ainsi, dans l'*addition* comme dans la *soustraction*, les nombres sur lesquels on opère doivent être composés d'unités de même nature, et les unités du résultat sont de même nature que celles des nombres sur lesquels on a opéré.

Dans la *multiplication*, le multiplicateur est essentiellement *abstrait*, et les unités du produit sont de même nature que celles du multiplicande.

Dans la *division*, lorsque le dividende et le diviseur sont composés d'unités de même nature, le quotient est un nombre abstrait qui exprime combien de fois le diviseur est contenu dans le dividende. Quand le dividende est concret et le diviseur abstrait, le quotient est de la nature du dividende; la division sert alors à partager le dividende en autant de parties égales qu'il y a d'unités dans le diviseur, et le quotient exprime l'une de ces parties.

Par exemple, la somme des nombres 7 toises, 4 toises, est 11 toises, leur différence est 3 toises; le produit de 7 toises par 4 est 28 toises. Le quotient de 56 toises par 8 toises est 7; il exprime que 8 toises est contenu 7 fois dans 56 toises; et l'on obtient la septième partie de 56 toises en divisant 56 toises par 7, ce qui donne 8 toises.

## *Calcul des nombres complexes.*

67. Pour *additionner des nombres complexes*, on écrit les unités de même grandeur les unes sous les autres, et l'on ajoute successivement ces unités en commençant par les plus petites, afin de pouvoir joindre les retenues aux colonnes suivantes. En voici des exemples :

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Nombres à ajouter..... | $7^{T}$ | $5^{pi}$ | $11^{po}$ | $\frac{3}{4}$ | | $18^{tt}$ | $12^{s}$ | $10^{d}$ | $\frac{2}{3}$ |
| | 9 | 4 | 10 | $\frac{4}{5}$ | | 18 | 7 | 4 | $\frac{2}{3}$ |
| Sommes..... | $17^{T}$ | $4^{pi}$ | $10^{po}$ | $\frac{11}{20}$ | | $37^{tt}$ | $0^{s}$ | $3^{d}$ | $\frac{1}{3}$. |

Pour effectuer la première addition, on commence par les

fractions de pouce, et l'on dit : $\frac{3}{4}$ plus $\frac{4}{5}$ valent $\frac{31}{20}$, ou $1 + \frac{11}{20}$ ; on pose $\frac{11}{20}$, et la retenue $1^{po}$ jointe aux $21^{po}$ contenus dans la colonne des pouces donne $22^{po}$. Pour extraire les pieds contenus dans $22^{po}$, on divise 22 par 12, ce qui donne 1 au quotient et 10 de reste; les $22^{po}$ valent donc $1^{pi}\ 10^{po}$; on met les $10^{po}$ dans la colonne des pouces, et la retenue $1^{pi}$ jointe à $5^{pi} + 4^{pi}$, donne $10^{pi}$, ou $1^{T}\ 4^{pi}$; on écrit les $4^{pi}$, et la colonne des toises augmentée de la retenue $1^{T}$, donne $17^{T}$ que l'on pose au rang des toises.

On a effectué la seconde addition d'après les mêmes principes.

68. Pour *soustraire deux nombres complexes l'un de l'autre*, on prend les différences entre leurs unités de même grandeur, en commençant par les plus petites, afin de rendre les *emprunts possibles*. Voici des exemples :

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| De..... | $17^{T}$ | $4^{pi}$ | $10^{po}$ | $\frac{11}{20}$ | De..... | $37^{\#}$ | $0^{s}$ | $3^{d}$ | $\frac{1}{3}$ |
| ôtez..... | 9 | 4 | 10 | $\frac{4}{5}$ | ôtez..... | 18 | 7 | 4 | $\frac{2}{3}$ |
| Reste..... | $7^{T}$ | $5^{pi}$ | $11^{po}$ | $\frac{3}{4}$ | Reste..... | $18^{\#}$ | $12^{s}$ | $10^{d}$ | $\frac{2}{3}$. |

Dans le premier exemple, comme on ne peut ôter $\frac{4}{5}$ ou $\frac{16}{20}$, de $\frac{11}{20}$, on emprunte $1^{po}$ sur les $10^{po}$; cet emprunt joint à $\frac{11^{po}}{20}$ donne $\frac{31^{po}}{20}$; on ôte $\frac{16}{20}$ de $\frac{31}{20}$, ce qui fournit le reste $\frac{15}{20}$ ou $\frac{3}{4}$, que l'on écrit au rang des fractions de pouce du résultat. Le nombre dont on soustrait ne contenant plus que 9 pouces, on emprunte $1^{pi}$ sur les $4^{pi}$, et l'on retranche les $10^{po}$ de $1^{pi}\ 9^{po}$ ou de $21^{po}$; on écrit le reste 11 pouces. Passant à la colonne des pieds, on emprunte $1^{T}$ ou $6^{pi}$, et l'on retranche $4^{pi}$ de $1^{T}\ 3^{pi}$ ou de $9^{pi}$, ce qui donne le reste $5^{pi}$. Enfin, on obtient les 7 toises du reste total en retranchant $9^{T}$ de $16^{T}$.

On a effectué la seconde soustraction d'après les mêmes principes.

69. Pour *multiplier un nombre complexe par un nombre entier abstrait*, il suffit d'effectuer la multiplication de chaque partie du multiplicande par le multiplicateur, en commençant par les plus petites unités.

EXEMPLE. *Former le produit de* $12^{\#}\ 2^{\mathcal{S}}\ 3^{\mathfrak{H}}\ \frac{2}{11}$ *par* 12.

On dispose le calcul de la manière suivante :

| | |
|---|---|
| Multiplicande..... | $12^{\#}\ 2^{\mathcal{S}}\ 3^{\mathfrak{H}}\ \frac{2}{11}$ |
| Multiplicateur..... | 12 |
| Produit..... | $145^{\#}\ 7^{\mathcal{S}}\ 2^{\mathfrak{H}}\ \frac{2}{11}$. |

et l'on dit: 12 fois $\frac{2}{11}$ valent $\frac{24}{11}$ ou $2\ \frac{2}{11}$, j'écris $\frac{2}{11}$ et je retiens les $2^{\mathfrak{H}}$ pour les joindre à 12 fois $3^{\mathfrak{H}}$; cela donne $38^{\mathfrak{H}}$ ou $3^{\mathcal{S}}\ 2^{\mathfrak{H}}$; je pose $2^{\mathfrak{H}}$ au produit, et ajoutant la retenue $3^{\mathcal{S}}$ à 12 fois $2^{\mathcal{S}}$, je trouve $27^{\mathcal{S}}$ ou $1^{\#}\ 7^{\mathcal{S}}$; j'écris $7^{\mathcal{S}}$ au produit, et la retenue $1^{\#}$ augmentée de 12 fois $12^{\#}$, donne $145^{\#}$.

Le produit total est donc $145^{\#}\ 7^{\mathcal{S}}\ 2^{\mathfrak{H}}\ \frac{2}{11}$.

70. Pour *diviser un nombre concret par un nombre entier abstrait*, on commence par les plus hautes unités du dividende, et l'on convertit successivement chaque reste en unités de l'ordre immédiatement inférieur, pour obtenir les unités des différens ordres du quotient.

1^er^ EXEMPLE. *Trouver le quotient de* $15^{T}$ *par* 4.

La division de $15^{T}$ par 4 fournit le quotient 3 toises, et le reste $3^{T}$ ou $18^{pi}$; on divise $18^{pi}$ par 4, ce qui donne $4^{pi}$ au quotient, le reste est $2^{pi}$ ou $24^{po}$; enfin la division de $24^{po}$ par 4 donnant un quotient exact $6^{po}$, on voit que le quotient demandé de $15^{T}$ par 4 est $3^{T}\ 4^{pi}\ 6^{po}$.

2^e^ EXEMPLE. *Trouver le quotient de* $145^{\#}\ 7^{\mathcal{S}}\ 2^{\mathfrak{H}}\ \frac{2}{11}$ *par* 12.

On divise $145^{\#}$ par 12, ce qui fournit le quotient $12^{\#}$, et le

reste $1^{\#}$ ou $20^{\mathcal{S}}$; on ajoute les $7^{\mathcal{S}}$ du dividende, la somme $27^{\mathcal{S}}$ divisée par 12 donne le quotient $2^{\mathcal{S}}$, et le reste $3^{\mathcal{S}}$ ou $36^{\mathfrak{H}}$; ajoutant les $2^{\mathfrak{H}}$ du dividende, on divise $38^{\mathfrak{H}}$ par 12, ce qui conduit au quotient $3^{\mathfrak{H}}$ et au reste $2^{\mathfrak{H}}$; on divise $2^{\mathfrak{H}}\frac{2}{11}$ ou $\frac{24^{\mathfrak{H}}}{11}$ par 12, le quotient est $\frac{2^{\mathfrak{H}}}{11}$; la somme de ces quotiens partiels détermine le quotient total $12^{\#}\,2^{\mathcal{S}}\,3^{\mathfrak{H}}\frac{2}{11}$.

Remarque. *La multiplication et la division d'un nombre complexe par une fraction* se déduisent de ce qui précède, car cela se réduit à multiplier et à diviser successivement un nombre complexe par un nombre entier.

Exemple. *Déterminer le produit de* $12^{\#}\,2^{\mathcal{S}}\,3^{\mathfrak{H}}\frac{2}{11}$ par $\frac{12}{7}$.

On multiplie $12^{\#}\,2^{\mathcal{S}}\,3^{\mathfrak{H}}\frac{2}{11}$ par 12, et on divise le résultat par 7; ce qui donne $20^{\#}\,15^{\mathcal{S}}\,3^{\mathfrak{H}}\frac{57}{77}$ pour le produit demandé.

71. La division d'un nombre complexe par un nombre entier abstrait fournit le moyen de *simplifier les calculs relatifs à la multiplication d'un nombre complexe par un nombre entier abstrait;* à cet effet, on décompose le multiplicande de manière que les produits partiels se déduisent les uns des autres.

Exemple. *Calculer le produit de* $12^{\#}\,2^{\mathcal{S}}\,3^{\mathfrak{H}}\frac{2}{11}$ par 12.

On dispose l'opération de la manière suivante :

| | |
|---|---|
| Multiplicande..... | $12^{\#}\,2^{\mathcal{S}}\,3^{\mathfrak{H}}\frac{2}{11}$ |
| Multiplicateur..... | 12 |
| 12 fois $12^{\#}$, font..... | $144^{\#}\,0^{\mathcal{S}}\,0^{\mathfrak{H}}$ |
| 12 *fois* $1^{\#}$, *donneraient* $12^{\#}$, | |
| 12 fois $2^{\mathcal{S}}$, donnent donc le dixième de $12^{\#}$, ou..... | $1\;4\;0$ |
| 12 fois $3^{\mathfrak{H}}$, donnent le huitième de $1^{\#}\,4^{\mathcal{S}}$, ou..... | $0\;3\;0$ |
| 12 *fois* $2^{\mathfrak{H}}$, *donneraient* $2^{\mathcal{S}}$, | |
| 12 fois $\frac{2^{\mathfrak{H}}}{11}$, donnent donc le onzième de $2^{\mathcal{S}}$, ou..... | $0\;0\;2\;\frac{2}{11}$ |
| 12 fois $12^{\#}\,2^{\mathcal{S}}\,3^{\mathfrak{H}}\frac{2}{11}$, font donc..... | $145^{\#}\,7^{\mathcal{S}}\,2^{\mathfrak{H}}\frac{2}{11}$. |

Et l'on dit : 12 fois $12^{\#}$ font $144^{\#}$ ; 12 fois $1^{\#}$ donneraient $12^{\#}$; mais $2^{\mathit{s}}$ est le dixième de $1^{\#}$, 12 fois $2^{\mathit{s}}$ donneront donc le dixième de $12^{\#}$ ou $1^{\#}\,4^{\mathit{s}}$ ou $24^{\mathit{s}}$; et comme $3^{\mathit{d}}$ est le huitième de $2^{\mathit{s}}$, 12 fois $3^{\mathit{d}}$ donneront le huitième de $24^{\mathit{s}}$, ou $3^{\mathit{s}}$. Enfin, 12 fois $2^{\mathit{s}}$ ayant donné $1^{\#}\,4^{\mathit{s}}$ ou $24^{\mathit{s}}$, et $2^{\mathit{d}}$ étant le douzième de $2^{\mathit{s}}$, le produit de $2^{\mathit{d}}$ par 12 est le douzième de $24^{\mathit{s}}$, ou $2^{\mathit{s}}$ ou $24^{\mathit{d}}$; le produit de $\frac{2}{11}$ de denier par 12, sera donc le onzième de $24^{\mathit{d}}$, ou $2^{\mathit{d}}\,\frac{2}{11}$. La somme des produits partiels des différentes parties du multiplicande par le multiplicateur détermine le produit total $145^{\#}\,7^{\mathit{s}}\,2^{\mathit{d}}\,\frac{2}{11}$.

On a obtenu le produit total en décomposant le multiplicande en *parties aliquotes* les unes des autres, c'est-à-dire en parties qui sont contenues exactement les unes dans les autres. Ce procédé est connu sous le nom de *méthode des parties aliquotes*.

Cette méthode peut servir à effectuer la *multiplication d'un nombre complexe par le nombre des unités et parties d'unité indiqué par un autre nombre complexe.*

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1er Exemple. *Le prix d'une toise étant*..... | $12^{\#}$ | $2^{\mathit{s}}$ | $3^{\mathit{d}}$ | $\frac{2}{11}$ |
| *Quel est le prix de*... ..... | $12^{\mathrm{T}}$ | $5^{pi}$ | $8^{po}$ | |
| 1°. Prix des 12 toises..... | $145^{\#}$ | $2^{\mathit{s}}$ | $2^{\mathit{d}}$ | $\frac{2}{11}$ |
| 2°. Prix des $5^{pi}$ — Prix de $3^{pi}$ ou de $\frac{1^{\mathrm{T}}}{2}$..... | 6 | 1 | 1 | $\frac{13}{22}$ |
| 2°. Prix des $5^{pi}$ — Prix de $2^{pi}$ ou de $\frac{1^{\mathrm{T}}}{3}$..... | 4 | 0 | 9 | $\frac{2}{33}$ |
| 3°. Prix de $8^{po}$, ou de $\frac{1}{3}$ de $2^{pi}$..... | 1 | 6 | 11 | $\frac{2}{99}$ |
| Prix total des $12^{\mathrm{T}}\,5^{pi}\,8^{po}$..... | $156^{\#}$ | $15^{\mathit{s}}$ | $11^{\mathit{d}}$ | $\frac{167}{198}$. |

Le prix d'une toise pris 12 fois, fournit le prix de 12 toises.

Pour trouver le prix de $5^{pi}$, on décompose $5^{pi}$ en $3^{pi}$ plus $2^{pi}$; la moitié du prix d'une toise donne le prix de 3 pieds, et le tiers du prix de la toise exprime le prix des 2 pieds.

Enfin, 8 pouces étant le tiers de 2 pieds, le tiers du prix des 2 pieds détermine le prix des 8 pouces.

La somme des prix de $12^{T}$, de $3^{pi}$, de $2^{pi}$ et de $8^{po}$, donne le prix total des $12^{T}\,5^{pi}\,8^{po}$.

Ce calcul se réduit à décomposer l'ouvrage dont on cherche le prix, en parties aliquotes les unes des autres, de manière que le prix de chaque partie de l'ouvrage devienne une partie aliquote d'un prix déjà obtenu.

2^e^ EXEMPLE. *Une toise d'ouvrage coûtant* $18^{\#}\,18^{s}\,9^{d}$, *trouver le prix de* 4 *pieds* 8 *pouces* 8 *lignes.*

On pourrait chercher les prix des parties aliquotes $3^{pi}$, $1^{pi}$, $6^{po}$, $2^{po}$, $6^{li}$ et $2^{li}$, mais il est plus simple de décomposer l'ouvrage total en $2^{pi}$, $2^{pi}$, $8^{po}$, $8^{li}$, car le tiers du prix d'une toise exprime le prix de $2^{pi}$ ou de $24^{po}$; le tiers de ce dernier prix donne le prix des $8^{po}$, et le douzième du prix de $8^{po}$ est le prix de 8 lignes.

On trouve ainsi que le prix cherché est $14^{\#}\,18^{s}\,1^{d}\,\frac{1}{12}$.

72. Occupons-nous de la *division de deux nombres complexes l'un par l'autre.*

1^er^ EXEMPLE. *Une toise d'ouvrage coûte* $9^{s}\,10^{d}\,\frac{14}{31}$; *combien aura-t-on de toises pour* $1^{\#}\,5^{s}\,6^{d}$?

Le prix d'une toise multiplié par le nombre de toises cherché étant $1^{\#}\,5^{s}\,6^{d}$, on obtiendra ce nombre de toises en divisant $1^{\#}\,5^{s}\,6^{d}$ par $9^{s}\,10^{d}\,\frac{14}{31}$.

Pour *ramener la question à diviser deux nombres entiers l'un par l'autre*, on fait d'abord disparaître le dénominateur 31, en multipliant le dividende et le diviseur par 31, ce qui ne change pas le quotient; les produits sont $39^{\#}\,10^{s}\,7^{d}$ et $15^{\#}\,6^{s}$; on fait disparaître successivement les deniers et les sous en multipliant ces produits par 2, et les résultats par 20; ce qui donne $1581^{\#}$ et $612^{\#}$. Le nombre de toises cherché étant $\frac{1581^{\#}}{612^{\#}}$, ou $\frac{1581}{612}$, on divise 1581 toises par 612; le quotient 2 toises 3 pieds 6 pouces est le résultat demandé.

On peut simplifier ce dernier calcul, car la fraction $\frac{1581}{612}$ se réduisant à $\frac{31}{12}$, il suffit de diviser 31 toises par 12.

2ᵉ Exemple. *Trouver le prix de la toise, lorsque 2 toises 3 pieds 6 pouces coûtent* $1^{\#}\,5^{\mathcal{S}}\,6^{\mathcal{d}}$. On dit :

$2^{T}\,3^{pi}\,6^{po}$, coûtant $1^{\#}\,5^{\mathcal{S}}\,6^{\mathcal{d}}$,
2 fois $2^{T}\,3^{pi}\,6^{po}$ ou $5^{T}\,1^{pi}$, coûtent 2 fois $1^{\#}\,5^{\mathcal{S}}\,6^{\mathcal{d}}$ ou $2^{\#}\,11^{\mathcal{S}}$,
6 fois $5^{T}\,1^{pi}$ ou $31^{T}$, coûtent 6 fois $2^{\#}\,11^{\mathcal{S}}$ ou $15^{\#}\,6^{\mathcal{S}}$.

Une toise coûte donc la $31^{ième}$ partie de $15^{\#}\,6^{\mathcal{S}}$, ou $9^{\mathcal{S}}\,10^{\mathcal{d}}\,\frac{14}{31}$.

On voit que *la division de deux nombres complexes l'un par l'autre peut toujours se ramener à celle d'un nombre concret par un nombre entier abstrait.*

73. Pour *convertir une fraction concrète en nombre complexe*, il suffit d'effectuer la division du numérateur par le dénominateur.

On trouve de cette manière que les fractions concrètes

$$\frac{51^{\#}}{46}, \qquad \frac{153^{\#}}{310}, \qquad \frac{31^{T}}{12},$$

sont exprimées par les nombres complexes

$$1^{\#}\,5^{\mathcal{S}}\,6^{\mathcal{d}}, \quad 9^{\mathcal{S}}\,10^{\mathcal{d}}\,\frac{14}{31}, \quad 2^{T}\,3^{pi}\,6^{po}.$$

Réciproquement, *tout nombre complexe peut être converti en fraction de l'une quelconque de ses unités.*

Exemple. Pour transformer $2^{T}\,3^{pi}\,6^{po}$ en fraction de la toise, on observe qu'une toise valant $6^{pi}$, les $2^{T}\,3^{pi}$ forment $15^{pi}$, ou 15 fois $12^{po}$, ou $180^{po}$; les $2^{T}\,3^{pi}\,6^{po}$ valent donc 180 pouces; et comme $1^{po}$ est le $72^{ième}$ d'une toise, les $186^{po}$ valent $\frac{186}{72}$ d'une toise, ou $\frac{186^{T}}{72}$, ou $\frac{31^{T}}{12}$.

Si l'on voulait convertir le nombre proposé en fraction de

pied, on dirait : $2^{T}\,3^{pi}$ valent $15^{pi}$; 6 pouces font $\frac{1^{pi}}{2}$ ; les $2^{T}\,3^{pi}\,6^{po}$ valent donc $15^{pi}\,\frac{1}{2}$, ou $\frac{31^{pi}}{2}$.

REMARQUE. La conversion des nombres complexes en fractions ferait dépendre le calcul des nombres complexes de celui des fractions, mais on parvient plus simplement au résultat en opérant directement sur les nombres complexes proposés.

74. Les méthodes précédentes donnent le moyen de *convertir les fractions concrètes et les nombres complexes, en décimales de l'une quelconque des unités de ces nombres.*

EXEMPLE. Pour transformer $1^{\#}\,5^{\mathcal{S}}\,6^{\mathcal{H}}$ en décimales de la livre, on exprime d'abord ce nombre en fraction de la livre; ce qui donne $\frac{51^{\#}}{40}$ ; le quotient de 51 par 40 étant 1,275, le nombre proposé vaut $1^{\#},275$.

### SYSTÈME DES NOUVELLES MESURES.

75. Dans ce système, toutes les mesures sont liées entre elles et dérivent d'une unité principale qui peut se vérifier dans tous les temps et dans tous les pays; la nomenclature ne présente qu'un petit nombre de mots, et le calcul se distingue par sa simplicité, puisqu'il ne s'effectue que sur des nombres décimaux.

## *Des mesures linéaires ou de longueur.*

1°. Pour déterminer l'*unité de longueur*, nommée MÈTRE, on a cherché la longueur de l'arc du méridien terrestre qui mesure la distance du pôle à l'équateur (*); cette longueur, qui exprime le quart de la circonférence de la terre, a été trouvée de 5130740 toises ou de 30784440 pieds; sa dix-millionième partie, qui est $0^{T},513074$ ou $3^{pi},078444$ ou $3^{pi}\,1\,1^{lig},295936$, exprime la lon-

(*) On a déduit cette longueur de la mesure de l'arc du méridien terrestre qui est compris entre *Dunkerque* et l'île de *Formentera*.

gueur du mètre; de sorte qu'un mètre vaut environ 3 pieds 11 lignes $\frac{296}{1000}$ de ligne.

*Toutes les mesures dérivent du mètre.*

Les *mesures linéaires*, ou de longueur, sont des multiples et des sous-multiples décimaux du mètre.

On compose les mesures plus grandes ou plus petites que l'unité principale en faisant précéder le nom de cette unité des mots

*Myria*, *kilo*, *hecto*, *déca*, *déci*, *centi*, *milli*.

qui désignent respectivement,

*dix mille*, *mille*, *cent*, *dix*, *dixième*, *centième*, *millième*.

Ainsi, le *myriamètre* vaut dix mille mètres; le *centimètre* est le centième du mètre; etc.

Les multiples et les subdivisions des autres unités concrètes suivent la même loi.

Pour exprimer la distance d'un lieu à un autre, on fait usage du *myriamètre* qui vaut 10000 mètres, ou 10000 fois $0^{T},513074$ ou $5130^{T},74$, et du *kilomètre* qui vaut $513^{T},074$.

## *De la mesure des Poids.*

2°. L'unité de poids est le *gramme;* il équivaut au poids d'un centimètre cube d'eau distillée ramenée à son *maximum* de densité; ce poids, exprimé en mesures anciennes, est de $18^{grains},82715$.

Le *kilogramme*, ou la *livre poids nouvelle*, ou la *livre décimale*, équivaut donc à $18827^{grains},15$.

## *Des Monnaies.*

3°. La nouvelle unité monétaire est le *franc.*

La pièce d'un franc est un alliage pesant cinq grammes, qui contient les neuf dixièmes de son poids d'argent pur, et un dixième de cuivre.

Le dixième d'un franc s'appelle un *décime*, et le centième d'un franc est un *centime*. On compte actuellement par francs, décimes et centimes.

Les nouvelles *monnaies de cuivre* sont les petites pièces d'un *centime*, qui valent un centième de franc; la pièce de 5 centimes ou le nouveau sou, qui vaut $\frac{5}{100}$ ou $\frac{1}{20}$ de franc; la pièce d'un *décime* ou le nouveau *gros sou*, qui vaut un dixième de franc ou dix centimes.

Les *monnaies d'argent* sont les pièces d'un *franc*, d'un demi-franc, d'un quart de franc, de 2 francs et de 5 francs.

Remarque. La pièce de 5 francs pesant 25 grammes, on voit que 40 pièces de 5 francs pèsent 1000 grammes ou un *kilogramme*.

Les monnaies d'or sont les pièces de 20 francs et de 40 francs, qui remplacent le louis et le double louis.

Les pièces de 20 francs ont 21 millimètres de diamètre, et celles de 40 francs ont 26 millimètres de diamètre.

Pour *former la longueur du mètre*, il suffit de mettre les unes à la suite des autres, 34 pièces de 20 francs et 11 pièces de 40 francs, car la somme des diamètres de ces 45 pièces est 34 fois 21 millimètres plus 11 fois 26 millimètres, ou 1000 millimètres, ou 1 mètre.

## *Mesures de Superficie.*

4°. L'unité de surface est le *mètre quarré*.

L'unité qui a été adoptée pour mesurer les surfaces des terrains, est un quarré de 10 mètres de côté, nommé *are*.

Ainsi, l'are équivaut à $10 \times 10$ ou 100 mètres quarrés, ou à 100 quarrés d'un mètre de côté.

La centième partie de l'are, ou *centiare*, vaut un mètre quarré.

La collection de cent ares se nomme *hectare* et non pas *hecto-are*.

L'hectare, qui vaut $100 \times 100$ ou 10000 mètres quarrés, est par conséquent un quarré de 100 mètres de côté.

## *Des mesures de Volume et de Capacité.*

5°. *L'unité de volume* est le *mètre cube.*

Le mètre cube prend le nom de *stère,* lorsqu'il sert à mesurer les bois de chauffage.

L'unité de capacité, pour les liquides et les grains, est le *litre;* il équivaut à un *décimètre cube.* Les mesures usitées sont l'*hectolitre,* le *décalitre,* le *litre,* le *décilitre;* ces mesures ont la forme cylindrique, mais elles contiennent autant de liquide que les mesures cubiques indiquées.

Par exemple, un litre contient autant de liquide qu'un cube qui aurait un décimètre de côté.

Le litre remplace la pinte (pour les boissons), et le litron (pour les grains). Il est un peu plus grand que la pinte et le litron. Le décalitre remplace le boisseau pour mesurer les grains; l'hectolitre remplace le setier.

## *Numération et Calcul des nouvelles mesures.*

76. *La numération et le calcul des nombres décimaux conviennent aux nombres complexes qui expriment les nouvelles mesures,* car ces mesures sont soumises à la subdivision décimale.

Pour *énoncer une nouvelle mesure exprimée par un nombre décimal,* on énonce d'abord le nombre décimal en faisant abstraction de la nature de ses unités, et l'on remplace ensuite l'unité abstraite par l'unité concrète dont il s'agit.

Ainsi, le nombre $227^{m},39$ peut s'énoncer :

*Deux cent vingt-sept mètres, trente-neuf centimètres,*
ou *vingt-deux mille sept cent trente-neuf centimètres.*

RÉCIPROQUEMENT. Pour *mettre en chiffres le nombre concret qui exprime une nouvelle mesure,* on écrit d'abord ce nombre d'après la règle du n° 56, en faisant abstraction de l'espèce de l'unité concrète, on place ensuite sur la droite du chiffre des unités la lettre initiale du nom de l'unité concrète.

Par exemple, le nombre deux cent vingt-sept mètres trente-neuf centimètres s'écrit de cette manière $227^{m},39$.

Pour *rapporter une nouvelle mesure exprimée par un nombre décimal à l'une quelconque des unités concrètes de son espèce,* on transporte la virgule sur la droite du chiffre qui exprime les unités de l'ordre donné. S'il s'agit de convertir $4567^{m},8$ en hectomètres, on écrira $45^{hectom},678$.

Quand le nombre des chiffres nécessaires au déplacement de la virgule n'est pas suffisant, on y supplée par des zéro ; ainsi, pour convertir $5^{décam},27$ en kilomètres, on écrit $0^{kilom},0527$.

L'*addition* et la *soustraction* des nombres rapportés à la même unité s'effectuent d'après la règle du n° 57.

Quand les nombres expriment des unités de grandeurs différentes, on ramène la question à la précédente en les rapportant à la même unité. S'il s'agit des nombres $377^{décim},4$ et $0^{kilog},009368$, on les rapporte d'abord à la même unité, au mètre par exemple ; ce qui donne $37^{m},74$ et $9^{m},368$ ; opérant sur ces deux derniers nombres, on trouve que leur somme est $47^{m},108$, et que leur différence est $28^{m},372$.

La *multiplication* et la *division* s'exécutent d'après les règles du même n° 57 ; on trouve que le produit de $0^{m},04$ par $0,0012$ est $0^{m},000048$, et que le quotient de $0^{m},000048$ par $0,04$ est $0^{m},0012$.

Les règles des n^os^ 62 et 63 s'appliquent aux nouvelles mesures ; la valeur de $3^{m},57842$ à moins d'un décimètre ou d'un centimètre près, est $3^{m},5$ ou $3^{m},57$ ; la valeur la plus approchée de ce nombre en ne conservant que deux ou trois décimales, est $3^{m},58$ ou $3^{m},578$, et l'erreur est moindre qu'un demi-centimètre ou qu'un demi-millimètre.

## *Conversion des mesures anciennes en nouvelles et réciproquement.*

77. 1°. On sait que $1^{m} = 0^{T},513074$.

Or, $1^{T} = 6^{pi} = 72^{po} = 864$ lignes.

Il est facile d'en déduire que

$$1^{m} = 6^{pi} \times 0{,}513074 = 3^{pl}{,}078444$$
$$= 36^{po}{,}941328 = 443^{li}{,}295936.$$

$$1^{T} = \frac{1000000^{m}}{513074} = 1^{m}{,}9490 \text{ etc.},$$

$$1^{pi} = \frac{1^{T}}{6} = \frac{1000000^{m}}{513074 \times 6} = \frac{1^{m}{,}9490 \text{ etc.}}{6} = 0^{m}{,}3248 \text{ etc.},$$

$$1^{po} = \frac{1^{T}}{72} = \frac{1000000^{m}}{513074 \times 72} = \frac{0^{m}{,}3248 \text{ etc.}}{12} = 0^{m}{,}02707 \text{ etc.},$$

$$1^{li} = \frac{1^{T}}{864} = \frac{1000000^{m}}{513074 \times 864} = \frac{0^{m}{,}027 \text{ etc.}}{12} = 0^{m}{,}00225 \text{ etc.}$$

2°. Une aune étant les $\frac{3161}{6}$ d'une ligne, on trouve que

$$1^{aune} = \frac{3161}{6} \text{ de } \frac{1000000^{m}}{513074 \times 864} = \frac{3161000000^{m}}{2659775616} = 1^{m}{,}1884 \text{ etc.},$$

$$1^{mètre} = \frac{2659775616^{au}}{3161000000} = 0^{au}{,}841434 \text{ etc.}$$

3°. On a trouvé, par des expériences très délicates, qu'un gramme pèse $18^{grains}{,}82715$; on sait d'ailleurs qu'un grain est la $9216^{ième}$ partie d'une livre-poids. Par conséquent

$$1^{gramme} = \frac{1882715}{100000} \text{ grains} = \frac{1882715^{lb}}{921600000},$$

$$1^{lb} = \frac{921600000}{1882715} \text{ grammes.}$$

4°. Une pièce d'un franc pèse 5 grammes, ou $94^{grains}{,}13575$; le franc contient en argent fin les $\frac{9}{10}$ de son poids, c'est-à-dire les $\frac{9}{10}$ de $94^{grains}{,}13575$ ou $84^{grains}{,}722175$, et des expériences fort exactes ont fait voir que la livre *tournois* contient..... $83^{grains}{,}675936$ d'argent fin. Par conséquent,

Un grain d'argent fin vaut $\frac{1^{franc}}{84{,}722175}$ ou $\frac{1^{lt}}{83{,}675936}$.

Réduisant ces deux fractions au même dénominateur, les numérateurs seront égaux; ce qui donnera

$$83^{f},675936 = 84^{\#},722175; \quad \text{d'où}$$

$$1^{\#} = \frac{83675936^{f}}{84722175} = 0^{f},98765094262 5 \text{ etc.}$$

$$1^{f} = \frac{84722175^{\#}}{83675936} = 1^{\#},012503463361 \text{ etc.}$$

78. *Il sera facile de déduire des rapports précédens, le moyen de convertir les mesures anciennes en nouvelles, et réciproquement;* mais on simplifie ces calculs à l'aide des *Tables* placées à la fin de ce volume.

1^er^ Exemple. Pour *convertir* 907 *toises en mètres,* on décompose ce nombre en $900^{T}$ plus $7^{T}$; la conversion de ces parties en mètres s'effectue à l'aide de la première *table* et du déplacement de la *virgule;* voici le détail du calcul :

| | |
|---|---|
| 9 toises valent $17^{m},54133$; les $900^{T}$ valent donc.. | $1754^{m},133$ |
| les 7 toises valent..... | $13^{m},643 26$ |
| les 907 toises valent donc..... | $1767^{m},177626$. |

2^e^ Exemple. Pour *convertir* $1767^{m},776$ *en toises*, on exprime en toises les nombres d'unités de chaque espèce exprimés par les différens chiffres du nombre proposé, et on trouve qu'il vaut $906^{T},99$ etc.

3^e^ Exemple. *Trouver le prix du mètre, lorsqu'une toise coûte* $12^{\#}$. On voit dans la 1^re^ *table* qu'un mètre vaut $0^{T},513 07$; multipliant le prix $12^{\#}$ d'une toise, par le nombre $0,513 07$ qui exprime combien il faut de toises pour composer un mètre, le produit $6^{\#},15684$ ou $6^{\#}\ 3^{s}\ 1^{d},6$ etc. est le prix du mètre.

4^e^ Exemple. *Déterminer le prix de la toise, quand le mètre coûte* $6^{\#}\ 3^{s}\ 1^{d},6$. On convertit $6^{\#}\ 3^{s}\ 1^{d},6$ en décimales; ce qui donne $6^{\#},15666$ etc.; et comme une toise vaut $1^{m},94904$, on multiplie le prix $6^{\#},15666$ etc. d'un mètre, par le nombre $1,94904$ qui indique combien il y a de mètres dans une toise; on trouve que le prix cherché est $12^{\#}$, à moins d'un millième de livre près.

5^e^ Exemple. On propose de *convertir des livres tournois en*

*francs, et réciproquement.* L'égalité

$$1^f = 1^{\#},0125e3463361 \text{ etc.}, \text{ donnant } 80^f = 81^{\#},$$

à moins de $0^{\#},0003$ près, on voit que *pour convertir des livres en francs, il suffit de diminuer le nombre des livres de leur* $81^{ième}$ *partie,* et que *pour convertir des francs en livres, il n'y a qu'à augmenter le nombre des francs de leur* $80^{ième}$ *partie.*

Remarque. On obtient la $81^{ième}$ partie d'un nombre, en le divisant d'abord par 9, et en prenant le $9^{ième}$ du quotient. On trouve la $80^{ième}$ partie d'un nombre, en le divisant d'abord par 10, et en prenant le $8^{ième}$ du quotient.

# CHAPITRE CINQUIÈME.

## *Problèmes d'Arithmétique* (*).

79. Ce chapitre est destiné à faire voir comment *on peut résoudre les problèmes d'Arithmétique les plus compliqués, à l'aide des seules combinaisons des quatre règles.* Nous supposerons, pour plus de simplicité, que les fractions qui entrent dans les énoncés des problèmes ont été réduites au même dénominateur.

### *Règles de Trois.*

80. 1^er^ Problème. *Quatre ouvriers ont fait* 20 *mètres d'ouvrage; combien* 9 *ouvriers en feront-ils ?*

L'ouvrage fait est d'autant plus grand qu'il y a plus d'ouvriers (**) ; or,

(*) J'ai trouvé en 1800 les méthodes indiquées dans ce chapitre pour résoudre les problèmes. Je les ai publiées à cette époque sous le titre d'*Introduction à l'Algèbre.*

(**) On suppose que tout est d'ailleurs égal, c'est-à-dire que les ouvriers sont de même force et qu'ils travaillent pendant le même temps. Cette observation s'applique à tous les problèmes; de sorte que *les résultats ne dépendent que des quantités énoncées.*

4 ouvriers ont fait 20 mètres,
1 ouvrier ferait donc le quart de $20^m$, ou 5 mètres ;
les 9 ouvriers feront donc 9 fois $5^m$, ou 45 mètres.

2e Problème. *Il a fallu 4 journées pour faire 20 mètres d'ouvrage ; combien faudra-t-il de journées pour faire 45 mètres ?*

Puisque 20 mètres d'ouvrage seront faits en 4 journées,
1 mètre serait fait dans le 20e de $4^j$, ou en $\frac{4^j}{20}$ ou en $\frac{1}{5}$ de journée,
les $45^m$ seront donc faits en 45 fois $\frac{1^j}{5}$, ou en 9 journées.

3e Problème. *Trois ouvriers ont fait un ouvrage en 15 heures ; combien 5 ouvriers mettraient-ils d'heures à faire le même ouvrage ?*

3 ouvriers ont fait l'ouvrage en 15 heures,
1 ouvrier ferait donc cet ouvrage en 3 fois $15^h$, ou en 45 heures ;
les 5 ouvriers feront donc l'ouvrage en $\frac{45^h}{5}$, ou en 9 heures.

4e Problème. *Il a fallu 3 journées à 15 heures de travail par jour, pour exécuter un ouvrage ; combien faudrait-il de journées pour faire le même ouvrage, si l'on ne travaillait que 9 heures par jour ?*

Puisqu'en travaillant $15^h$ par jour, il faut 3 journées,
si l'on ne travaillait que $1^h$ par jour, il faudrait 15 fois $3^j$, ou 45 journées ;
donc, lorsqu'on travaille $9^h$ par jour, il faut le 9e de $45^j$, ou 5 journées.

5e Problème. *Combien faut-il de mètres de toile à $\frac{5}{8}$, pour doubler 30 mètres de drap à $\frac{6}{8}$ ?*

Si la toile avait $\frac{6}{8}$ de large, il en faudrait..... 30 mètres.
Si la toile n'avait que $\frac{1}{8}$, il en faudrait 6 fois plus, c'est-à-dire.. 180 mètres.
La toile ayant $\frac{5}{8}$, il n'en faut que le cinquième de $180^m$, qui est... 36 mètres.

6e Problème. *Trois ouvriers ont fait 2 toises 5 pieds d'ou-*

*vrage; combien* 5 *ouvriers feront-ils de mètres du méme ouvrage?*

Les $2^T$ $5^{pl}$ valant $5^m,52227$, on dira :

3 ouvriers ont fait $5^m,52227$,
1 ouvrier fera donc le tiers de $5^m,52227$, ou $1^m,84075$ etc.
Les 5 ouvriers feront donc 5 fois $1^m,84075$ etc., ou $9^m,2037$ etc.

7ᵉ Problème. *Deux ouvriers qui travaillent* 3 *heures par jour, ont fait en* 5 *jours,* 90 *mètres d'ouvrage; combien* 3 *ouvriers travaillant* 7 *heures par jour, feront-ils du méme ouvrage en* 2 *jours?*

2 ouvriers travaillant 3 heures par jour, font en 5 jours... $90^m$.
1 ouv. travaill. 3 heures par jour, fait en 5 j., la moitié de $90^m$, ou $45^m$.
1 ouv. travaill. 1 heure par jour, fait en 5 j., le tiers de $45^m$, ou $15^m$.
1 ouv. travaill. 1 heure par jour, fait en 1 j., le 5ième de $15^m$, ou $3^m$.
3 ouv. travaill. 1 heure par jour, feront en 1 jour, 3 fois $3^m$, ou $9^m$.
3 ouv. travaill. 7 heures par jour, feront en 1 jour, 7 fois $9^m$, ou $63^m$.
Les 3 ouv. trav. 7 heures par jour, feront en 2 jours. 2 fois $63^m$, ou $126^m$.

8ᵉ Problème. *Deux ouvriers qui travaillent* 3 *heures par jour, ont fait en* 5 *jours,* 90 *mètres d'ouvrage; combien faudra-t-il de jours à* 3 *ouvriers qui travaillent* 7 *heures par jour, pour faire* 126 *mètres du méme ouvrage?*

$90^m$ sont faits par 2 ouv., travaill. 3 h. par j., pendant 5 *jours*
$1^m$ sera fait par 2 ouv., travaill. 3 h. par j., pendant $\frac{5}{90}$ j. ou $\frac{1}{18}$ j.
$1^m$ sera fait par 1 ouv., travaill. 3 h. par j., pendant $\frac{2}{18}$ j. ou $\frac{1}{9}$ j.
$1^m$ sera fait par 1 ouv., travaill. 1 h. par j., pendant $\frac{3}{9}$ j. ou $\frac{1}{3}$ j.
$126^m$ seront faits par 1 ouv., travaill. 1 h. par j., pendant $\frac{126}{3}$ j. ou 42 j.
$126^m$ seront faits par 3 ouv., travaill. 1 h. par j., pendant $\frac{42}{3}$ j. ou 14 j.
Les $126^m$ seront faits par 3 ouv., travaill. 7 h. par j., pendant $\frac{14}{7}$ j. ou 2 j.

9ᵉ Problème. *Le prix de* 9 *aunes de toile à* $\frac{7}{8}$ *étant* $13^{\#}\ 6^{s}\ 8^{d}$, *combien* 7 *mètres à* $\frac{5}{8}$ *coûteront-ils de francs?*

Les $13^{\#}\,6^{\ell}\,8^{s}$ valant à peu près $13^{f}{,}1686$, on voit que 9 aunes à $\frac{7}{8}$ coûtent $13^{f}{,}1686$. Par conséquent :

1 aune à $\frac{7}{8}$ coûte $\frac{13^{f}{,}1686}{9}$,

1 aune à $\frac{1}{8}$ coûte $\frac{13^{f}{,}1686}{9\times 7}$,

1 aune à $\frac{8}{8}$, c'est-à-dire une aune quarrée, coûte $\frac{13^{f}{,}1686\times 8}{9\times 7}$.

Or, une aune vaut environ $1^{m}{,}18845$; multipliant $1{,}18845$ par $1{,}18845$, le produit est $1{,}4124$ etc.; de sorte qu'une aune quarrée vaut à peu près $1{,}4124$ mètres quarrés. Par conséquent,

$1^{m.\,q.}{,}4124$ coûte..... $\frac{13^{f}{,}1686\times 8}{9\times 7}$,

1 mètre quarré ou à $\frac{8}{8}$, coûte donc $\frac{13^{f}{,}1686\times 8}{9\times 7\times 1{,}4124}$.

On en déduit que

$1^{m}$ à $\frac{1}{8}$ coûte le huitième de $\frac{13^{f}{,}1686\times 8}{1{,}4124\times 9\times 7}$ ou $\frac{1{,}1686}{1{,}4124\times 9\times 7}$,

$1^{m}$ à $\frac{5}{8}$ coûte..... $\frac{13^{f}{,}1686\times 5}{1{,}4124\times 9\times 7}$;

les $7^{m}$ à $\frac{5}{8}$ coûteront donc..... $\frac{13^{f}{,}1686\times 5}{1{,}4124\times 9}$, ou $5^{f}{,}17$ etc.

## DES INTÉRÊTS SIMPLES ET COMPOSÉS.

81. *L'intérêt* est le bénéfice que fait sur son argent celui qui le prête; c'est une rétribution que le prêteur exige de l'emprunteur, pour compenser les avantages dont il aurait joui en faisant valoir lui-même ses fonds. La somme prêtée se nomme *capital.*

Pour mettre de l'uniformité dans la manière de déterminer l'intérêt de l'argent, on convient ordinairement du bénéfice que procure une somme de 100 francs placée pendant un an; ce bénéfice est le *taux* de l'intérêt, ou le *taux* de l'argent.

Par exemple, lorsque 100 francs rapportent 5 francs d'intérêt par an, on dit que le *taux* de l'argent est à 5 pour 100 par an, ou simplement que l'argent est à 5 pour cent.

L'*intérêt* est *simple*, quand le capital reste le même pendant toute la durée du prêt. Dans ce cas, l'intérêt d'un capital pendant plusieurs années s'obtient en multipliant l'intérêt de ce capital pendant un an par le nombre des années.

Ainsi, l'argent étant à 5 pour 100 par an, l'*intérêt simple* de 100 francs est en 3 ans, de 3 fois $5^f$ ou $15^f$; et l'intérêt de $100^f$ en un mois est $\frac{5^f}{12}$ (*).

Lorsque l'argent est à 5 pour 100, l'intérêt de $1^f$ est $\frac{5^f}{100}$ ou $\frac{1^f}{20}$. L'intérêt annuel d'un capital quelconque est donc le vingtième de ce capital. Ainsi, l'intérêt de $480000^f$ est $\frac{480000^f}{20}$ ou $24000^f$.

Quand l'intérêt se joint au capital pour porter ensuite intérêt, on dit que l'intérêt est *composé*, ou qu'on a égard aux *intérêts des intérêts*.

Par exemple, lorsqu'on tire les intérêts des intérêts d'année en année, à raison de 5 pour 100 par an, un capital de $480000^f$ vaut à la fin de la $1^{re}$ année $480000^f$ plus son intérêt $24000^f$, ou $504000^f$. Ces $504000^f$ placés au commencement de la $2^e$ année, vaudront à la fin de cette année $504000^f$ plus leur intérêt $25200^f$, ou $529200^f$. Cette dernière somme placée au commencement de la $3^e$ année, vaudra à la fin de la $3^e$ année $529200^f$ plus son intérêt $26460^f$, ou 555660 francs. Le capital $480000^f$ vaudra donc 555660 francs dans trois ans. De sorte que l'augmentation de ce capital sera $555660^f - 480000^f$ ou $75660^f$.

Or, l'intérêt simple de 480000 en 3 ans, ne serait que 3 fois l'intérêt annuel $24000^f$ ou $72000^f$. L'augmentation de bénéfice due aux intérêts des intérêts est donc $75660^f - 72000^f$, ou $3660^f$.

On appelle *denier*, le nombre par lequel il faut diviser un capital pour obtenir son intérêt annuel.

Par exemple, lorsque le *taux* de l'argent est à 5 pour 100,

(*) Dans toutes les questions relatives aux intérêts, on suppose l'année de 12 mois, et le mois de 30 jours.

l'intérêt étant le vingtième du capital, on dit que l'argent est au *denier* 20.

En général : on obtient le *denier*, en divisant 100 par le *taux* de l'argent, et l'on trouve le taux de l'argent en divisant 100 par le denier.

### PROBLÈMES SUR LES INTÉRÊTS SIMPLES.

82. Nous supposerons dans les questions suivantes que l'on n'a égard qu'aux intérêts simples et que l'argent est à 5 pour 100 par an. L'intérêt d'une somme quelconque pendant un an sera le vingtième de cette somme, et l'intérêt pendant un nombre entier ou fractionnaire d'années s'obtiendra en multipliant l'intérêt d'un an par ce nombre d'années.

10e Problème. *Combien* 480000 *francs vaudront-ils dans trois ans?*

1re Solution. L'intérêt des $480000^f$ en un an est le vingtième de $480000^f$, ou $24000^f$; l'intérêt pendant trois ans sera donc 3 fois $24000^f$, ou $72000^f$.

Ainsi les $480000^f$ vaudront dans 3 ans, $480000^f + 72000^f$, ou 552000 francs.

2e Solution. L'intérêt de $100^f$ en un an étant..... $5^f$,

l'intérêt de $1^f$ en un an est $\frac{5^f}{100}$, ou..... $\frac{1^f}{20}$,

l'intérêt de $1^f$ en trois ans est 3 fois $\frac{1^f}{20}$, ou.... $\frac{3^f}{20}$,

$1^f$ vaudra dans trois ans, $1^f$ plus son intérêt $\frac{3^f}{20}$, ou $\frac{23^f}{20}$.

Les $480000^f$ vaudront dans 3 ans, $\frac{23^f}{20} \times 480000$, ou $552000^f$.

L'intérêt des $480000^f$ en 3 ans est donc $552000^f - 480000^f$ ou 72000 francs.

Et en effet, comme l'intérêt de $1^f$ en 3 ans est $\frac{3^f}{20}$, l'intérêt des $480000^f$ pendant 3 ans doit être $\frac{3^f}{20} \times 480000$, ou $72000^f$.

11e Problème. *Combien* 480000 *francs vaudront-ils dans* 3 *ans* 4 *mois, ou dans* 40 *mois?*

1re Solution. Les 480000 francs rapportent

En 12 mois, le 20e de 480000f, ou 24000f.
En 1 mois, le 12e de 24000f, ou 2000f.
En 40 mois, 40 fois 2000f, ou 80000f.

Par conséquent, les 480000 francs vaudront dans 40 mois, 480000f + 80000f, ou 560000 francs.

2e Solution. L'intérêt de 1f en 12 mois étant $\frac{1^f}{20}$,

l'intérêt de 1f en un mois est $\frac{1^f}{20 \times 12}$;

l'intérêt de 1f en 40 mois est $\frac{1^f \times 40}{20 \times 12}$, ou $\frac{1^f}{6}$;

1f comptant vaut dans 40 mois, $1^f + \frac{1^f}{6}$, ou $\frac{7^f}{6}$.

Les 480000f vaudront donc dans 40 mois, $\frac{7^f}{6} \times 480000$, ou 560000f.

L'intérêt des 480000 francs pendant 40 mois est donc 560000f — 480000f, ou 80000 francs.

12e Problème. *Combien 560000 francs payables dans 40 mois, valent-ils comptant?*

Les 560000f expriment le produit de la valeur de 1f après 40 mois, par le nombre des francs du capital demandé. On obtiendra donc ce nombre de francs en divisant 560000f par la valeur de 1f après 40 mois. Or, on a vu (11e *problème*) que 1f vaut $\frac{7^f}{6}$ dans 40 mois. Divisant donc 560000f par $\frac{7^f}{6}$, ce qui revient à multiplier 560000 par $\frac{6}{7}$, le résultat 480000 sera le nombre des francs du capital demandé.

En général, une somme payable après un certain temps étant le produit de la valeur de 1f après ce temps par le nombre des francs du capital, *si l'on divise une somme payable au bout d'un certain temps par la valeur d'un franc après ce temps, le quotient sera le nombre des francs du capital primitif.*

## *Règle d'Escompte.*

83. L'*Escompte* est la retenue qui doit être faite sur la valeur d'un billet payable après un certain temps, lorsqu'on veut toucher ce billet avant son échéance.

*Dans les questions sur l'escompte, on n'a égard qu'aux intérêts simples.*

On distingue deux sortes d'escompte, savoir :

L'*escompte en dedans*, qui est égal à la différence entre la somme énoncée dans le billet, et la valeur que prend cette somme quand on l'évalue en argent comptant par la méthode du n° 82. L'*escompte* ainsi déterminé est la même chose que l'intérêt simple du capital, ou de la valeur actuelle du billet.

L'*escompte en dehors*, qui diffère de l'intérêt ordinaire, en ce qu'il se paie à tant pour 100 sur la somme énoncée dans le billet, c'est-à-dire sur le capital augmenté de ses intérêts. De sorte que la retenue ou l'escompte se compose de l'intérêt du capital primitif, plus de l'intérêt de l'intérêt de ce capital.

Par exemple, lorsque le taux de l'argent est à 5 pour 100 par an, $100^f$ comptant valent $105^f$ dans un an. Un billet de $105^f$ payable dans un an ne vaut donc que $100^f$ comptant; il doit donc éprouver une retenue de $105^f - 100^f$ ou de $5^f$ quand on veut le toucher à l'instant. L'*escompte en dedans* de $105^f$ est donc de $105^f - 100^f$, ou de $5^f$.

Pour prendre l'*escompte en dehors* de 105 francs, à 5 pour 100, on dira :

L'escompte de $100^f$ étant $5^f$,

L'escompte de $1^f$ est $\frac{5^f}{100}$ ou $\frac{1^f}{20}$

L'escompte de $105^f$ est donc $\frac{105^f}{20}$ ou $\frac{21^f}{4}$, ou $5^f,25$.

Le billet de $105^f$ payable dans un an qui représente un capital de $100^f$, éprouvera donc une retenue ou escompte de $5^f,25$ lorsqu'on voudra le toucher sur-le-champ, on ne recevra donc en argent comptant que $105^f - 5^f,25$ ou $99^f,75$.

On voit que l'escompte en dehors $5^f,25$ se compose de l'intérêt $5^f$ du capital $100^f$, plus de l'intérêt $0^f,25$ de 5 francs.

Les $99^f,75$ placés à 5 pour 100, ne vaudront dans un an que $99^f,175 + \frac{99^f,175}{20}$, ou $104^f,17375$.

Si l'on veut *trouver à quel taux les* $99^f,175$ *doivent être placés, pour valoir* 105 *francs dans un an,* on dira :

L'intérêt de $99^f,175$ doit être $105^f - 99^f,175$ ou $5^f,125$,
l'intérêt de $1^f$ doit donc être $\frac{5^f,125}{99,175}$ ou $\frac{1^f}{19}$;
l'intérêt de $100^f$ doit donc être $\frac{100^f}{19}$, ou $5^f + \frac{5^f}{19}$.

L'*escompte en dehors* à 5 pour 100, correspond donc à un intérêt ordinaire de $5\frac{5}{19}$ pour 100.

## *Règle de Compagnie ou de Société.*

84. Cette règle est ainsi nommée parce qu'elle sert à partager entre plusieurs associés, le bénéfice ou la perte qui résulte de leur société. Le bénéfice ou la perte de chaque associé dépend de sa mise de fonds et du temps pendant lequel cette mise est restée dans la société.

13e Problème. *Les mises de trois associés sont* $300^f$, $500^f$, *et* $700^f$; *le gain total est* $4500^f$. *Trouver le gain de chaque associé.*

La somme des trois mises étant $1500^f$, on dira :

Puisque $1500^f$ rapportent $4500^f$ de bénéfice,
$1^f$ rapportera $\frac{4500^f}{1500}$ ou $3^f$.

Les gains relatifs aux mises $300^f$, $500^f$, $700^f$, sont donc $3^f \times 300$, $3^f \times 500$, $3^f \times 700$, ou $900^f$, $1500^f$ et 2100 francs.

14e Problème. *Les mises des trois associés sont,*

$$345^f,67,\ 468^f,84 \text{ et } 4527^f,95;$$

*le gain total est* $427^f,3968$. *Trouver le gain de chaque associé.*

La somme des trois mises étant $5342^f,46$, on dira :

$5342^{f},46$ rapportent $427^{f},3968$ de bénéfice,

$$1^{f} \text{ rapportera } \frac{427^{f},3968}{5342^{f},46}, \quad \text{ou} \quad 0^{f},08.$$

Multipliant le gain $0^{f},08$ relatif à $1^{f}$, par les nombres $345,67$, $468,84$ et $4527,95$, qui marquent de combien de francs les mises se composent, les produits

$$27^{f},6536, \quad 37^{f},5072, \quad 362^{f},2360,$$

seront les gains corrsepondans à ces mises.

15e Problème. *Les mises des trois associés sont* $100^{f}$, $250^{f}$ *et* $50^{f}$; *la première mise est restée* 3 *mois dans la société, la seconde* 2 *mois, et la troisième* 14 *mois; le gain total est* $4500^{f}$. *Quel est le gain relatif à chaque mise?*

Le gain de chaque associé dépend de sa mise et du temps qu'elle est restée dans la société. Si toutes les mises étaient restées le même temps, les gains seraient faciles à déterminer : il faut donc chercher quelles doivent être les mises pour que chacune d'elles restant le même temps dans la société, elles procurent les gains demandés.

Or, $100^{f}$ placés pendant 3 mois, rapportent autant que 3 fois $100^{f}$ ou $300^{f}$, en un mois; $250^{f}$ placés pendant 2 mois, et $50^{f}$ placés pendant 14 mois, rapportent autant que 2 fois $250^{f}$ ou $500^{f}$, et 14 fois $50^{f}$ ou $700^{f}$ pendant un mois.

Les gains sont donc les mêmes que dans le 13e problème.

## *De la Règle de Troc.*

85. *Troquer,* c'est échanger une chose contre une autre.

16e Problème. *Un marchand voudrait troquer de la toile à* $40^{s}$ *le mètre, contre du calicot à* $24^{s}$ *le mètre; mais le marchand de calicot ne veut prendre la toile en troc qu'à raison de* $35^{s}$ *le mètre; à combien doit-on réduire le prix du calicot?*

Puisque $40^{s}$ se réduisent à $35^{s}$,

$1^{s}$ se réduit à $\frac{35^{s}}{40}$ ou $\frac{7^{s}}{8}$,

$24^{s}$ se réduisent à 24 fois $\frac{7^{s}}{8}$, ou à $21^{s}$.

Par conséquent, dans l'échange proposé, le calicot doit être compté à $21^f$ le mètre au lieu de $24^f$.

17e Problème. *On veut troquer du drap à* $40^f$ *le mètre, contre du casimir à* $24^f$ *le mètre. Combien devra-t-on recevoir de casimir, en échange de* 300 *mètres de drap?*

1re Solution. Les 300 mètres de drap valant 300 fois $40^f$ ou $12000^f$, on recevra autant de mètres de casimir, que le prix $24^f$ du mètre de casimir est contenu de fois dans $12000^f$; divisant donc $12000^f$ par $24^f$, le quotient 500 exprimera le nombre de mètres demandé.

2e Solution. Un mètre de drap vaut $40^f$ et un mètre de casimir vaut $24^f$. Par conséquent, pour $1^f$ on aurait $\frac{1^m}{40}$ de drap, ou $\frac{1^m}{24}$ de casimir.

$\frac{1^m}{40}$ de drap vaut donc autant que $\frac{1^m}{24}$ de casimir;

$1^m$ de drap vaut donc 40 fois $\frac{1^m}{24}$ ou $\frac{5^m}{3}$ de casimir;

$300^m$ de drap valent donc 300 fois $\frac{5^m}{3}$ ou $500^m$ de casimir.

18e Problème. *Un marchand veut échanger du drap contre du basin; 2 mètres de drap valent 3 mètres de casimir, et 5 mètres de casimir valent 7 mètres de basin. Combien le marchand recevra-t-il de mètres de basin pour 60 mètres de drap?*

D'après cet énoncé,

$1^m$ de drap vaut $\frac{3^m}{2}$ de casimir, et $1^m$ de casimir vaut $\frac{7^m}{5}$ de basin;

$1^m$ de drap vaut donc les $\frac{3}{2}$ de $\frac{7^m}{5}$ de basin, ou $\frac{21^m}{10}$ de basin.

Les $60^m$ de drap valent donc 60 fois $\frac{21^m}{10}$ de basin, ou $126^m$ de basin.

## *Questions sur les Intérêts composés.*

86. Nous supposerons dans les problèmes suivans, que le taux de l'argent est à 5 pour 100 par an, et qu'à la fin de chaque année, l'intérêt de la somme placée au commencement

de cette année se joint au capital pour porter intérêt pendant l'année suivante. Lorsque le temps pendant lequel le capital reste placé sera composé d'un nombre entier d'années, et d'un nombre de mois moindre que 12, on prendra d'abord les intérêts des intérêts d'année en année pendant ce nombre entier d'années; et ensuite, le nouveau capital qui en résultera sera placé à intérêt simple pendant le nombre de mois énoncé.

19e Problème. *Combien le capital* 480000 *francs vaudra-t-il dans trois ans?*

1re Solution. Si l'on ajoute chaque année l'intérêt au capital, on trouvera que les 480000f vaudront 555660f dans 3 ans (n° 81).

2e Solution. L'intérêt annuel étant le vingtième du capital, on obtient ce qu'une somme placée au commencement d'une année vaut à la fin de l'année, en augmentant cette somme de sa vingtième partie; ce qui revient à en prendre les $\frac{21}{20}$.

Par conséquent, les 480000f placés au commencement de la 1re année, valent à la fin de cette année $480000^f \times \frac{21}{20}$.

Cette dernière somme placée au commencement de la 2e année, vaut à la fin de la 2e année $480000^f \times \frac{21}{20} \times \frac{21}{20}$.

Enfin cette dernière somme placée au commencement de la 3e année, vaut à la fin de la 3e année $480000^f \times \frac{21}{20} \times \frac{21}{20} \times \frac{21}{20}$, ou 555660 francs.

20e Problème. *Combien* 480000 *francs vaudront-ils dans* 3 *ans* 4 *mois ?*

1re Solution. On trouvera d'abord, comme dans la question précédente, que les 480000f valent 555660f à la fin de la 3e année. Il suffit donc d'augmenter cette dernière somme de son intérêt simple pendant 4 mois.

L'intérêt de 555660f en 12 mois étant le vingtième de 555660f, ou 27783f, l'intérêt de 555660f en 4 mois est le tiers de 27783f, ou 9261f. Ajoutant cet intérêt à 555660f, on trouve que les 480000 francs vaudront 564921 francs dans 3 ans 4 mois.

2e Solution. L'intérêt de $1^f$ en 12 mois étant $\frac{1^f}{20}$,

l'intérêt de $1^f$ en 4 mois est le tiers de $\frac{1^f}{20}$, ou $\frac{1^f}{60}$.

On obtient donc ce qu'une somme payable à une époque vaut 4 mois plus tard, en ajoutant à cette somme sa 60e partie; ce qui revient à en prendre les $\frac{61}{60}$.

Le capital $1^f$, qui valait $1^f \times \frac{21}{20} \times \frac{21}{20} \times \frac{21}{20}$ ou $\frac{9261^f}{8000}$ dans 3 ans (19e *problème*), vaudra donc dans 3 ans 4 mois, les $\frac{61}{60}$ de $\frac{9261^f}{8000}$, ou $\frac{564921}{480000}$ francs.

Les $480000^f$ comptant vaudront donc dans 3 ans 4 mois $\frac{564921^f}{480000} \times 480000$, ou 564921 francs.

21e Problème. *Une personne qui devrait payer* 480000 *francs dans* 2 *ans* 11 *mois, propose de s'acquitter avec une lettre de change payable dans* 6 *ans* 3 *mois. Il s'agit de trouver la valeur de cette lettre de change.*

La différence entre 6 ans 3 mois, et 2 ans 11 mois étant 3 ans 4 mois, la question se réduit à déterminer combien $480000^f$ payables à une époque, valent 3 ans 4 mois plus tard; on a vu, dans le problème précédent, que les $480000^f$ vaudront $564921^f$ dans 3 ans 4 mois. La lettre de change doit donc être de 564921 francs.

22e Problème. *Combien* 564921 *francs payables dans* 3 *ans* 4 *mois valent-ils en argent comptant?*

On a vu (20e *problème*) que $1^f$ comptant vaut $\frac{564921^f}{480000}$ après 3 ans 4 mois. Divisant donc $564921^f$ par cette fraction, le quotient 480000 sera le nombre des francs du capital cherché (12e *problème*).

23e Problème. *Trouver dans combien de temps le capital* 480000 *francs vaudra* 564921 *francs, en prenant les intérêts composés d'année en année.*

Si l'on ajoute successivement l'intérêt annuel au capital, on trouvera que les 480000 francs comptant valent $504000^f$ dans un an, $529200^f$ dans deux ans, $555660^f$ dans trois ans, $583443^f$ dans quatre ans. Le nombre donné 564921 étant compris entre 555660 et 583443, le temps cherché est compris entre 3 ans et 4 ans.

Le capital $480000^f$ valant $555660^f$ dans 3 ans, il suffit de chercher pendant combien de mois les $555660^f$ doivent être placés à intérêt simple, pour devenir $564921^f$. L'intérêt des $555660^f$ pendant le nombre de mois demandé doit donc être $564921^f - 555660^f$ ou $9261^f$.

Or, l'intérêt des $555660^f$ en 12 mois est le vingtième de $555660^f$ ou $27783^f$. On peut donc dire: puisque le capital étant 555660 francs,

l'intérêt $27783^f$ correspond à 12 mois,

l'intérêt $1^f$ correspond à $\frac{12 \text{ mois}}{27783}$,

l'intérêt $9261^f$ correspond à $\frac{12 \text{ mois}}{27783} \times 9261$, ou à 4 mois.

Le temps cherché est donc 3 ans 4 mois. Ce qui s'accorde avec le 20e problème.

24e Problème. *Un particulier qui doit une rente perpétuelle de $2200^f$ au capital de $11000^f$, voudrait acquitter en 2 ans la rente et le capital, au moyen de deux paiemens égaux effectués à la fin de chaque année. Quelle doit être la valeur de chaque paiement? On a égard aux intérêts composés d'année en année.*

L'intérêt annuel de $11000^f$ étant $2200^f$, l'intérêt annuel de $1^f$ est $\frac{2200^f}{11000}$, ou $\frac{1^f}{5}$; de sorte que $1^f$ comptant vaut après un an, $1^f + \frac{1^f}{5}$ ou $\frac{6^f}{5}$; les $11000^f$ comptant vaudront donc à la fin de la 2e année, $11000 \times \frac{6}{5} \times \frac{6}{5}$, ou $1584^f$. Les deux paiemens réunis, évalués à cette dernière époque, doivent donc valoir $1584^f$.

Mais le 1er paiement effectué à la fin de la 1re année vaut, à la fin de la 2e, les $\frac{6}{5}$ de sa valeur; et le 2e paiement vaut à la fin de la 2e année les $\frac{5}{5}$ de sa valeur; les deux paiemens réunis évalués à la fin de la 2e année, valent donc les $\frac{6}{5}$ plus $\frac{5}{5}$, ou les $\frac{11}{5}$ du 1er paiement.

Puisque les $\frac{11}{5}$ du 1er paiement valent 1584of,

$\frac{1}{5}$ du 1er paiement vaut $\frac{1584^{f}}{11}$, ou 144o francs,

le 1er paiement vaut 5 fois 144of, ou 7200 francs.

Et en effet; on paie 7200f à la fin de la 1re année, on doit 2200f pour la rente de 11000f; on n'acquitte donc que 5000f sur le capital 11000f qui se trouve ainsi réduit à 6000f; on ne doit donc tenir compte pendant la 2e année que de l'intérêt 1200f des 6000f qui restent dus; cet intérêt joint aux 6000f donne 7200f, pour ce qui reste dû à la fin de la 2e année; le 2e paiement de 7200f, effectué à cette époque, acquitte donc le reste de la dette.

25e Problème. *On offre à un marchand* 30 *mètres de drap de* 1re *qualité à* $\frac{9}{12}$, *pour* 720 *francs comptant; ou* 50 *mètres de drap de* 2e *qualité à* $\frac{8}{12}$, *pour* 1200 *francs payables dans deux ans; à dimensions égales, une aune de la* 2e *qualité coûte les* $\frac{15}{16}$ *d'une aune de la* 1re *qualité; l'argent est à* 10 *pour* 100 *par an, et on a égard aux intérêts des intérêts d'année en année. Le marchand demande quelle est la spéculation qui lui sera la plus avantageuse?*

Aux conditions du 1er marché :

30m de 1re qualité à $\frac{9}{12}$, coûtent..... 720f comptant,

1m de 1re qualité à $\frac{9}{12}$, coûte le 30e de 720f, ou..... 24f,

$1^m$ de $1^{re}$ qualité à $\frac{1}{12}$, coûte le $9^e$ de $24^f$, ou $\frac{24^f}{9}$, ou... $\frac{8^f}{3}$;

$1^m$ de $1^{re}$ qualité à $\frac{8}{12}$, coûte 8 fois $\frac{8^f}{3}$, ou..... $\frac{64^f}{3}$;

$1^m$ de $2^e$ qualité à $\frac{8}{12}$, coûte les $\frac{15}{16}$ de $\frac{64^f}{3}$, ou..... $20^f$.

Les $50^m$ de $2^e$ qualité à $\frac{8}{12}$, coûtent donc 50 fois $20^f$, ou $1000^f$ comptant.

Or, en prenant les intérêts des intérêts, à raison de 10 pour 100 par an, on trouve que $1000^f$ comptant valent $1210^f$ dans 2 ans.

On voit donc que 50 mètres de drap de $2^e$ qualité à $\frac{8}{12}$, payables dans deux ans, coûtent au marchand, $1210^f$ aux conditions du $1^{er}$ marché, et $1200^f$ aux conditions du $2^e$ marché. La seconde spéculation est donc plus avantageuse au marchand.

## *Problèmes sur des mélanges.*

87. $26^e$ Problème. *On a mêlé 7 litres de vin à $14^s$ le litre et 3 litres à $24^s$. Déterminer le prix du litre de ce mélange.*

7 litres à $14^s$ valent 7 fois $14^s$ ou..... $98^s$.
3 litres à $24^s$ valent 3 fois $24^s$ ou..... $72^s$.

En effectuant l'addition on trouve que

Les 10 litres du mélange valent..... $170^s$.

Le litre du mélange coûte donc $\frac{170^s}{10}$ ou.. $17^s$.

En général : *Pour obtenir le prix d'une unité de mesure d'un mélange quelconque, il suffit de multiplier le prix d'une mesure de chaque espèce par le nombre de ces mesures, et de diviser la somme de ces produits par le nombre total des mesures du mélange.*

Le prix d'une mesure du mélange est toujours compris entre les prix extrêmes de la même mesure des quantités mélangées, c'est-à-dire entre le prix le plus élevé et le prix le moins élevé d'une même mesure des quantités mélangées.

$27^e$ Problème. *Un mélange est formé de 20 litres de vin à $5^s$ le*

*litre, de* 30 *litres à* $10^s$, *de* 28 *litres à* $14^s$ *et de* 12 *litres à* $24^s$. *Trouver le prix du litre de ce mélange.*

30 litres à $5^s$ valent $100^s$,
30 litres à $10^s$ valent $300^s$,
28 litres à $14^s$ valent $392^s$,
12 litres à $24^s$ valent $288^s$.

Divisant la somme $1080^s$ des prix des diverses parties du mélange, par le nombre 90 des litres du mélange, le quotient $12^s$ exprime le prix du litre du mélange.

Remarque. *Le volume total d'un mélange n'est pas toujours égal à la somme des volumes des matières mélangées.*

Par exemple, lorsqu'on mêle des graines de différentes grosseurs, les plus petites se placent dans les intervalles qui séparent les plus grosses graines, et le volume du mélange est par conséquent moindre que la somme des volumes des parties mélangées.

Exemple. *On a mélé* 7 *litrons d'orge à* $14^s$ *le litron, avec* 3 *litrons d'orge d'une autre grosseur à* $24^s$ *le litron; ces* 10 *litrons ne forment que* 8 *litrons de mélange. On demande à combien revient le litron de ce mélange.*

Les 8 litrons du mélange valent 7 fois $14^s$ + 3 fois $24^s$, ou $170^s$; le litron de ce mélange vaut $\frac{170^s}{8}$ ou $21^s,25$.

Nous supposerons, dans les questions suivantes, que le volume du mélange est égal à la somme des volumes des quantités mélangées.

28e Problème. *Dans quelle proportion doit-on mêler du vin à* $14^s$ *et à* $24^s$ *le litre, pour que le mélange revienne à* $17^s$ *le litre ?*

Les proportions du mélange doivent être telles, que le marchand n'éprouve ni gain ni perte, en vendant $17^s$ le litre du mélange. Or, chaque litre à $14^s$ qui entre dans le mélange, procure $17^s - 14^s$ ou $3^s$ de gain; et chaque litre à $24^s$ procure $24^s - 17^s$ ou $7^s$ de perte. Par conséquent, pour que le gain compense la perte, il suffit de mêler 7 litres à $14^s$ avec 3 litres à $24^s$; car le gain sera 7 fois $3^s$ et la perte sera 3 fois $7^s$.

Puisque 10 litres du mélange demandé sont composés de 7 litres à $14^f$ et 3 litres à $24^f$, chaque litre de mélange contient $\frac{7}{10}$ litre à $14^f$ et $\frac{3}{10}$ litre à $24^f$.

29e Problème. *Combien faut-il ajouter d'eau à 12 litres de vin à $15^f$ le litre, pour que le mélange revienne à $9^f$ le litre? On suppose que l'eau ne coûte rien.*

1re Solution. Le prix $9^f$ d'un litre du mélange demandé, multiplié par le nombre de litres de ce mélange, devant être égal au prix total 12 fois $15^f$ ou $180^f$ du mélange, on obtiendra ce nombre de litres en divisant $180^f$ par $9^f$; ce qui donne 20. Le nombre cherché des litres d'eau est donc 20 — 12 ou 8.

2e Solution. Chaque litre à $15^f$ que l'on vendrait $9^f$, procurerait $15^f - 9^f$ ou $6^f$ de perte; et chaque litre d'eau que l'on vendrait $9^f$, donnerait $9^f$ de gain. Par conséquent, le gain compensera la perte, si l'on mêle 9 litres de vin à $15^f$ avec 6 litres d'eau, car en vendant le mélange à raison de $9^f$ le litre, la perte sera 9 fois $6^f$ et le gain sera 6 fois $9^f$. Or, 6 est les $\frac{6}{9}$ ou les $\frac{2}{3}$ de 9; la quantité d'eau à mettre dans les 12 litres de vin à $15^f$ pour composer le mélange demandé, est donc les $\frac{2}{3}$ de 12 litres, ou 8 litres.

## *Des alliages.*

88. Le résultat de la combinaison de plusieurs métaux qu'on a fondus ensemble, forme ce qu'on nomme un *alliage;* et une quantité quelconque de métal ou d'alliage s'appelle un *lingot.*

Nous ne considérerons que le poids des métaux sans avoir égard à leurs volumes, et *le poids de l'alliage sera égal à la somme des poids des métaux qui composent cet alliage.*

Lorsqu'un alliage renferme les $\frac{8}{10}$ de son poids en or pur, on dit que cet or est au *titre* de $\frac{8}{10}$, ou $\frac{8}{10}$ de *fin*, ou simplement à $\frac{8}{10}$.

Ainsi, un lingot d'or au titre de $\frac{8}{10}$, pesant 100 grammes, est un alliage d'or et d'autres matières quelconques qui contient en or pur les $\frac{8}{10}$ de $100^{gr}$ ou 80 grammes.

Un alliage qui contient les $\frac{7}{10}$ de son poids en or pur, et les $\frac{3}{10}$ en argent, est au titre de $\frac{7}{10}$ par rapport à l'or, et au titre de $\frac{3}{10}$ par rapport à l'argent; 100 grammes de cet alliage contiennent en or pur, les $\frac{7}{10}$ de $100^{gr}$ ou $70^{gr}$, et en argent les $\frac{3}{10}$ de $100^{gr}$ ou 30 grammes.

En général : *Pour trouver la quantité de métal pur contenue dans un alliage dont le titre est donné par rapport à ce métal, il suffit de multiplier le poids total de l'alliage par son titre;* et réciproquement, *pour obtenir le titre d'un alliage par rapport à un métal, il suffit de diviser le poids de la quantité de ce métal contenue dans l'alliage par le poids total de l'alliage.*

On évalue quelquefois le degré de pureté de l'or en *karats*, et celui de l'argent en *deniers* de fin. L'or pur est dit à 24 karats, et l'argent pur est dit à 12 deniers de fin. Ainsi, de l'or à 22 karats contient les $\frac{22}{24}$ de son poids en or pur ; cet or est donc au *titre* de $\frac{22}{24}$ ou de $\frac{11}{12}$. De l'argent à 11 deniers de fin renferme les $\frac{11}{12}$ de son poids en argent pur; il est donc au *titre* de $\frac{11}{12}$.

Les raisonnemens qui ont servi à résoudre les questions relatives aux mélanges, s'appliquent aux problèmes sur les alliages.

30e Problème. *On fait fondre ensemble 70 grammes d'or au titre* 0,90, *avec 30 grammes d'or au titre* 0,80 ; *trouver le titre de l'alliage qui en résultera.*

Le produit du nombre des grammes par le titre donnant la quantité d'or pur, on trouve que

$70^{gr}$ à 0,90 contiennent $63^{gr}$ d'or,
$30^{gr}$ à 0,80 contiennent $24^{gr}$ d'or.

Les $100^{gr}$ d'alliage contiennent donc $87^{gr}$ d'or.
Un gramme d'alliage contient donc $0^{gr},87$ d'or.
Le titre de l'alliage est donc 0,87.

En général : *Pour trouver le titre de l'alliage qui résulte de la fonte de plusieurs lingots, il suffit de multiplier le poids de chaque lingot par son titre, et de diviser la somme de ces produits par le poids total de l'alliage.*

31e Problème. *Un alliage est composé de 20 grammes d'or à 0,05 de fin, de 30 grammes à 0,10, de 28 grammes à 0,14 et de 12 grammes à 0,24. Trouver le titre de cet alliage par rapport à l'or.*

On trouve, d'après la règle précédente, que les 90 grammes d'alliage contiennent $10^{gr},8$ d'or fin; un gramme d'alliage contient donc $\frac{10^{gr},8}{90}$, ou $0^{gr},12$ d'or; cet alliage est donc au titre de 0,12.

32e Problème. *Dans quelle proportion doit-on allier de l'or à 0,90 de fin, avec de l'or à 0,80, pour composer un alliage au titre de 0,87?*

1re Solution. L'alliage demandé devant être au titre 0,87, $100^{gr}$ de cet alliage doivent contenir $87^{gr}$ d'or fin. Ainsi :

$100^{gr}$ d'or à 0,90 contiennent $90^{gr} - 87^{gr}$ ou $3^{gr}$ d'or fin de trop,
et sur $100^{gr}$ d'or à 0,80 il manque $87^{gr} - 80^{gr}$ ou $7^{gr}$ d'or fin.

Il y aura donc compensation en combinant $7^{gr}$ d'or à 0,90 avec $3^{gr}$ d'or à 0,80; car les $10^{gr}$ d'alliage qui en résulteront contiendront 7 fois $0^{gr},03$ d'or fin de trop, et il manquera 3 fois $0^{gr},07$ d'or.

Chaque gramme de l'alliage demandé contient donc $0^{gr},7$ d'or à 0,90 et $0^{gr},3$ d'or à 0,80.

2e Solution. On supposera que le gramme d'or fin coûte $100^{f}$. Le prix de l'or dépendant de son titre, les prix respec-

tifs d'un gramme d'or aux titres 0,90, 0,80, 0,87, seront $90^f$, $80^f$, $87^f$; de sorte que la question sera réduite à *trouver dans quelle proportion on doit allier de l'or à* $90^f$ *le gramme avec de l'or à* $80^f$ *le gramme, pour que le gramme d'alliage revienne à* $87^f$.

Chaque gramme d'or à $90^f$ qui entre dans l'alliage procure $90^f - 87^f$ ou $3^f$ de perte, et chaque gramme à $80^f$ procure $87^f - 80^f$ ou $7^f$ de gain. Par conséquent, pour que le gain compense la perte, il suffit d'allier $7^{gr}$ d'or à $90^f$ le gramme avec $3^{gr}$ d'or à $80^f$, car les $10^{gr}$ d'alliage qui en résulteront procureront 7 fois $3^f$ de perte et 3 fois $7^f$ de gain. Chaque gramme de l'alliage demandé contient donc $0^{gr},7$ d'or à $90^f$ et $0^{gr},3$ à 80; ou, ce qui revient au même, chaque gramme de cet alliage est composé de $0^{gr},7$ d'or au titre de 0,90 et de $0^{gr},3$ d'or à 0,80.

33e Problème. *Combien doit-on ajouter de cuivre à* $108^{gr}$ *d'or au titre de* $\frac{11}{12}$, *pour abaisser le titre à* $\frac{9}{10}$?

Les $108^{gr}$ à $\frac{11}{12}$ de fin contiennent en or pur $108^{gr} \times \frac{11}{12}$, ou 99 grammes.

Lorsqu'on aura ajouté la quantité de cuivre convenable, il y aura toujours 99 grammes d'or pur dans l'alliage qui en résultera; et cet alliage devant être au titre de $\frac{9}{10}$, son poids total multiplié par $\frac{9}{10}$, devra donner les 99 grammes d'or qu'il contient. Divisant donc $99^{gr}$ par $\frac{9}{10}$, le quotient 110 grammes, exprimera le poids total de l'alliage demandé. On doit donc ajouter $110 - 108$ ou 2 grammes de cuivre aux 108 grammes d'or au titre de $\frac{11}{12}$.

Et en effet; les $110^{gr}$ de l'alliage ainsi formé contenant toujours $99^{gr}$ d'or, un gramme de cet alliage renferme $\frac{99^{gr}}{110}$ ou $\frac{9^{gr}}{10}$ d'or pur; cet alliage est donc au titre de $\frac{9}{10}$.

La quantité de cuivre à ajouter à $108^{gr}$ d'or au titre de $\frac{11}{12}$, pour l'abaisser au titre de $\frac{9}{10}$, étant $2^{gr}$ ou les $\frac{2}{108}$ de $108^{gr}$ ou $\frac{1}{54}$ de $108^{gr}$, la quantité de cuivre à ajouter à un lingot d'or au titre de $\frac{11}{12}$, pour l'abaisser au titre de $\frac{9}{10}$ est $\frac{1}{54}$ du poids de ce lingot.

## *Problèmes divers.*

89. 34e Problème. *Un bassin est alimenté par deux fontaines ; la* 1re *le remplirait en* $\frac{3}{2}$ *heures, et la* 2e *en* $\frac{3}{4}$ *d'heure ; la totalité de l'eau qu'il peut contenir sortirait en* 3 *heures par une ouverture pratiquée à ce bassin ; en combien de temps le bassin, supposé vide, sera-t-il rempli, lorsque l'eau coulera par les trois ouvertures à la fois ?*

La 1re fontaine remplit en $\frac{3^h}{2}$ une fois le bassin, en 3 heures 2 fois le bassin, et en une heure les $\frac{2}{3}$ du bassin. On verrait de même qu'en une heure, la 2e fontaine remplit les $\frac{4}{3}$ du bassin, et que la 3e ouverture vide $\frac{1}{3}$ du bassin. Ainsi, quand l'eau coule par ces trois ouvertures, la partie du bassin qui se remplit en une heure est $\frac{2}{3}+\frac{4}{3}-\frac{1}{3}$, ou $\frac{5}{3}$, le bassin serait donc rempli 5 fois en 3 heures, et une fois en $\frac{3}{5}$ d'heure.

35e Problème. *Deux courriers vont dans le même sens ; le* 1er *avance de* 138 *lieues, fait* 3 *lieues en* 4 *heures, et part* 40 *heures avant le* 2e *qui parcourt* 6 *lieues en* 7 *heures. On demande dans combien de temps les courriers se joindront, et quelles seront les distances des points de départ au point de rencontre.*

Puisque le 1^er^ courrier parcourt 3 lieues en 4 heures, il fait $\frac{3}{4}$ de lieue par heure. On verrait de même que le 2^e^ courrier fait $\frac{6}{7}$ de lieue par heure. Mais, le 1^er^ courrier part $40^h$ avant le 2^e^, il fait donc pendant ce temps 40 fois $\frac{3}{4}$ de lieue, ou 30 lieues. Ainsi, lorsque le 2^e^ courrier se met en route, le 1^er^ a une avance de 168 lieues; le 2^e^ courrier n'atteindra donc le 1^er^ que lorsqu'il s'en sera rapproché de 168 lieues. Or, les courriers se rapprochent pendant une heure de $\frac{6}{7} - \frac{3}{4}$ ou $\frac{3}{28}$ de lieue; ils se rapprocheront donc de 3 lieues en $28^h$, d'une lieue en $\frac{28^h}{3}$, et de 168 lieues en 168 fois $\frac{28^h}{3}$, c'est-à-dire en 1568 heures. Le 2^e^ courrier rencontrera donc le 1^er^ après 1568 heures de marche; pendant ce temps, le 2^e^ courrier aura parcouru 1568 fois $\frac{6}{7}$ de lieue, ou 1344 lieues; le 1^er^ courrier qui part $40^h$ avant le 2^e^ aura marché pendant $1608^h$ et aura parcouru 1608 fois $\frac{3}{4}$ de lieue, ou 1206 lieues; la différence, 138 lieues entre ces espaces, est effectivement égale à la distance des points de départ des courriers.

36^e^ Problème. *Deux courriers vont dans le même sens; le 1^er^ a une avance de 200 lieues, fait 3 lieues en 4 heures, et part 40 heures avant le 2^e^ qui fait 6 lieues en 7 heures. Après combien d'heures de marche, le 2^e^ courrier ne sera-t-il plus en arrière que de 62 lieues?*

Si l'on répète les calculs précédens, on verra que le 1^er^ courrier a fait 30 lieues avant le départ du 2^e^ courrier; le 1^er^ courrier a donc 230 lieues d'avance, et par conséquent, pour que les courriers ne soient plus distans que de 62 lieues, le 2^e^ doit se rapprocher du 1^er^ de 168 lieues. Ce rapprochement aura lieu après 1568 heures de marche (35^e^ *problème*).

37^e^ Problème. *Une montre marque midi; il faut trouver*

*combien de fois les aiguilles des heures et des minutes se rencontreront depuis midi jusqu'à minuit, et à quelle heure chaque rencontre aura lieu?*

Le cadran étant divisé en 60 parties égales, il est bien évident que la 1re rencontre aura lieu quand l'aiguille des minutes aura parcouru 60 divisions de plus que l'aiguille des heures, c'est-à-dire lorsque la différence des espaces parcourus par les aiguilles sera de 60 divisions. Or, en une heure, l'aiguille des minutes parcourt 60 divisions et celle des heures parcourt 5 divisions. Par conséquent, la différence des espaces que les deux aiguilles parcourent est

de 55 divisions en 1 heure,
de 1 division en $\frac{1}{55}$ d'heure,
et de 60 divisions en $\frac{60}{55}$ d'heure.

Les aiguilles marchant toujours avec la même vitesse, le temps écoulé depuis chaque séparation des aiguilles jusqu'à leur rencontre, reste constamment égal à $\frac{60^h}{55}$; on trouve ainsi que la onzième rencontre a lieu à minuit, c'est-à-dire au point de départ des aiguilles.

38e Problème. *Un père laisse par testament la moitié de son bien à son fils, le tiers à sa fille, et les* 10000 *francs qui restent à sa veuve; il faut trouver le bien du défunt et la part de chaque enfant.*

La part du fils jointe à celle de la fille, composent les $\frac{5}{6}$ de l'héritage; les 10000f qui restent à la mère expriment donc le sixième du bien total; ce bien est 60000f; le fils en prend la moitié ou 30000f, la fille le tiers ou 20000f; il reste effectivement 10000f à la veuve.

39e Problème. *Un homme entre dans une église avec une somme d'argent composée d'écus de* 3#; *il donne autant de pièces de* 12$ *qu'il a d'écus. Dieu change les écus de* 3# *qui lui restent en pièces de* 5#. *Le dévot sort de l'église avec un nombre exact de pistoles, et donne* 1# *par pistole; il lui reste un nombre*

*exact de demi-louis. Dieu change ces demi-louis en pièces de* $21^{\#}$. *Le dévot ayant dépensé* $3^{\#}$, *rentre chez lui avec le double de ce qu'il avait en entrant dans l'église. Quelle somme d'argent avait-il d'abord?*

Le dévot entre dans l'église avec des écus de $3^{\#}$, il donne $12^{s}$ par écu, c'est-à-dire le $5^{e}$ de ce qu'il a; il ne lui reste donc que les $\frac{4}{5}$ de ce qu'il avait d'abord. Dieu change les écus de $3^{\#}$ qui lui restent en pièces de $5^{\#}$; mais $5^{\#}$ valent les $\frac{5}{3}$ de $3^{\#}$; le dévot a donc, après ce changement, les $\frac{5}{3}$ de ce qui lui restait, c'est-à-dire les $\frac{5}{3}$ des $\frac{4}{5}$, ou les $\frac{4}{3}$ de la somme primitive; il donne $1^{\#}$ par *pistole*, c'est-à-dire le $10^{e}$ de ce qu'il a; il ne lui reste donc que les $\frac{9}{10}$ de son argent, et comme cet argent est les $\frac{4}{3}$ de la somme primitive, il ne lui reste que les $\frac{9}{10}$ des $\frac{4}{3}$, ou les $\frac{6}{5}$ de son argent primitif. Dieu change ses pièces de $12^{\#}$ en pièces de $21^{\#}$; or $21^{\#}$ sont les $\frac{7}{4}$ de $12^{\#}$; le dévot a donc après ce changement, les $\frac{7}{4}$ de ce qui lui restait, c'est-à-dire les $\frac{7}{4}$ des $\frac{6}{5}$ de son argent primitif, ou les $\frac{21}{10}$ de cet argent. Mais le dévot doit rentrer avec le double de l'argent qu'il avait d'abord, c'est-à-dire avec les $\frac{20}{10}$ de cet argent; les $3^{\#}$ qu'il dépense expriment donc le dixième de son argent primitif; la somme qu'il avait en entrant dans l'église était donc $30^{\#}$. En effet, le dévot entre dans l'église avec $30^{\#}$ ou 10 écus de $3^{\#}$; il donne aux pauvres 10 pièces de $12^{s}$ ou $6^{\#}$, il lui reste $24^{\#}$ ou 8 écus de $3^{\#}$; ces 8 écus de $3^{\#}$ se changent en 8 pièces de $5^{\#}$, qui valent $40^{\#}$ ou 4 pistoles; il donne $1^{\#}$ par

pistole, c'est-à-dire $4^{\#}$ sur 4 pistoles ; il ne lui reste donc que $36^{\#}$ ou 3 demi-louis ; chaque demi-louis devenant une pièce de $21^{\#}$, les 3 demi-louis deviennent 3 pièces de $21^{\#}$ ou $63^{\#}$ ; le dévot dépense $3^{\#}$ ; il lui reste donc le double des $30^{\#}$ qu'il avait en entrant dans l'église.

40e Problème. *Trois joueurs conviennent que le perdant doublera l'argent des deux autres. Chaque joueur ayant perdu une partie, dans l'ordre indiqué par le rang des joueurs, il reste* $24^{f}$ *au* 1er *joueur,* $28^{f}$ *au* 2e *et* $14^{f}$ *au* 3e *joueur. Combien chaque joueur avait-il d'argent en se mettant au jeu ?*

D'après cet énoncé ;

*à la fin de la* 3e *partie, le* 1er *joueur a* $24^{f}$, *le* 2e *a* $28^{f}$, *et le* 3e *a* $14^{f}$.

Le 3e joueur ayant perdu la 3e partie a doublé l'argent des deux autres ; ceux-ci n'avaient donc à la fin de la 2e partie que la moitié de ce qu'ils ont à la fin de la 3e, c'est-à-dire $12^{f}$ et $14^{f}$ ; le 3e joueur avait les $26^{f}$ qu'il a perdus avec les deux autres, augmentés des $4^{f}$ qui lui restent, c'est-à-dire 40 francs. Ainsi :

*à la fin de la* 2e *partie, le* 1er *joueur a* $12^{f}$, *le* 2e *a* $14^{f}$, *et le* 3e *a* $40^{f}$.

Des raisonnemens analogues conduisent aux résultats suivans :

*à la fin de la* 1re *partie, le* 1er *joueur a* $6^{f}$, *le* 2e *a* $40^{f}$, *et le* 3e *a* $20^{f}$ ;
*en se mettant au jeu, le* 1er *joueur a* $36^{f}$, *le* 2e *a* $20^{f}$, *et le* 3e *a* $10^{f}$.

On est parvenu, sans tâtonnement, aux solutions des questions précédentes ; mais *il existe des problèmes qui échappent aux méthodes directes.* Si l'on essayait des nombres pris au hasard, on pourrait faire beaucoup de tentatives inutiles ; *on assure alors la marche du raisonnement, à l'aide d'hypothèses arbitraires qui donnent le moyen de détruire les erreurs.* En voici des exemples :

41e Problème. *On a des pièces de* $2^{f}$ *et de* $5^{f}$ ; *il s'agit de payer* 26 *francs avec dix de ces pièces.* Si les dix pièces étaient de $2^{f}$, elles vaudraient $20^{f}$ au lieu de $26^{f}$ ; il faut donc augmenter de $6^{f}$ la valeur de ces dix pièces, sans en changer le nombre. Mais, chaque pièce de $5^{f}$, substituée à une pièce de $2^{f}$ augmente de $3^{f}$ la valeur des dix pièces ; par conséquent, pour

augmenter cette valeur de $6^f$, il faut substituer 2 pièces de $5^f$ à 2 pièces de $2^f$; on formera donc les $26^f$ avec 8 pièces de $2^f$ et 2 pièces de 5 francs.

La méthode employée pour résoudre le problème précédent a reçu le nom de *règle d'une fausse position,* parce qu'elle conduit au résultat à l'aide d'*une fausse supposition.*

42e Problème. *Un joueur, interrogé sur ce qu'il a dans sa bourse, répond que l'excès du quintuple de ses louis sur* 30, *est égal à l'excès du double de ces mêmes louis sur* 6. *Combien le joueur a-t-il de louis ?*

Pour résoudre ce problème, on prend un nombre arbitraire de louis; si ce nombre ne jouit pas des propriétés énoncées, il produira une certaine *erreur* que l'on détruira à l'aide d'une 2e hypothèse. Voici le calcul :

| | |
|---|---|
| 1re *hypothèse*..... 20 louis. | 2e *hypothèse*..... 19 louis. |
| l'excès de 5 fois 20 sur 30 est... 70, | l'excès de 5 fois 19 sur 30 est.... 65, |
| l'excès de 2 fois 20 sur 6 est... 34, | l'excès de 2 fois 19 sur 6 est.... 32, |
| l'*erreur* correspondante est donc 36. | l'*erreur* correspondante est donc 33. |

Pour diminuer l'erreur 36 de 3, il faut diminuer de 1 le nombre 20 des louis, pour diminuer l'erreur 36 de 36, il faut diminuer de 12 le nombre 20 des louis.

Le joueur avait donc 8 louis. Et en effet, l'excès du quintuple de 8 sur 30 est 10, et l'excès du double de 8 sur 6 est également 10, comme l'exige l'énoncé.

43e Problème. *Un père, interrogé sur l'âge de son fils, répond : mon âge est le triple de celui de mon fils, et il y a dix ans qu'il en était le quintuple. On demande l'âge du fils.*

Si le fils a 24 ans, le père a 72 ans; il y a dix ans, le fils avait 14 ans et le père 62 ans; or, le quintuple de 14 surpasse 62 de 8, l'erreur est donc 8. On verra de même que, si l'âge du fils diminue d'une année, l'erreur 8 diminue de 2. Par conséquent, pour que cette erreur devienne nulle, il faut que l'âge du fils diminue de 4 années. Le fils a donc 20 ans et le père 60 ans; il y a dix ans, le fils avait 10 ans et le père 50 ans; l'âge du père était donc quintuple de celui du fils.

Remarque. La méthode qui a servi à résoudre les deux questions précédentes se nomme *règle de double fausse posi-*

*tion,* parce qu'elle conduit au résultat à l'aide de deux fausses suppositions. *Cette règle n'est applicable qu'aux questions dans lesquelles les variations des erreurs sont proportionnelles aux variations des hypothèses faites sur la valeur de l'inconnue.* Quand cette condition n'a pas lieu, le calcul l'indique, en conduisant à un nombre qui ne satisfait pas au problème, et la question est du ressort de l'*Algèbre.*

44e Problème. *Les neuf Muses portant chacune le même nombre de couronnes de fleurs, rencontrent les trois Grâces et leur offrent des couronnes ; la distribution faite, les Grâces et les Muses ont chacune le même nombre de couronnes. On demande combien les Muses portaient de couronnes et combien elles en donnèrent.*

Le nombre des Muses étant triple de celui des Grâces, la totalité des couronnes qui restent aux Muses après la distribution est le triple de ce qu'elles ont donné aux Grâces; les Muses portaient donc le quadruple de ce qu'elles ont donné aux Grâces. Par conséquent, le nombre total des couronnes est divisible par 4, et les Muses ont donné le quart de ce qu'elles portaient. Or, chacune des neuf Muses avait d'abord un même nombre de couronnes; le nombre total des couronnes est donc divisible par 9; nous avons prouvé qu'il est aussi divisible par 4, il doit donc être divisible par 4 fois 9, ou par 36; et en effet, tous les multiples de 36 satisfont à la question. Par exemple, si les neuf Muses portant 72 couronnes, en donnent le quart aux Grâces, il restera 54 couronnes aux neuf Muses, et les trois Grâces en auront 18; chaque Muse et chaque Grâce portera donc 6 couronnes après la distribution.

45e Problème. *Partager huit litres de vin en deux parties égales avec trois vases inégaux, dont, le premier contient 8 litres, le second 5 litres et le troisième 3 litres ; les vases sont vides.*

Pour abréger, désignez le vase de 8 litres par A, celui de 5 litres par B, et celui de 3 litres par C. Mettez les 8 litres de vin dans A; versez de A en C, de C en B, de A en C, de C en B, de B en A, de C en B et de A en C; il restera 4 litres dans A.

On peut trouver d'autres solutions de cette question.

# CHAPITRE SIXIÈME.

## *Des Quarrés et de la Racine quarrée, des Cubes et de la Racine cubique. Définitions générales des Puissances et des Racines.*

### *Des Quarrés et de la Racine quarrée.*

90. *Le produit d'un nombre par lui-même se nomme le* QUARRÉ *de ce nombre.*

Ainsi, le quarré de 7 est le produit 49 de 7 par 7, et le quarré de $\frac{3}{4}$ est le produit $\frac{9}{16}$ de $\frac{3}{4}$ par $\frac{3}{4}$.

Pour indiquer le quarré d'un nombre on place le chiffre 2 sur sa droite et un peu au-dessus; de sorte que $7^2$ désigne le quarré de 7.

91. *Le nombre qui, multiplié par lui-même, fournit un nombre donné, est la* RACINE QUARRÉE *du nombre donné.*

Ainsi, la *racine quarrée* de 49 est 7.

Pour indiquer la racine quarrée d'un nombre, on place ce nombre sous le *signe* $\sqrt{\phantom{x}}$, nommé *radical.*

Ainsi $\sqrt{49}$ désigne la racine quarrée de 49.

92. Les quarrés des nombres 1, 10, 100, etc., étant 1, 100, 10000, etc., les nombres compris entre 1 et 100, entre 100 et 10000, etc., ont leurs racines comprises entre 1 et 10, entre 10 et 100, etc. Par conséquent:

*Lorsque le quarré d'un nombre entier n'a pas plus de deux chiffres, sa racine n'a qu'un chiffre; quand le quarré renferme* 3 *ou* 4 *chiffres, sa racine en a deux; et ainsi de suite.*

93. Les quarrés des nombres d'un seul chiffre étant moindres

que 100, on revient à leurs racines, en faisant usage de la *table* suivante :

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *Racines* | 1, | 2, | 3, | 4, | 5, | 6, | 7, | 8, | 9. |
| *Quarrés* | 1, | 4, | 9, | 16, | 25, | 36, | 49, | 64, | 81. |

Lorsqu'une quantité est comprise entre deux nombres entiers consécutifs, ces deux nombres entiers sont les *valeurs entières approchées* de cette quantité.

Par exemple, la racine quarrée de 38 étant comprise entre 6 et 7, puisque 38 tombe entre $6^2$ et $7^2$, la *plus petite valeur entière approchée* de cette racine est 6.

94. Pour extraire la racine d'un nombre entier plus grand que 100, nous chercherons d'abord comment les parties de la racine entrent dans le quarré.

Par exemple, pour faire le quarré de 64, au lieu d'effectuer le produit de 64 par 64, d'après la méthode ordinaire, on multiplie successivement les unités et les dixaines du multiplicande par celles du multiplicateur, en ayant soin de mettre en évidence chacun des produits partiels dont se compose le quarré ; ce qui conduit au calcul suivant :

| | |
|---|---|
| 64 Racine. | |
| 64 | |
| 16 unités. | Quarré des 4 unités. |
| 24 dixaines. | Produit des 6 unités par les 4 dixaines. |
| 24 dixaines. | Produit des 4 unités par les 6 dixaines. |
| 36 centaines. | Quarré des 6 dixaines. |
| 4096 unités. | Quarré de 64. |

1°. On multiplie les 4 unités du multiplicande par les 4 unités du multiplicateur, le produit 16 est le quarré des 4 unités de 64.

2°. On multiplie les 6 dixaines du multiplicande par les 4 unités du multiplicateur, et les 4 unités du multiplicande par les 6 dixaines du multiplicateur ; la somme de ces produits se réduit au double des 6 dixaines multiplié par les 4 unités, ou à 48 dixaines.

3°. Enfin, on multiplie les 6 dixaines du multiplicande par

les 6 dixaines du multiplicateur, ce qui donne le quarré 36 centaines des 6 dixaines de 64.

La somme 4096 de ces trois produits partiels exprimant le quarré de 64, on voit que ce quarré est composé : du quarré 36 centaines des 6 dixaines de 64, du double des 6 dixaines multiplié par les 4 unités, ou de 48 dixaines, et du quarré 16 des 4 unités.

Les mêmes raisonnemens pouvant s'appliquer à tout autre nombre; on voit que *le quarré d'un nombre composé de dixaines et d'unités contient trois parties, savoir : le quarré des dixaines, le double des dixaines multiplié par les unités, et le quarré des unités.* Ces trois produits expriment respectivement des centaines, des dixaines et des unités.

Ainsi, 649 étant égal à 64 dixaines plus 9 unités, le quarré 421201 de 649 est composé : du quarré 4096 centaines des 64 dixaines, du double des 64 dixaines multiplié par les 9 unités ou de 1152 dixaines, et du quarré 81 des 9 unités.

95. Nous allons faire voir comment on peut *revenir du quarré d'un nombre entier quelconque à sa racine.*

1^er^ Exemple. *Extraire la racine de* 4096.

On dispose le calcul de la manière suivante :

| | | |
|---|---|---|
| Quarré..... | 40.96 | 64 Racine. |
| | 36 | 124 × 4 = 496. |
| 1^er^ Reste..... | 4 9.6 | |
| | 4 9 6 | |
| 2^e^ Reste..... | 0 | |

Et l'on dit : le quarré de 10 étant 100, le quarré des dixaines de la racine ne peut se trouver que dans les 40 centaines de 4096 (on sépare par un *point* les deux premiers chiffres à droite de 4096); 40 tombant entre $6^2$ et $7^2$, je dis que 6 est le chiffre des dixaines de la racine, car 4096 étant compris entre $60^2$ et $70^2$, la racine 4096 est nécessairement comprise entre 60 et 70; elle est donc composée de 6 dixaines, et d'un certain nombre d'unités moindre que 10. Pour obtenir ces unités, on retranche de 4096 le quarré 36 centaines des 6 dixaines de la racine; le

reste 496 ne renferme plus que le double des 6 dixaines de la racine multiplié par les unités, et le quarré des unités. Le double des dixaines multiplié par les unités, exprimant des dixaines, ne peut se trouver que dans les 49 dixaines du reste 496 (on sépare par un *point* le premier chiffre à droite du reste); ces 49 dixaines contiennent en outre les dixaines qui peuvent provenir du quarré des unités; divisant donc 49 par 12, double des dixaines de la racine, les 4 unités du quotient expriment le chiffre des unités de la racine ou un chiffre trop fort. Pour essayer le chiffre 4, on pourrait ôter $64^2$ de 4096, le reste zéro indiquerait que 64 est la racine demandée; mais on parvient plus simplement au même résultat en observant que, le reste 496 étant composé du double des 6 dixaines multiplié par les 4 unités et du quarré des 4 unités, il suffit de calculer la *somme* de ces deux parties et de l'ôter de 496. A cet effet, on écrit le chiffre 4 des unités à la droite de 12, double du nombre des dixaines de la racine, ce qui donne 124; on multiplie 124 par 4; le résultat exprime la *somme* demandée; retranchant 4 fois 124 de 496, le reste zéro indique que 64 est la racine exacte de 4096.

Remarque. Le raisonnement qui a servi à déterminer les dixaines de la racine état applicable à un nombre quelconque, on en conclut que *la racine du plus grand quarré contenu dans les centaines d'un nombre quelconque détermine toujours les dixaines de la racine de ce nombre.*

2e Exemple. *Extraire la racine de* 421201.

On dispose le calcul de la manière suivante :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Quarré.... | 4 21.1 21.0 1 | 649 | Racine. | |
| | 36 | 125 | 124 | 1289 |
| 1er Reste... | 61.2 | 5 | 4 | 9 |
| | 49.6 | 625 | 496 | 11601 |
| 2e Reste... | 1160.1 | | | |
| | 1160.1 | | | |
| 3e Reste... | 0 | | | |

Et l'on dit : le nombre proposé ayant plus de deux chiffres, sa racine renferme des dixaines dont le quarré ne peut faire partie

que des 4212 centaines de 421201 (on sépare par un *point* les deux premiers chiffres de 421201).

La racine du plus grand quarré contenu dans 4212, exprimant le nombre des dixaines de la racine cherchée, la question est réduite à déterminer la racine d'un nombre qui contient deux chiffres de moins que le nombre proposé. A cet effet, on sépare par un *point* les deux premiers chiffres à droite de 4212; la racine 6 du plus grand quarré contenu dans 42 est le premier chiffre à gauche de la racine demandée, qui est par conséquent composée de trois chiffres.

On est ainsi conduit à *diviser le nombre donné en* TRANCHES *de deux chiffres à partir de la droite (la dernière tranche peut n'avoir qu'un seul chiffre); le nombre des tranches indique le nombre des chiffres de la racine du quarré proposé.*

En opérant comme dans l'exemple précédent, on trouve que la racine du plus grand quarré contenu dans 4212 est 64, et que l'excès de 4212 sur $64^2$ est 116; la racine de 421201 est donc composée de 64 dixaines, et d'un certain nombre d'unités exprimé par un seul chiffre.

Cela est d'ailleurs évident, car 4212 tombant entre les quarrés 4096, 4225, de 64 et de 65, le nombre 421201 est compris entre les quarrés de 64 dixaines et de 65 dixaines.

Le quarré 421201 étant formé du quarré des 64 dixaines de la racine, du double de ces dixaines multiplié par le chiffre des unités, et du quarré des unités, si l'on ôte de 421201 le quarré des 64 dixaines, le reste 11601 contiendra les deux autres parties du quarré.

On parvient plus simplement à ce reste en observant que l'excès de 4212 sur $64^2$ étant 116, l'excès de 421201 sur $640^2$ s'obtient en abaissant la *tranche* 01 à la droite de 116.

Cela posé: le double des 64 dixaines, qui est 128 dixaines, multiplié par les unités, donnant des dixaines, ne peut se trouver que dans les 1160 dixaines du reste 11601 (on sépare par un *point* le premier chiffre à droite de 11601); ces 1160 dixaines contiennent donc le produit de 128 dixaines par les unités de la racine cherchée, plus les dixaines qui peuvent se trouver dans

le quarré des unités; divisant donc 1160 par 128, les 9 unités du quotient expriment le chiffre des unités de la racine ou un chiffre plus grand.

On pourrait essayer le chiffre 9 en retranchant $649^2$ de 421201, le reste zéro indiquerait que 649 est la racine demandée; mais d'après ce que nous avons fait remarquer dans l'exemple précédent, il est plus simple d'écrire le chiffre 9 à la droite de 128, double des dixaines de la racine, et de multiplier 1289 par 9; le produit est composé du double des 64 dixaines de la racine multiplié par les 9 unités, et du quarré des 9 unités; retranchant 9 fois 1289 de 11601, le reste est égal à $421201 - 649^2$; ce reste étant nul, la racine obtenue est exacte.

Ces exemples suffisent pour faire voir comment on peut *revenir du quarré d'un nombre entier quelconque à sa racine.*

96. *Dans tout le cours des opérations relatives à l'extraction de la racine quarrée, chaque reste est égal au nombre dont on cherche la racine diminué du quarré de la partie de la racine déjà obtenue;* car on est parvenu à ce reste en retranchant successivement du nombre proposé les diverses parties du quarré du nombre obtenu à la racine; quand cette condition n'est pas satisfaite, on a commis des fautes de calcul.

97. *Lorsque la racine d'un nombre entier tombe entre deux nombres entiers consécutifs, cette racine, quoiqu'elle existe, ne saurait être exprimée exactement par aucun nombre.*

En effet, si un nombre pouvait exprimer cette racine, ce nombre serait décimal ou fractionnaire, et en le convertissant en fraction irréductible, le quarré de cette fraction irréductible devrait être un nombre entier; ce qui n'est pas possible (remarque du n° 99). Le principe est donc démontré.

Il est facile de concevoir que *certaines quantités ne sont pas susceptibles d'être exprimées exactement en nombres,* car une quantité peut croître d'une manière continue, tandis que les nombres ne jouissent pas de cette propriété.

Les nombres entiers et décimaux et les fractions ordinaires ayant une commune mesure avec l'unité, on dit que ces quantités sont *commensurables;* et par opposition, les quantités qui

n'ont pas de commune mesure avec l'unité sont dites *incommensurables*.

Par exemple, $\frac{7}{5}$ est *commensurable*, car en divisant l'unité en 5 parties égales, chacune de ces parties est la commune mesure entre $\frac{7}{5}$ et l'unité, puisque cette partie est contenue exactement 7 fois dans $\frac{7}{5}$ et 5 fois dans l'unité.

Au contraire, la racine quarrée de 5 est *incommensurable*, parce que ne pouvant être exprimée exactement par aucun nombre entier ou décimal ou fractionnaire, il en résulte que si l'on conçoit l'unité divisée en autant de parties égales qu'on voudra, l'une de ces parties ne sera jamais assez petite pour être contenue un nombre exact de fois dans la racine de 5 et dans l'unité.

98. Pour *extraire la racine d'un nombre entier quelconque*, on opère comme si le nombre était un quarré. Quand le dernier reste qui correspond au chiffre des unités de la racine n'est pas zéro, la racine cherchée est *incommensurable*, et le nombre obtenu à la racine exprime la racine du plus grand quarré contenu dans le nombre proposé.

Ainsi, l'extraction de la racine de 422110 donnant 649 unités à la racine, et pour reste 909, la racine de 422110 est *incommensurable;* le reste 909 est égal à $422110 - 649^2$, et 649 exprime la racine du plus grand quarré contenu dans 422110.

99. *Le quarré d'une fraction s'obtient en élevant le numérateur et le dénominateur au quarré.*

Par exemple, le quarré de $\frac{4}{5}$ est $\frac{4}{5} \times \frac{4}{5}$ ou $\frac{4 \times 4}{5 \times 5}$ ou $\frac{4^2}{5^2}$ ou $\frac{16}{25}$.

Pour indiquer le quarré de $\frac{4}{5}$, on écrit $\left(\frac{4}{5}\right)^2$.

Remarque. *Le quarré d'une fraction irréductible est une fraction irréductible.* En effet, soit la fraction irréductible $\frac{3}{7}$, dont le quarré est $\frac{9}{49}$; si la fraction $\frac{9}{49}$ n'était pas irréduc-

tible, il y aurait un nombre premier qui diviserait 9 et 49, ou $3 \times 3$ et $7 \times 7$, ce nombre premier devrait donc diviser 3 et 7 (n° 36). La fraction $\frac{3}{7}$ ne serait donc pas irréductible; ce qui est contre l'hypothèse.

100. On déduit du n° précédent que *pour trouver la racine d'une fraction, il suffit d'extraire séparément la racine du numérateur et du dénominateur.*

$$\text{Ainsi,} \quad \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}} = \frac{4}{5}.$$

*On réduit le calcul à extraire la racine d'un seul nombre, en multipliant d'abord les deux termes de la fraction par son dénominateur,* car

$$\sqrt{\frac{23}{7}} = \sqrt{\frac{23 \times 7}{7 \times 7}} = \frac{\sqrt{161}}{\sqrt{7 \times 7}} = \frac{\sqrt{161}}{7}.$$

La plus petite valeur entière approchée de $\sqrt{161}$ étant 12, la racine de $\frac{23}{7}$, à moins de $\frac{1}{7}$ d'unité, est $\frac{12}{7}$.

On pourrait rendre le numérateur un quarré en multipliant les deux termes par ce numérateur; mais, la racine du dénominateur étant incommensurable, il faudrait diviser un nombre entier par une quantité incommensurable, ce qui présenterait le double inconvénient de conduire à des calculs compliqués, et de ne pas faire connaître avec quel degré d'exactitude on obtient la racine de la fraction proposée.

Pour *calculer la racine d'un nombre composé d'un entier et d'une fraction,* on ajoute d'abord l'entier à la fraction, et l'on extrait la racine du nombre fractionnaire qui en résulte. Ainsi,

$$\sqrt{3\frac{2}{7}} = \sqrt{\frac{23}{7}} = \frac{\sqrt{161}}{7}.$$

Il est facile de *déterminer la racine d'un nombre entier à moins d'une fraction donnée dont le numérateur est l'unité.*

Exemple. *Calculer la racine de* 8, *à moins de* $\frac{1}{7}$ *d'unité.*

On observe que

$$\sqrt{8} = \sqrt{\frac{8 \times 7^2}{7^2}} = \frac{\sqrt{8 \times 49}}{\sqrt{7^2}} = \frac{\sqrt{392}}{7}$$

La racine de 392 étant comprise entre 19 et 20, celle de 8 tombe entre $\frac{19}{7}$ et $\frac{20}{7}$; chacune de ces fractions exprime donc $\sqrt{8}$ à moins de $\frac{1}{7}$ d'unité.

102. *Le quarré d'un nombre décimal s'obtient en formant le quarré de ce nombre, abstraction faite de la virgule, et en séparant ensuite à la droite de ce dernier quarré deux fois autant de décimales qu'il y en a dans le nombre donné.* Cela se déduit de la règle du n° 57.

*Le quarré d'un nombre décimal contient donc toujours un nombre pair de chiffres décimaux.*

Exemple. *Former le quarré de* 6,49.

On calcule le quarré 421201 de 649; on sépare ensuite quatre décimales à la droite de 421201; le résultat 42,1201 est le quarré demandé.

Par conséquent: *Pour revenir du quarré d'un nombre décimal à sa racine, il suffit de calculer la racine du nombre entier qui résulte de la suppression de la virgule dans le nombre donné, et de séparer ensuite autant de décimales à la droite de cette racine qu'il y a d'unités dans la moitié du nombre des chiffres décimaux du quarré proposé.*

1er Exemple. *Calculer la racine de* 42,1201.

La racine de 421201 étant 649, la racine demandée est 6,49.

La règle du n° 100 conduit au même résultat, car

$$\sqrt{42,1201} = \sqrt{\frac{421201}{10000}} = \frac{\sqrt{421201}}{\sqrt{10000}} = \frac{649}{100} = 6,49.$$

2e Exemple. *Calculer la racine de* 0,00421201.

La racine de 421201 étant 649, la racine cherchée est 0,0649.

Remarque. Quand le nombre proposé ne contient pas un nombre pair de chiffres décimaux, on est certain qu'il n'est

pas un quarré exact, et l'on détermine la valeur approchée de la racine demandée par la méthode que nous allons faire connaître.

103. Pour *trouver la racine d'un nombre décimal, ou d'un nombre entier, ou d'une fraction, à moins d'une unité décimale d'un ordre déterminé,* on prépare ce nombre de manière qu'il contienne le double du nombre des décimales demandées; on fait abstraction de la *virgule,* on calcule la plus petite valeur entière approchée de la racine de ce dernier nombre, et l'on sépare à la droite de cette racine le nombre de décimales nécessaire à l'approximation demandée.

Ainsi, *selon qu'on veut obtenir la racine à moins d'un dixième, ou d'un centième, ou d'un millième, etc. d'unité, on prépare le nombre donné de sorte qu'il contienne deux décimales, ou quatre décimales, ou six décimales, etc.* Ce qui s'exécute, en mettant des zéro sur la droite du nombre donné, ou en supprimant des décimales à partir de la droite.

1^er^ Exemple. *Calculer la racine de* 0,00004285678 *etc., à moins d'un dix-millième d'unité.*

Pour obtenir quatre décimales à la racine, il suffit d'en conserver huit dans le nombre proposé; ce qui donne 0,00004285; supprimant la virgule et observant que la plus petite valeur entière approchée de $\sqrt{4285}$ est 65, on voit que la racine demandée est 0,0065.

2^e^ Exemple. *Calculer la racine de* 57 *à moins d'un millième d'unité.*

On prépare ce nombre de manière qu'il renferme 6 décimales; ce qui donne 57,000000; supprimant la virgule, on cherche la plus petite valeur entière approchée de $\sqrt{57000000}$ qui est 7549; la racine demandée est 7,549.

Remarque. Quand le nombre donné est entier, on peut simplifier l'écriture des calculs en déterminant d'abord la plus petite valeur entière approchée de la racine du nombre proposé. Pour obtenir les décimales de cette racine, on continue l'opération en plaçant successivement deux zéro à la droite de chaque reste; chaque tranche de deux zéro fournit un chiffre décimal de la racine demandée.

3e Exemple. *Déterminer la racine de* $\frac{5}{11}$, *à moins d'un millième d'unité.*

Pour obtenir trois décimales à la racine, on cherche d'abord le quotient de 5 par 11 avec six décimales; ce qui donne 0,454545; la plus petite valeur entière approchée de $\sqrt{454545}$ étant 674, la racine demandée est 0,674.

Quand il s'agit d'*approcher le plus possible de la racine d'une quantité, en ne conservant qu'un nombre déterminé de décimales*, on calcule une décimale de plus, et l'on supprime ensuite cette décimale d'après la règle du n° 63.

104. *Lorsqu'un nombre n'est divisible par aucun des nombres premiers qui n'excèdent pas sa racine quarrée, ce nombre est premier*, car autrement il admettrait un diviseur plus grand que cette racine quarrée, le quotient correspondant serait moindre que cette racine et diviserait le nombre proposé, ce qui est contre l'hypothèse.

Cette propriété fournit le moyen de simplifier les méthodes qui ont été données dans les nos 28 et 37, pour *trouver les nombres premiers* et pour *décomposer un nombre en ses facteurs premiers*. En effet:

1°. Soit proposé de *former une table des nombres premiers.*

On a vu (n° 28) que *les nombres premiers ne peuvent se trouver que parmi les nombres*

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 49, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 77, 79, etc.

Après avoir reconnu que les deux plus petits nombres premiers sont 2 et 3, on observe que pour obtenir les nombres premiers compris entre 3 et le quarré 9 de 3, il suffit de prendre ceux des nombres 5, 7, qui ne sont divisibles ni par 2 ni par 3; 5 et 7 jouissent de cette propriété.

Connaissant les nombres premiers 2, 3, 5, 7, compris entre 1 et 9, pour obtenir les nombres premiers compris entre 7 et le quarré 81 de 9, il suffit de prendre ceux des nombres

11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 49, 53, 59 61, 67, 71, 73, 77 79,

qui ne sont divisibles par aucun des nombres premiers 2, 3, 5, 7.

On trouve que ces nombres premiers sont

11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73 et 79.

On en déduirait de même tous les nombres premiers compris entre 79 et le quarré 6561 de 81. Et ainsi de suite.

2°. *Pour décomposer un nombre en ses facteurs premiers, on fait usage du procédé du n° 37, avec cette seule différence qu'on ne prend pour diviseurs que les nombres premiers qui n'excèdent pas la racine quarrée du nombre proposé.*

## *Des cubes et de la racine cubique.*

105. *Le produit de trois facteurs égaux à un nombre donné, est ce qu'on nomme le* CUBE *de ce nombre.*

Ainsi, le cube de 7 est le produit 343 de trois nombres égaux à 7.

Pour indiquer le cube d'un nombre, on place le chiffre 3 sur sa droite et un peu au-dessus; de sorte que $7^3$ désigne le cube de 7.

106. *Le nombre qui, pris trois fois comme facteur, détermine un nombre donné, est la* RACINE CUBIQUE *du nombre donné.*

Ainsi, la racine cubique de 343 est 7.

Pour indiquer la racine cubique d'un nombre, on place ce nombre sous le signe $\sqrt{\ }$, entre les branches duquel on met le chiffre 3; de sorte que $\sqrt[3]{343}$ désigne la racine cubique de 343.

107. Les cubes des nombres 1, 10, 100, etc., étant 1, 1000, 1000000, etc., les nombres compris entre 1 et 1000, entre 1000 et 1000000, etc., ont leurs racines cubiques comprises entre 1 et 10, entre 10 et 100; etc. Par conséquent:

*Lorsque le cube d'un nombre entier n'a pas plus de* 3 *chif-*

*fres, sa racine cubique n'en a qu'un; quand le cube renferme 4, 5, ou 6 chiffres, sa racine cubique en a deux; et ainsi de suite.*

108. Les cubes des nombres d'un seul chiffre étant moindres que $10^3$ ou que 1000, on revient à leurs racines en faisant usage de la table suivante :

*Racines cubiques* 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,
*Cubes* 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729.

109. Pour extraire la racine cubique d'un nombre entier plus grand que 1000, nous chercherons d'abord comment les parties de la racine entrent dans le cube. A cet effet, nous concevrons la racine décomposée en dixaines et en unités. Or on a vu (n° 94) que le quarré d'un nombre composé de dixaines et d'unités contient trois parties, savoir : le quarré des dixaines, le double des dixaines multiplié par les unités, et le quarré des unités. Pour en déduire le cube du même nombre, il suffit de multiplier ce quarré par le nombre proposé. En multipliant séparément les trois parties du quarré par les dixaines et les unités du nombre donné, on obtient six produits, savoir :

1°. Le cube des dixaines, qui exprime des *mille*.

2°. Le double produit des dixaines par les unités, multiplié par les dixaines; ce qui se réduit à deux fois le quarré des dixaines multiplié par les unités. Ce produit représente des *centaines*.

3°. Le quarré des unités multiplié par les dixaines; ce qui équivaut au produit des dixaines par le quarré des unités. Ce produit exprime des *dixaines*.

4°. Le quarré des dixaines multiplié par les unités; ce quarré exprime des *centaines*.

5°. Le double du produit des dixaines par les unités, multiplié par les unités, c'est-à-dire le double des dixaines multiplié par le quarré des unités; ce qui donne des *dixaines*.

6°. Le quarré des unités multiplié par les unités, ou le cube des unités; ce cube exprime des *unités*.

Pour réduire la somme de ces six produits à sa plus simple expression, on réunit les produits qui expriment des unités de même ordre. Le nombre total des centaines contenues dans (2°) et (4°) revient à trois fois le quarré des dixaines multiplié par les unités ; les dixaines contenues dans (3°) et (5°) se réduisent à trois fois les dixaines multipliées par le quarré des unités.

On trouve de cette manière que *le cube d'un nombre composé de dixaines et d'unités contient quatre parties, savoir : le cube des dixaines, le produit de trois fois le quarré des dixaines par les unités, le produit de trois fois les dixaines par le quarré des unités, et le cube des unités.* Ces quatre parties expriment respectivement des mille, des centaines, des dixaines et des unités.

Ainsi, le cube de 64 est composé : du cube 216 mille des 6 dixaines de 64, de 3 fois le quarré 36 centaines des 6 dixaines multiplié par les 4 unités ou de 432 centaines, de 3 fois les 6 dixaines multipliées par le quarré des 4 unités ou de 288 dixaines, et enfin du cube 64 des 4 unités. La somme 262144 de ces quatre parties, exprime le cube de 64.

Pour obtenir le cube de 649, on décompose ce nombre en 64 dixaines plus 9 unités, et le cube demandé est formé du cube 262144 mille des 64 dixaines de 649, de 3 fois le quarré 4096 centaines des 64 dixaines multiplié par les 9 unités ou de 110592 centaines, de 3 fois les 64 dixaines multipliées par le quarré 81 des 9 unités, ou de 15552 dixaines, et du cube 729 des 9 unités, la somme 273359449 de ces quatre parties est le cube de 649.

110. Nous allons faire voir comment on peut *revenir du cube d'un nombre entier quelconque à sa racine.*

1er Exemple. *Extraire la racine cubique de* 262144.

On dispose le calcul de la manière suivante :

| | | |
|---|---|---|
| Cube..... | 2 6 2.1 4 4 | 64 Racine cubique. |
| | 2 1 6 | 43200 |
| 1er Reste..... | 4 6 1.4 4 | 2880 |
| | 4 6 1 4 4 | 64 |
| 2e Reste..... | 0 | 46144 |

Et l'on dit : le cube des dixaines de la racine étant des mille, ne peut se trouver que dans les 262 mille de 262144 (on sépare par un *point* les trois premiers chiffres à droite de 262144) ; le nombre 262 tombant entre $6^3$ et $7^3$, je dis que 6 est le chiffre des dixaines de la racine, car 262144 étant compris entre $60^3$ et $70^3$, la racine cubique de 262144 est nécessairement comprise entre 60 et 70; elle est donc composée de 6 dixaines, et d'un certain nombre d'unités moindre que 10. Pour obtenir ces unités, on retranche de 262144, le cube 216 mille des 6 dixaines de la racine; le reste 46144 (*) ne renferme plus que trois fois le quarré des 6 dixaines de la racine multiplié par les unités, trois fois les 6 dixaines multipliées par le quarré des unités, et le cube des unités; le produit de trois fois le quarré des 6 dixaines par les unités étant des centaines, ne peut se trouver que dans les 461 centaines du reste 46144 (on sépare par un *point* les deux premiers chiffres à droite de ce reste); ces centaines renferment en outre les centaines contenues dans les deux dernières parties du cube. Or, le triple quarré des 6 dixaines est 108 centaines; divisant donc 461 centaines par 108 centaines, ou 461 par 108, les 4 unités du quotient expriment le chiffre des unités de la racine ou un chiffre trop fort. Pour essayer le chiffre 4, on ôte $64^3$ de 262144, le reste zéro fait voir que 64 est la racine demandée.

On parvient au même résultat en retranchant du reste 46144 la somme des trois dernières parties, 432 centaines, 288 dixaines, 64 unités, du cube de 64.

Remarque. Le raisonnement qui a servi à déterminer les dixaines de la racine cubique cherchée étant applicable à un nombre quelconque, on en conclut que *la racine du plus grand cube contenu dans les mille d'un nombre quelconque, détermine toujours les dixaines de la racine cubique de ce nombre.*

2e Exemple. *Extraire la racine cubique de* 273359449.

On dispose le calcul de la manière suivante :

---

(*) On obtient plus simplement ce reste en retranchant de 262 le cube de 6 et en écrivant la *tranche* de 144 à droite du reste 46.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Cube | 2 7 3.3 5 9.4 4 9 | 649 Racine cubique. | | |
| | 2 1 6 | | | |
| | | $6^2 \times 3 = 108$, | $64^2 \times 3 = 12288$ | |
| 1er Reste | 5 7 3.5 9 | 54000 | 43200 | 11059200 |
| | 4 6 1 4 4 | 4500 | 2880 | 155520 |
| | | 125 | 64 | 729 |
| 2e Reste | 1 1 2 1 5 4.4 9 | 58625 | 46144 | 11215449 |
| | 1 1 2 1 5 4 4 9 | | | |
| 3e Reste | 0 | | | |

et l'on dit : le nombre proposé ayant plus de trois chiffres, sa racine cubique renferme des dixaines dont le cube ne peut faire partie que des 273359 mille de 273359449 (on sépare par un *point* les trois premiers chiffres à droite de 273359449).

La racine cubique du plus grand cube contenu dans 273359 exprimant le nombre des dixaines de la racine cherchée, la question est réduite à déterminer la racine cubique d'un nombre 273359 qui contient trois chiffres de moins que le nombre proposé ; à cet effet, on sépare par un *point* les trois premiers chiffres à droite de 273359 ; la racine cubique 6 du plus grand cube contenu dans 273, est le 1er chiffre à gauche de la racine demandée, qui est par conséquent composée de trois chiffres.

On est ainsi conduit à *diviser le nombre donné en* TRANCHES *de trois chiffres à partir de la droite (la dernière tranche peut contenir moins de trois chiffres). Le nombre des tranches indique le nombre des chiffres de la racine cubique.*

En opérant comme dans l'exemple précédent, on trouve que la racine cubique du plus grand cube contenu dans 273359 est 64, et que l'excès de 273359 sur $64^3$ est 11215 ; la racine cubique de 273359449 est donc composée de 64 dixaines, et d'un certain nombre d'unités exprimé par un seul chiffre.

Cela est d'ailleurs évident, car 273359 tombant entre les cubes 262144, 274625, de 64 et 65, le nombre 273359449 est compris entre les cubes 262144000, 274625000 de 64 dixaines et de 65 dixaines.

Pour trouver le chiffre des unités de la racine demandée, on retranche de 273359449, le cube 262144 mille des 64 dixaines

de la racine; le reste 11215449 contient 3 fois le quarré des 64 dixaines multiplié par les unités de la racine, 3 fois les 64 dixaines multipliées par le quarré des unités, et le cube des unités.

On parvient au même reste, en observant que l'excès de $273359$ sur $64^3$ étant 11215, l'excès de $273359449$ sur $640^3$ s'obtient en abaissant la *tranche* 449 à la droite de 11215.

Cela posé: le triple quarré des 64 dixaines, qui est 12288 centaines, multiplié par le chiffre des unités de la racine, donnant des centaines, ne peut se trouver que dans les 112154 centaines du reste 11215449 (on sépare par un *point* les deux premiers chiffres à droite de 11215449); ces centaines renferment en outre les centaines contenues dans les deux dernières parties du cube; divisant donc 112154 par 12288, les 9 unités du quotient expriment le chiffre des unités de la racine, ou un chiffre plus grand.

Pour essayer le chiffre 9, on ôte $649^3$ de $273359449$; le reste zéro fait voir que 649 est la racine cubique de $273359449$.

On parvient au même résultat en retranchant du reste 11215449, la somme des trois dernières parties, 110592 centaines, 15552 dixaines, 720 unités, du cube de $640+9$; le reste est égal à $273359449 - 649^3$; ce reste étant nul, la racine obtenue est exacte.

Ces exemples suffisent pour faire voir comment on peut *revenir du cube d'un nombre entier quelconque à sa racine.*

111. *Dans tout le cours des opérations relatives à l'extraction de la racine cubique, chaque reste est égal au nombre dont on cherche la racine cubique, diminué du cube de la partie de la racine déjà obtenue,* car on est parvenu à ce reste en retranchant successivement du nombre proposé, les diverses parties du cube du nombre obtenu à la racine. Quand cette condition n'est pas satisfaite, on a commis des fautes de calcul.

112. Lorsque la racine cubique d'un nombre entier tombe entre deux nombres entiers consécutifs, cette *racine* quoiqu'elle existe, ne saurait être exprimée exactement par aucun nombre, car elle n'est pas un nombre entier, et elle ne peut être une

fraction (remarque du n° 114). On dit par ce motif que cette racine est *incommensurable* (n° 97).

Dans ce cas, si l'on divise le nombre proposé en tranches de trois chiffres à partir de la droite, le nombre des tranches indique le nombre des chiffres de la plus petite valeur entière approchée de la racine cubique demandée.

113. *Pour extraire la racine cubique d'un nombre entier quelconque*, on opère comme si ce nombre était un cube. Quand le dernier reste, qui correspond au chiffre des unités de la racine cubique, n'est pas zéro, la racine cherchée est incommensurable, et le nombre obtenu à la racine exprime la racine cubique du plus grand cube contenu dans le nombre proposé.

Par exemple, l'extraction de la racine cubique de 27336o358 donnant 649 unités à la racine et pour reste 909, cette racine est *incommensurable ;* le reste 909 est égal à $27336o358 - 649^3$, et 649 exprime la racine du plus grand cube contenu dans 27336o358.

114. *Le cube d'une fraction s'obtient en élevant le numérateur et le dénominateur au cube.*

Par exemple, le cube de $\frac{4}{5}$ est $\frac{4}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{4}{5}$, ou $\frac{4^3}{5^3}$ ou $\frac{64}{125}$.

Pour indiquer le cube de $\frac{4}{5}$ on écrit $\left(\frac{4}{5}\right)$.

Remarque. On démontrerait, par des raisonnemens analogues à ceux de la remarque du n° 99, que *le cube d'une fraction irréductible est toujours une fraction irréductible.*

115. On déduit du n° précédent que *Pour trouver la racine cubique d'une fraction, il suffit d'extraire séparément la racine cubique du numérateur et du dénominateur.*

$$\text{Ainsi, } \sqrt[3]{\frac{64}{125}} = \frac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{125}} = \frac{4}{5}.$$

*On réduit le calcul à extraire la racine d'un seul nombre, en multipliant d'abord les deux termes de la fraction par le quarré de son dénominateur,* car

$$\sqrt[3]{\frac{11}{2}} = \sqrt[3]{\frac{11\times 4}{2\times 4}} = \sqrt[3]{\frac{44}{2^3}} = \frac{\sqrt[3]{44}}{2}.$$

La plus petite valeur entière approchée de $\sqrt[3]{44}$ étant 3, la racine cubique de $\frac{11}{2}$ à moins de $\frac{1}{2}$ unité, est $\frac{3}{2}$.

116. Il est facile de *déterminer la racine cubique d'un nombre entier à moins d'une fraction dont le numérateur est l'unité.*

Exemple. *Calculer la racine cubique de* 5, *à moins de* $\frac{1}{7}$ *d'unité.*

On observe que

$$\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{\frac{5\times 7^3}{7^3}} = \sqrt[3]{\frac{1715}{7^3}} = \frac{\sqrt[3]{1715}}{7}.$$

La racine cubique de 1715 étant comprise entre 11 et 12, celle de 5 tombe entre $\frac{11}{7}$ et $\frac{12}{7}$; chacune de ces fractions exprime donc $\sqrt[3]{5}$, à moins de $\frac{1}{7}$ d'unité.

117. *Le cube d'un nombre décimal s'obtient en formant le cube de ce nombre abstraction faite de la virgule, et en séparant ensuite à la droite de ce dernier cube, trois fois autant de décimales qu'il y en a dans le nombre décimal proposé.* Cela se déduit de la règle du n° 57.

Exemple. *Former le cube de* 6,49.

On calcule le cube 273359449 de 649, et on sépare six décimales à sa droite; le résultat 273,359449 est le cube demandé.

Par conséquent : *Pour revenir du cube d'un nombre décimal à sa racine cubique, il suffit de calculer la racine cubique du nombre entier qui résulte de la suppression de la virgule dans le nombre donné, et de séparer ensuite autant de décimales à la droite de cette racine, qu'il y a d'unités dans le tiers du nombre des décimales du cube proposé.*

1er Exemple. *Calculer la racine cubique de* 273,359449.

La racine cubique de 273359449 étant 649, la racine demandée est 6,49.

2e Exemple. *Calculer la racine cubique de* 0,000273359449.

La racine cubique de 273359449 étant 649, la racine cherchée est 0,0649.

Remarque. Quand le nombre des chiffres décimaux du nombre proposé n'est pas un multiple de 3, on est certain que le nombre n'est pas un cube exact, et la valeur approchée de la racine cubique demandée s'obtient par la méthode que nous allons faire connaître.

118. Pour *trouver la racine cubique d'un nombre décimal, ou d'un nombre entier, ou d'une fraction, à moins d'une unité décimale d'un ordre déterminé,* on prépare ce nombre de manière qu'il contienne le triple du nombre des décimales demandées; on fait abstraction de la virgule, on calcule la plus petite valeur entière approchée de la racine cubique de ce nombre entier, et on sépare à la droite de cette racine le nombre de décimales nécessaire à l'approximation demandée.

Ainsi, *selon qu'on veut obtenir la racine cubique à moins d'un dixième, ou d'un centième, ou d'un millième, etc., d'unité, on prépare le nombre donné de sorte qu'il contienne, trois décimales, ou six décimales, ou neuf décimales, etc.;* ce qui s'exécute en mettant des zéro sur la droite du nombre donné, ou en supprimant des décimales à partir de la droite.

1er Exemple. *Calculer la racine cubique de* 0,000012755427 etc. *à moins d'un millième d'unité.*

Pour obtenir 3 décimales à la racine cubique, il suffit d'en conserver 9 dans le nombre proposé; ce qui donne 0,000012755.

La plus petite valeur entière approchée de $\sqrt[3]{12755}$ étant 23, la racine demandée est 0,023.

2e Exemple. *Calculer la racine cubique de* 8755, *à moins d'un centième d'unité.*

On prépare ce nombre de manière qu'il renferme 6 décimales ce qui donne 8755,000000; on cherche ensuite la plus petite valeur entière approchée de $\sqrt[3]{8755000000}$, qui est 2061; la racine demandée est 20,61.

Remarque. Quand le nombre donné est entier, on simplifie

l'écriture des calculs en déterminant d'abord la plus petite valeur entière approchée de la racine cubique du nombre proposé. Pour obtenir les décimales de cette racine, on continue l'opération en plaçant successivement trois zéro à la droite de chaque reste. Chaque tranche de 3 zéro fournit un chiffre décimal de la racine demandée.

3e Exemple. *Calculer la racine cubique de* $\frac{71}{22}$ *à moins d'un centième d'unité.*

On cherche le quotient de 71 par 22 avec six décimales; ce qui donne 3,227272; la plus petite valeur entière approchée de $\sqrt[3]{3227272}$ étant 147, la racine demandée est 1,47.

Quand il s'agit d'*approcher le plus possible de la racine cubique d'une quantité, en ne conservant qu'un nombre déterminé de décimales*, on calcule une décimale de plus à la racine, et l'on supprime ensuite cette décimale d'après la règle du n° 63.

## *Définitions générales des puissances et des racines.*

119. *Lorsqu'on multiplie une quantité plusieurs fois par elle-même, le produit est une* puissance *de cette quantité, et cette quantité est la* racine *de la puissance.*

Pour distinguer les diverses puissances d'une quantité, on dit: deuxième puissance, troisième puissance, quatrième puissance, etc., suivant le nombre de fois que cette quantité est facteur; et la quantité qui, étant prise comme facteur 2 fois, 3 fois, 4 fois, etc., donne une certaine quantité, est la *racine deuxième, troisième, quatrième,* etc. de cette dernière quantité.

Ainsi, la quatrième puissance de 2 est le produit 16 de quatre facteurs égaux à 2, et la *racine quatrième* ou du *quatrième degré* de 16 est 2.

Remarque. En comparant ces définitions générales à celles des n°s 90, 91, 105 et 106, on voit que les expressions

*Quarré, Cube, Racine quarrée, Racine cubique.*

signifient la même chose que

*2ième puissance, 3ième puissance, Racine deuxième, Racine troisième.*

On indique une puissance d'une quantité en plaçant à la droite de cette quantité et un peu au-dessus, le nombre qui marque la puissance à laquelle on veut élever cette quantité, et pour désigner la racine d'un certain degré d'une quantité, on couvre cette quantité du signe $\sqrt{\ }$ nommé *Radical*, entre les *branches* duquel on met le nombre qui indique le *degré* ou l'*indice* de la racine.

Ainsi, $2^4$ désigne la quatrième puissance de 2; 4 se nomme l'*exposant* de 2. Pour indiquer la racine quatrième de 16, on écrit $\sqrt[4]{16}$, et 4 s'appelle l'*indice* du radical ou de la racine.

Pour désigner la racine quarrée ou deuxième d'un nombre, on peut placer ce nombre sous le signe $\sqrt[2]{\ }$; mais ordinairement on fait abstraction de l'indice 2.

L'extraction de la racine quarrée et celle de la racine cubique, fournissent le moyen de *calculer toutes les racines dont les indices ne renferment que les facteurs premiers* 2 et 3; car il suffit d'extraire successivement des racines dont le produit des indices soit égal à l'indice de la racine cherchée.

Par exemple, pour obtenir la racine sixième d'un nombre, il suffit d'extraire la racine cubique de la racine quarrée de ce nombre, car la racine sixième devant être six fois facteur dans la sixième puissance, on peut former la sixième puissance d'un nombre en élevant au quarré le cube de ce nombre.

On parviendra de même aux résultats suivans:

$$\sqrt[6]{729} = \sqrt[3]{\sqrt{729}} = \sqrt[3]{27} = 3,$$

$$\sqrt[6]{15625} = \sqrt[3]{\sqrt{15625}} = \sqrt[3]{125} = 5.$$

# CHAPITRE SEPTIÈME.

## *Rapports, Proportions et Progressions.*

120. La différence entre deux quantités est leur *rapport arithmétique* ou par *différence ;* le quotient de deux quantités est leur *rapport géométrique* ou par *quotient.* Ainsi, le rapport arithmétique de 18 à 6 est 18 — 6 ou 12, et le rapport géométrique de 18 à 6 est $\frac{18}{6}$ ou 3; 18 et 6 sont les deux *termes* de chacun de ces rapports; le 1^er^ terme 18 en est l'*antécédent,* et le 2^e^ terme 6 en est le *conséquent.*

*Un rapport arithmétique ne change pas, quand on augmente ou diminue ses deux termes d'un même nombre,* car lorsque deux nombres augmentent ou diminuent d'une même quantité la différence ne change pas.

*Un rapport géométrique ne change pas, lorsqu'on multiplie ou divise ses deux termes par un même nombre,* car ce rapport est équivalent à une fraction dont le numérateur et le dénominateur sont l'antécédent et le conséquent du rapport.

121. *L'assemblage de deux rapports égaux forme une* PROPORTION. Par exemple, le rapport arithmétique de 7 à 5 étant égal à celui de 11 à 9, les nombres 7, 5, 11, 9, forment une *proportion arithmétique* que l'on écrit de cette manière, 7.5 : 11.9,

et que l'on énonce, 7 *est à* 5 *comme* 11 *est à* 9.

Le rapport géométrique de 6 à 2 étant égal à celui de 24 à 8, les nombres 6, 2, 24, 8, forment une *proportion géométrique,* que l'on écrit de cette manière, 6 : 2 :: 24 : 8,

et que l'on énonce, 6 *est à* 2 *comme* 24 *est à* 8.

Pour distinguer les deux antécédens et les deux conséquens d'une proportion, on appelle 1^er^ antécédent et 1^er^ conséquent les deux termes du 1^er^ rapport; et 2^e^ antécédent, 2^e^ conséquent, ceux du 2^e^ rapport. Le 1^er^ terme et le 4^e^ sont les *extrêmes ;* le 2^e^ et le 3^e^ sont les *moyens.*

Dans une proportion arithmétique, la différence des deux premiers termes est la *raison du* 1^er^ *rapport*, la différence des deux autres termes est la *raison du* 2^e^ *rapport;* et dans une proportion géométrique, le quotient du 1^er^ terme par le 2^e^ est la *raison du* 1^er^ *rapport*, le quotient du 3^e^ terme par le 4^e^ est la *raison du* 2^e^ *rapport.*

*Dans toute proportion, la raison du* 1^er^ *rapport est égale à la raison du* 2^e^ *rapport.*

Le 4^e^ terme d'une proportion est une 4^e^ *proportionnelle* aux trois autres termes. Quand les *moyens* sont égaux, la proportion est dite *continue.*

Dans la proportion continue 5.7 : 7.9, le terme *moyen* 7 est une *moyenne arithmétique* entre 5 et 9; cette proportion s'écrit ÷ 5.7.9, et 9 est une 3^e^ *proportionnelle arithmétique* à 5 et 7. De même 4 : 12 :: 12 : 36 est une proportion géométrique continue qu'on écrit ÷÷ 4 : 12 : 36; 12 est une *moyenne géométrique* entre 4 et 36; 36 est une 3^e^ *proportionnelle géométrique* à 4 et 12.

122. *Dans toute proportion arithmétique, la somme des extrêmes est égale à la somme des moyens.* En effet :

1°. Quand les antécédens sont plus grands que les conséquens, chaque antécédent est égal au conséquent plus la *raison;* de sorte que la proportion

1^er^ *antécédent.* 1^er^ *conséquent* : 2^e^ *antécédent.* 2^e^ *conséquent,*

revient à cette autre proportion :

*Le* 1^er^ *conséquent plus la raison du* 1^er^ *rapport,*
*est au* 1^er^ *conséquent,*
*comme le* 2^e^ *conséquent plus la raison du* 2^e^ *rapport,*
*est au* 2^e^ *conséquent.*

La somme des extrêmes est composée des deux conséquens et de la raison du 1^er^ rapport; la somme des moyens est composée des deux conséquens et de la raison du 2^e^ rapport. Or, la raison du 1^er^ rapport est égal à celle du 2^e^; la somme des extrêmes est donc formée des mêmes parties que celle des moyens, ces sommes sont donc égales.

2°. Si les antécédens étaient moindres que les conséquens, on remplacerait chaque antécédent par son conséquent diminué de la raison, et l'on verrait que la somme des extrêmes est formée des mêmes parties que celle des moyens.

*Lorsque quatre nombres ne sont pas en proportion arithmétique, la somme des extrêmes n'est pas égale à la somme des moyens,* car la raison du 1^er^ rapport n'étant pas égale à celle du 2^e^, il résulte de la démonstration précédente que la somme des parties qui composent les extrêmes n'est pas égale à la somme des parties qui composent les moyens.

123. *Quand la somme de deux nombres est égale à la somme de deux autres nombres, ces quatre nombres forment une proportion arithmétique dans laquelle deux des nombres qui composent une des sommes sont les extrêmes, et les deux autres sont les moyens*, car en vertu du principe précédent, si ces nombres n'étaient pas en proportion, les deux sommes ne seraient pas égales.

124. *Le 4^e^ terme d'une proportion arithmétique est égal à la somme des moyens diminuée du 1^er^ terme;* car la somme des moyens est égale au 4^e^ terme augmenté du 1^er^ terme.

125. Il résulte du 1^er^ principe du n° 122, que la *moyenne arithmétique entre deux nombres est égale à la moitié de leur somme.*

126. *On peut faire subir à une proportion arithmétique toutes les transformations qui n'altèrent pas l'égalité entre la somme des extrêmes et celle des moyens* (n° 123).

Par exemple, la proportion 7.5:11.9 donnant 7+9=5+11, les nombres 7, 5, 11, 9 fournissent les huit proportions

7.5:11. 9, 7.11:5. 9, 9.5:11.7, 9.11:5.7,
5.7: 9.11, 5. 9:7.11, 11.7: 9.5, 11. 9:7.5.

127. *Dans toute proportion géométrique, le produit des extrêmes est égal au produit des moyens.* En effet, chaque antécédent étant égal à son conséquent multiplié par la raison, la proportion

1^er^ *antécédent* : 1^er^ *conséquent* :: 2^e^ *antécédent* : 2^e^ *conséquent,*

revient à cette autre proportion :

*Le 1^er conséquent multiplié par la raison du 1^er rapport, est au premier conséquent,*
*comme le 2^e conséquent multiplié par la raison du 2^e rapport, est au 2^e conséquent.*

Ainsi, les facteurs qui entrent dans le produit des extrêmes sont les deux conséquens et la raison du 1^er rapport, les facteurs qui entrent dans le produit des moyens sont les deux conséquens et la raison du 2^e rapport. Or, la raison du 1^er rapport est égale à celle du 2^e rapport. Le principe est donc démontré.

*Lorsque quatre nombres ne sont pas en proportion* (*), *le produit des extrêmes n'est pas égal au produit des moyens,* car la raison du 1^er rapport n'étant pas égale à celle du 2^e, la démonstration précédente prouve que le produit des extrêmes n'est pas égal à celui des moyens.

128. *Quand le produit de deux nombres est égal au produit de deux autres nombres, ces quatre nombres forment une proportion dans laquelle les deux facteurs d'un des produits sont les extrêmes, et les deux autres facteurs sont les moyens,* car en vertu du principe précédent, si ces nombres n'étaient pas en proportion, les deux produits ne seraient pas égaux.

129. *Le 4^e terme d'une proportion est égal au produit des moyens divisé par le 1^er terme,* car le produit des moyens est égal au 4^e terme multiplié par le 1^er terme.

On démontrerait de même que chaque *moyen s'obtient en divisant le produit des extrêmes par l'autre moyen.*

130. *La moyenne géométrique entre deux nombres est égale à la racine quarrée du produit de ces deux nombres,* car les deux nombres donnés étant les extrêmes de la proportion, et les moyens étant égaux, le produit des deux nombres donnés devient égal au quarré du terme moyen.

1^er Exemple. *Insérer* une moyenne géométrique entre 4 et

(*) Toutes les fois qu'on parlera d'un *rapport* ou d'une *proportion*, sans en désigner l'espèce, il faudra sous-entendre qu'il s'agit d'un *rapport géométrique* ou d'une *proportion géométrique*.

36. On forme le produit 144 de 4 par 36, et la racine de 144, qui est 12, exprime la moyenne demandée. On en déduit la proportion continue

$$4 : 12 :: 12 : 36, \quad \text{ou} \quad \div\!\!\div 4 : 12 : 36.$$

2e Exemple. Trouver une moyenne géométrique entre 1 et 10. La moyenne demandée est égale à la racine de 10; cette racine étant *incommensurable,* aucun nombre ne satisfait rigoureusement à la question, mais on peut calculer un nombre qui approche d'aussi près qu'on veut de la moyenne géométrique demandée.

131. *On peut faire subir à une proportion toutes les transformations qui n'altèrent pas l'égalité entre le produit des extrêmes et celui des moyens* (n° 128).

Par exemple, la proportion $6 : 2 :: 24 : 8$, donnant $6 \times 8 = 2 \times 24$, les nombres 6, 2, 24, 8, fournissent les huit proportions

$$6:2::24:8, \quad 6:24::2:8, \quad 8:2::24:6, \quad 8:24::2:6,$$
$$2:6::8:24, \quad 2:8::6:24, \quad 24:6::8:2, \quad 24:8::6:2.$$

1re Remarque. Les quatre premières proportions démontrent que *si quatre nombres sont en proportion, ils le seront encore lorsqu'on transposera les moyens ou les extrêmes.*

2e Remarque. Les quatre autres proportions font voir qu'*une proportion n'est pas troublée, quand on met les extrêmes à la place des moyens et les moyens à la place des extrêmes.*

3e Remarque. La proportion $6 : 2 :: 24 : 8$, donnant $2 : 8 :: 6 : 24$, il en résulte que *dans toute proportion, le rapport du 1er conséquent au 2e conséquent est égal au rapport du 1er antécédent au 2e antécédent.*

132. *On peut multiplier ou diviser un extrême et un moyen par un même nombre, sans que la proportion cesse d'exister,* car cette propriété a lieu quand l'extrême et le moyen sont les deux termes d'un même rapport (n° 120), et on peut toujours satisfaire à cette dernière condition, en changeant convenablement l'ordre des termes de la proportion primitive.

REMARQUE. Cette proposition fournit le moyen de *faire disparaître les termes fractionnaires d'une proportion.*

EXEMPLE. Soit la proportion $\frac{1}{3} : \frac{5}{7} :: 4 : \frac{60}{7}$, on multiplie les antécédens par 3, et les conséquens par 7; ce qui fournit la proportion équivalente 1 : 5 :: 12 : 60.

133. *Quand deux proportions ont un rapport commun, les deux autres rapports forment une proportion,* car ces deux autres rapports étant égaux au rapport commun, sont égaux entre eux.

134. *Lorsque deux proportions ont les mêmes antécédens ou les mêmes conséquens, les quatre autres termes forment une proportion.* Cette propriété se déduit de la précédente, en transposant les moyens ou les extrêmes.

135. *Toute proportion jouit des propriétés suivantes :*

1°. *Le 1^er^ antécédent plus ou moins un certain nombre de fois son conséquent, est à ce conséquent, comme le 2^e^ antécédent plus ou moins le même nombre de fois son conséquent, est à ce conséquent.* En effet, le rapport d'un antécédent à son conséquent exprimant le nombre de fois que l'antécédent contient le conséquent, si l'on augmente ou si l'on diminue chaque antécédent du même nombre de fois son conséquent, chaque rapport augmentera ou diminuera de l'unité prise ce même nombre de fois; et comme les deux premiers rapports étaient égaux, les deux nouveaux rapports seront égaux; ce qui démontre le principe énoncé.

2°. *Le 1^er^ antécédent plus ou moins un certain nombre de fois son conséquent, est au 2^e^ antécédent plus ou moins le même nombre de fois son conséquent, comme le 1^er^ conséquent est au 2^e^ conséquent, et comme le premier antécédent est au 2^e^ antécédent.* Pour démontrer ce principe, il suffit de changer d'abord l'ordre des moyens dans la proportion énoncée (1°.); et d'observer ensuite que dans la proportion primitive, le rapport du 1^er^ conséquent au 2^e^ conséquent est le même que celui du 1^er^ antécédent au 2^e^ antécédent (3^e^ *Remarque du* n° 131).

3°. *Le 1^er^ antécédent plus un certain nombre de fois son con-*

*séquent, est au 2^e antécédent plus le même nombre de fois son conséquent, comme le 1^er antécédent moins un nombre quelconque de fois son conséquent, est au 2^e antécédent moins le même nombre de fois son conséquent.* Cette propriété n'est qu'une conséquence de (2°.) et du principe du n° 133.

4°. *Le 1^er antécédent plus ou moins un certain nombre de fois le 2^e antécédent, est au 1^er conséquent plus ou moins le même nombre de fois le 2^e conséquent, comme chaque antécédent est à son conséquent.* Pour démontrer cette propriété, il suffit de changer l'ordre des moyens dans la proportion donnée, et d'appliquer ensuite à cette nouvelle proportion le principe énoncé (2°.).

5°. *Le 1^er antécédent plus un certain nombre de fois le 2^e antécédent, est au 1^er conséquent plus le même nombre de fois le 2^e conséquent, comme le 1^er antécédent moins un nombre quelconque de fois le 2^e antécédent, est au 1^er conséquent moins le même nombre de fois le 2^e conséquent.* Cette propriété résulte de (4°.) et du principe du n° 133.

136. De ces propriétés générales, on pourrait en déduire plusieurs autres qui n'en seraient que des cas particuliers; nous nous bornerons à énoncer celles dont on se sert le plus fréquemment.

*Dans toute proportion :*

1°. *Le 1^er antécédent plus ou moins son conséquent, est à ce conséquent, comme le 2^e antécédent plus ou moins son conséquent, est à ce conséquent* (n° 135, 1°.).

2°. *Le 1^er antécédent plus ou moins son conséquent, est au 2^e antécédent plus ou moins son conséquent, comme le 1^er conséquent est au 2^e conséquent, et comme le 1^er antécédent est au 2^e antécédent* (n° 135, 2°.).

3°. *La somme des deux premiers termes, est à la somme des deux autres, comme la différence des deux premiers termes, est à la différence des deux autres* (n° 135, 3°.).

4°. *La somme ou la différence des antécédens, est à la somme ou à la différence des conséquens, comme chaque antécédent est à son conséquent* (n° 135, 4°.).

5°. *La somme des antécédens, est à la somme des conséquens, comme la différence des antécédens, est à la différence des conséquens* (n° 135, 5°.).

137. *Lorsqu'on multiplie les termes de plusieurs proportions les uns par les autres et par ordre, les quatre produits forment une proportion.* En effet, les proportions

$$3 : 6 :: 4 : 8, \quad 5 : 7 :: 20 : 28, \quad 2 : 11 :: 8 : 44,$$

exprimant que les rapports $\frac{3}{6}, \frac{5}{7}, \frac{2}{11}$, sont respectivement égaux aux rapports $\frac{4}{8}, \frac{20}{28}, \frac{8}{44}$, le produit $\frac{3 \times 5 \times 2}{6 \times 7 \times 11}$ des trois premiers rapports doit être égal au produit $\frac{4 \times 20 \times 8}{8 \times 28 \times 44}$ des trois autres; ce qui conduit à la proportion

$$3 \times 5 \times 2 : 6 \times 7 \times 11 :: 4 \times 20 \times 8 : 8 \times 28 \times 44.$$

*Les puissances semblables de quatre nombres en proportion forment donc une nouvelle proportion.*

Il en résulte que *les racines semblables de quatre quantités qui sont en proportion, forment aussi une nouvelle proportion.*

138. *Dans une suite de rapports égaux, la somme des antécédens est à la somme des conséquens, comme un antécédent est à son conséquent.* En effet, soient les rapports égaux $\frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \frac{7}{14}$; d'après le principe du n° 136 (4°.), la proportion

$$3 : 6 :: 4 : 8 \text{ donne } 3 + 4 : 6 + 8 :: 4 : 8.$$

Or, $4 : 8 :: 7 : 14$; donc $3 + 4 : 6 + 8 :: 7 : 14$.

On déduit de cette dernière proportion

$$3 + 4 + 7 : 6 + 8 + 14 :: 7 : 14.$$

Remarque. Pour indiquer que les rapports $\frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \frac{7}{14}$, sont égaux, on écrit $3 : 6 :: 4 : 8 :: 7 : 14$,

et on dit, 3 est à 6, comme 4 est à 8, comme 7 est à 14.

## *Application de la théorie des proportions à la solution des problèmes de l'Arithmétique.*

139. 1^er^ Problème. *Quatre ouvriers ont fait* 20 *mètres d'ouvrage ; combien* 9 *ouvriers en feront-ils ?*

Les quantités d'ouvrage exécutées par des ouvriers étant *proportionnelles* aux nombres des ouvriers, si $x$ désigne le nombre de mètres demandé, on aura

$$4 : 9 :: 20 : x \text{ (*)}; \text{ d'où } x = 45.$$

Remarque. L'ouvrage exécuté par des ouvriers étant d'autant plus grand qu'il y a plus d'ouvriers, on dit que les ouvrages faits par des ouvriers sont dans le *rapport direct,* ou en *raison directe* du nombre des ouvriers.

2^e^ Problème. *Trois ouvriers ont fait un ouvrage en* 15 *heures ; combien* 5 *ouvriers mettront-ils d'heures à exécuter le même ouvrage ?*

On a trouvé (3^e^ Problème, n° 80) que le temps cherché est 9 heures; en sorte que

les nombres d'ouvriers étant dans le rapport de 3 à 5,
les temps employés sont dans le rapport de 15 à 9 ou de 5 à 3.

Ainsi, pour résoudre le 2^e^ Problème, on pose la proportion

$$5 : 3 :: 15 : x; \text{ d'où } x = 9.$$

Remarque. Le temps employé pour exécuter un ouvrage étant d'autant plus grand qu'il y a moins d'ouvriers, on dit par ce motif que le nombre des heures de travail est dans le *rapport inverse* ou en *raison inverse* du nombre des ouvriers.

Par conséquent : *Pour passer d'un rapport inverse au rapport direct correspondant, il suffit de changer l'ordre des termes du premier rapport,* c'est-à-dire que, *pour établir une proportion entre un rapport direct et son rapport inverse, il suffit de changer l'ordre des termes de l'un de ces rapports.*

---

(*) Quand l'un des termes d'une proportion sera inconnu, on le désignera par $x$.

La méthode qui a été employée pour résoudre les deux problèmes précédens se nomme *règle de trois simple ;* et suivant que les deux rapports sont *directs* ou *inverses*, la *règle de trois* est *directe* ou *inverse*.

## *Règle de trois composée.*

140. 3e Problème. *2 ouvriers qui travaillent 3 heures par jours font en 5 jours 90 mètres d'ouvrage ; combien 3 ouvriers qui travailleraient 7 heures par jour, feraient-ils du même ouvrage en 2 jours ?*

1re Solution. On aura successivement égard aux nombres des ouvriers, des heures et des jours ; ce qui conduira à résoudre les questions suivantes :

*2 ouvriers travaillant 3 heures par jour, font en 5 jours 90 mètres. Combien 3 ouvr. travail. 3h par jour, pendant 5j, feront-ils d'ouvrage ?*

Les nombres des heures et des jours ne changeant pas, on dira :

*2 ouvriers ont fait 90 mètres, combien 3 ouvriers en feront-ils ?*

Le nombre de mètres cherché est le 4e terme de la proportion

$$2 : 3 :: 90 : x ; \quad \text{d'où} \quad x = 135. \quad \text{Ainsi :}$$

3 ouvriers travaillant 3h par jour pendant 5 jours, font $135^m$.

Continuant à opérer de la même manière, on trouve à l'aide de deux règles de trois simples

que 3 ouvriers travaillant 7 heures par jour pendant 5 jours, font $315^m$, et que les 3 ouvriers travaillant 7h par jour pendant 2 jours, font $126^m$.

On simplifie les calculs précédens en n'ayant pas égard aux parties qui sont les mêmes dans les énoncés successifs, et en ne faisant qu'indiquer les multiplications et les divisions, parce qu'il arrive souvent que ces opérations se détruisent en partie. En effet :

1°. *2 ouvriers ont fait $90^m$, combien 3 ouvriers en feront-ils ?*

$$2 : 3 :: 90 : x ; \quad \text{d'où} \quad x = \frac{3 \times 90}{2}.$$

2°. *En 3h on a fait $\frac{3 \times 90^m}{2}$ ; combien fera-t-on de mètres en 7 heures ?*

$$3 : 7 :: \frac{3 \times 90}{2} : x ; \quad \text{d'où} \quad x = \frac{3 \times 90 \times 7}{2 \times 3}.$$

3°. *En 5j on fait* $\frac{3\times 90\times 7^m}{2\times 3}$; *combien fera-t-on de mètres en 2 jours?*

$$5 : 2 :: \frac{3\times 90\times 7}{2\times 3} : x; \quad \text{d'où} \quad x = \frac{3\times 90\times 7\times 2}{2\times 3\times 5}.$$

Supprimant les facteurs 2 et 3, communs aux deux termes de cette dernière fraction, le nombre de mètres cherché se réduit à 126.

Cette solution dépendant de plusieurs règles de trois simples et directes, est une *règle de trois composée et directe*.

2e Solution. On peut faire dépendre la question précédente d'une seule règle de trois simple. En effet :

2 ouvriers travaillant $3^h$ font autant d'ouvrage qu'un ouvrier qui travaillerait 2 fois $3^h$; mais un ouvrier qui travaille 2 fois $3^h$ par jour pendant 5 jours a travaillé pendant 2 fois $3^h\times 5$, c'est-à-dire pendant $2\times 3\times 5$ heures; les 2 ouvriers travaillant 3 heures par jour pendant 5 jours, font donc autant d'ouvrage qu'un ouvrier qui travaillerait seul pendant $2\times 3\times 5$ ou 30 heures.

On verrait de même que 3 ouvriers travaillant 7 heures par jour pendant 2 jours font autant d'ouvrage qu'un ouvrier qui travaillerait pendant $3\times 7\times 2$ ou 42 heures.

La question est donc réduite à cette autre :

*Un ouvrier a mis* 30 *heures à faire* 90 *mètres d'ouvrage; combien en fera-t-il pendant* 42 *heures?* Le nombre de mètres cherché est le 4e terme de la proportion $30 : 42 :: 90 : x$; d'où $x = 126$.

4e Problème. 2 *ouvriers qui travaillent* 3 *heures par jour font en* 5 *jours* $90^m$ *d'ouvrage; combien faudra-t-il de jours à* 3 *ouvriers qui travaillent* 7 *heures par jour, pour faire* $126^m$?

Si l'on raisonne comme dans le 3e problème, on trouvera successivement, à l'aide de deux règles de trois simples et directes,

que 3 ouvriers travaillant $3^h$ par jour pendant 5*j*, font 135 mètres,
et que 3 ouvriers travaillant $7^h$ par jour pendant 5*j*, font 315 mètres.

Pour en déduire combien

3 ouvriers travaillant $7^h$ par jour, mettront de jours à faire 126 mètres,

on observe que le nombre des ouvriers et des heures de travail étant le même, il suffit de résoudre cette question :

*Des ouvriers ont fait* $315^m$ *en* 5 *jours; combien faudra-t-il de jours à ces ouvriers pour faire* 126 *mètres?*

Le nombre de mètres cherché sera le 4e terme de la pro-

portion

$$315 : 125 :: 5 : x; \text{ d'où } x = 2.$$

Les 3 ouvriers travaillant $7\frac{1}{2}$ par jour, mettront donc 2$^j$ à faire les $126^m$.

5$^e$ Problème. *2 ouvriers ont fait* $8^m$ *d'un* 1$^{er}$ *ouvrage, combien* 5 *ouvriers feront-ils de mètres d'un* 2$^e$ *ouvrage? Les difficultés de ces ouvrages sont comme* 3 *est à* 4.

On cherche d'abord combien les 5 ouvriers feraient du 1$^{er}$ ouvrage, en posant la proportion

$$2 : 5 :: 8 : x; \text{ d'où } x = 20.$$

Les 5 ouvriers faisant $20^m$ du 1$^{er}$ ouvrage, il faut en déduire combien ces ouvriers feront du 2$^e$ ouvrage.

Les difficultés de ces ouvrages étant comme 3 est à 4, les nombres de mètres de ces ouvrages exécutés par les 5 ouvriers seront comme 4 est à 3 (n° 139); le nombre de mètres du 2$^e$ ouvrage fait par les 5 ouvriers, sera donc le 4$^e$ terme de la proportion

$$4 : 3 :: 20 : x; \text{ d'où } x = 15.$$

La méthode précédente est une *règle de trois composée directe et inverse*, parce qu'on parvient au résultat à l'aide de règles de trois directes et inverses.

## *Règles de Compagnie et de Société.*

141. 6$^e$ Problème. *Les mises de trois associés sont* $300^f$, $500^f$ *et* $700^f$; *le gain total est* $4500^f$. *Trouver le gain de chaque associé.*

La mise totale est de $1500^f$, et le gain total $4500^f$.

Or, *les gains doivent être proportionnels aux mises.*

Ces gains sont donc les quatrièmes termes des proportions

$$1500 : 4500 :: 300 : x,\ 1500 : 4500 :: 500 : x,\ 1500 : 4500 :: 700 : x$$

Divisant les deux termes du 1$^{er}$ rapport de chaque proportion par 1500, il vient

$$1 : 3 :: 300 : x,\ 1 : 3 :: 500 : x,\ 1 : 3 :: 700 : x.$$

Les quatrièmes termes 900, 1500, 2100 de ces proportions déterminent les gains demandés.

7e Problème. *Les mises de trois associés sont* 100f, 350f *et* 50f *la première mise est restée* 3 *mois dans la société, la seconde* 2 *mois et la troisième* 14 *mois; le gain total est* 4500f. *Quel est le gain relatif à chaque mise?*

Le gain de chaque associé dépend de sa mise et du temps qu'elle est restée dans la société. Si toutes les mises étaient restées le même temps, les gains seraient faciles à déterminer; il faut donc chercher quelles doivent être les mises pour que chacune d'elles restant le même temps dans la société, elles procurent les gains demandés.

Or, 100f placés pendant 3 mois, rapportent autant que 3 fois 100f ou 300f, en un mois; 250f placés pendant 2 mois, et 50f placés pendant 14 mois, rapportent autant que 2 fois 250f ou 500f, et 14 fois 50f ou 700f pendant un mois.

Les gains sont donc les mêmes que dans la question précédente.

8e Problème. *Partager* 78 *en trois parties proportionnelles aux nombres* 10, 15 *et* 14; c'est-à-dire en trois parties telles que la 1re soit à la 2e comme 10 est à 15, et que la 1re soit à la 3e comme 10 est à 14.

Si le nombre à partager était 10 + 15 + 14 ou 39, les parties seraient 10, 15 et 14; or le nombre à partager devenant un certain nombre de fois plus grand, les parties pour conserver les mêmes rapports doivent devenir le même nombre de fois plus grandes; les parties inconnues sont donc les quatrièmes termes des proportions

$$39 : 78 :: 10 : x, \quad 39 : 78 :: 15 : x, \quad 39 : 78 :: 14 : x.$$

Pour simplifier les calculs, on divise par 39 les deux termes du 1er rapport de chaque proportion, ce qui donne

$$1 : 2 :: 10 : x, \quad 1 : 2 :: 15 : x, \quad 1 : 2 :: 14 : x.$$

Les quatrièmes termes 20, 30, 28, de ces proportions sont les parties demandées.

9e PROBLÈME. *Partager* 78 *en trois parties telles que la* 1re *soit à la* 2e *comme* 2 *est à* 3, *et que la* 1re *soit à la* 3e *comme* 5 *est à* 7.

Pour ramener cette question à la précédente, on cherche quelles seraient les parties, si la 1re était l'unité; ce qui conduit à 2 : 3 :: 1 : 2e *partie*, 5 : 7 :: 1 : 3e *partie*.

Les quatrièmes termes de ces proportions étant $\frac{3}{2}$ et $\frac{7}{5}$, on voit que les parties demandées doivent être proportionnelles aux nombres 1, $\frac{3}{2}$, $\frac{7}{5}$. Multipliant ces nombres par $2 \times 5$, la question se réduit à partager 78 en trois parties proportionnelles aux nombres 10, 15 et 14. Les parties cherchées sont donc 20, 30, et 28.

## *Progressions arithmétiques.*

142. *La progression arithmétique ou par différence est formée d'une suite de termes croissans ou décroissans, tels que la différence entre deux termes consécutifs quelconques est constante;* cette différence est la *raison* de la progression.

Par exemple, les nombres 4, 7, 10, 13, 16, forment une progression arithmétique croissante dont la *raison* est 3, et que l'on écrit ainsi : ÷ 4 . 7 . 10 . 13 . 16; on l'énonce

*4 est à 7, comme 7 est à 10, comme 10 est à 13, comme 13 est à 16.*

Les mêmes nombres écrits dans un ordre inverse donnent la *progression arithmétique décroissante* ÷ 16 . 13 . 10 . 7 . 4

143. D'après la définition de la progression arithmétique croissante, le 2e terme est égal au 1er plus la raison, le 3e est égal au 2e plus la raison, c'est-à-dire au 1er terme augmenté de 2 fois la raison; et en général, *un terme d'un rang quelconque est égal au premier terme augmenté d'autant de fois la raison qu'il y a de termes avant lui.*

Quand la progression est décroissante, un terme d'un rang quelconque s'obtient en diminuant le 1er terme d'autant de fois la raison qu'il y a de termes avant lui.

144. PROBLÈME. *Insérer un certain nombre de moyens arithmé-*

*tiques entre deux nombres donnés*, c'est-à-dire placer entre deux nombres donnés un certain nombre de termes, de manière que l'ensemble de tous ces termes forme une progression arithmétique.

Pour trouver ces moyens arithmétiques, il suffit de déterminer la *raison* de la progression cherchée. Or, en considérant le plus petit des deux nombres donnés comme le 1^er^ terme de la progression, et en observant que le nombre total des termes doit être égal au nombre des moyens arithmétiques augmenté de 2, le dernier terme de la progression, c'est-à-dire le plus grand des deux nombres donnés, est égal au plus petit de ces deux nombres, plus la raison multipliée par le nombre des moyens qu'on veut insérer augmenté de 1 (n° 143). Le plus grand des deux nombres donnés diminué du plus petit, est donc égal au produit de la raison par le nombre des moyens proportionnels augmenté de 1.

Par conséquent : *Pour obtenir la raison de la progression demandée, il suffit de prendre la différence entre les deux nombres donnés, et de la diviser par le nombre des moyens arithmétiques augmenté de* 1.

Exemple. *Insérer* 6 *moyens arithmétiques entre* 2 *et* 23. On divise $23 - 2$ par $6 + 1$, c'est-à-dire 21 par 7, le quotient 3 exprime la raison de la progression, qui est

$$\div 2 . 5 . 8 . 11 . 14 . 17 . 20 . 23.$$

Les moyens arithmétiques demandés sont donc 5, 8, 11, 14, 17 et 20.

145. *Quand le nombre des moyens arithmétiques est une puissance de* 2 *diminuée de* 1, *on trouve directement ces moyens en prenant successivement une moyenne arithmétique entre deux nombres.*

Exemple. *Insérer entre* 0 *et* 1, *un nombre de moyens arithmétiques marqué par* $2^2 - 1$ *ou par* 3. On prend d'abord la moyenne arithmétique 0,5 entre 0 et 1 ; ce qui détermine la progression $\div 0 . 0,5 . 1.$

Insérant une moyenne arithmétique entre 0 et 0,5, et une

autre entre 0,5 et 1, on obtient la progression

$$\div 0 . 0{,}25 . 0{,}50 . 0{,}75 . 1.$$

146 Il résulte de la règle du n° 144, qu'*en insérant successivement un même nombre de moyens arithmétiques entre le 1^er^ et le 2^e^ terme d'une progression arithmétique, entre le 2^e^ terme et le 3^e^, etc., l'ensemble de tous ces termes forme une nouvelle progression arithmétique.*

EXEMPLE. Soit la progression $\div 2 . 14 . 26$.

Si l'on insère successivement trois moyens arithmétiques entre 2 et 14, et entre 14 et 26, on trouvera la nouvelle progression

$$\div 2 . 5 . 8 . 11 \quad 14 . 17 . 20 . 23 . 26.$$

## *Progressions géométriques.*

147. *La progression géométrique ou par quotient est formée d'une suite de termes tels qu'en divisant chaque terme par celui qui le précède, le quotient reste constant ;* ce quotient est la *raison* de la progression.

Par exemple, les nombres 1, 3, 9, 27, 81, forment une progression géométrique dont la *raison* est 3, et que l'on écrit ainsi :

$$\div\div 1 : 3 : 9 : 27 : 81 ;$$ on l'énonce

*1 est à 3, comme 3 est à 9, comme 9 est à 27, comme 27 est à 81.*

148. D'après la définition de la progression géométrique, le 2^e^ terme est égal au 1^er^ multiplié par la raison ; le 3^e^ est égal au 2^e^ multiplié par la raison, ce qui revient au produit du 1^er^ terme par la raison prise deux fois comme facteur, c'est-à-dire au produit du 1^er^ terme par la 2^e^ puissance de la raison ; et en général, *un terme d'un rang déterminé est égal au premier terme multiplié par la raison prise autant de fois comme facteur qu'il y a de termes avant lui.* De sorte qu'un terme quelconque s'obtient en multipliant le 1^er^ terme par la raison élevée à une puissance marquée par le nombre des termes qui le précèdent.

149. PROBLÈME. *Insérer un certain nombre de moyens géométriques entre deux nombres donnés.* Cela se réduit à déterminer la *raison* de la progression demandée. Pour y parvenir,

on observe que le nombre total des termes de la progression étant égal au nombre des moyens géométriques augmenté de 2, le plus grand des deux nombres donnés, qu'on prend pour dernier terme de la progression, est le produit du plus petit de ces nombres, par la raison élevée à une puissance marquée par le nombre des moyens géométriques augmenté de 1 (n° 148); divisant donc le plus grand des nombres donnés par le plus petit, le quotient sera égal à la raison élevée à une puissance marquée par le nombre des moyens géométriques augmenté de 1.

Par conséquent : *Pour obtenir la raison de la progression demandée, il suffit de calculer le quotient du plus grand des deux nombres donnés par le plus petit, et d'extraire de ce quotient la racine du degré marqué par le nombre des moyens géométriques augmenté de* 1.

Exemple. *Insérer deux moyens géométriques entre* 2 *et* 54. On divise 54 par 2; et l'on extrait la racine 3e du quotient 27; le résultat 3 exprimant la raison de la progression, cette progression est $\div\div$ 2 : 6 : 18 : 54.

150. *Quand le nombre des moyens géométriques est une puissance de* 2 *diminuée de* 1, *on trouve ces moyens en prenant successivement une moyenne géométrique entre deux nombres.*

Exemple. *Insérer entre* 1 *et* 10 *un nombre de moyens géométriques marqué par* $2^2 - 1$ *ou par* 3. On prend d'abord la moyenne géométrique $\sqrt{10}$ ou 3,162277660168379 3 etc., entre 2 et 10; ce qui détermine la progression

$$\div\div 1 : 3{,}162277660168379\,3 \text{ etc.} : 10.$$

Insérant successivement une moyenne géométrique entre le 1er terme et le 2e, et entre le 2e terme et le 3e, on obtient la progression

$$\div\div 1 : 1{,}77827 \text{ etc.} : 3{,}16227 \text{ etc.} : 5{,}62341 \text{ etc.} : 10.$$

151. Il résulte de la règle du n° 149 qu'*en insérant successivement un même nombre de moyens géométriques entre le* 1er *et le* 2e *terme d'une progression géométrique, entre le* 2e *et le* 3e *terme, etc., l'ensemble de tous ces termes forme une nouvelle progression géométrique.*

# CHAPITRE HUITIÈME.

## *Théorie des Logarithmes.*

152. Quand on compare deux progressions indéfinies, l'une géométrique commençant par l'unité, l'autre arithmétique commençant par zéro, chaque terme de la deuxième est ce qu'on appelle le *logarithme* du terme correspondant dans la première progression; l'ensemble des termes de ces progressions forme un *système de logarithmes.*

Le premier terme de la progression géométrique étant l'unité, il résulte du principe du n° 148, que *le produit de plusieurs termes de la progression géométrique est un des termes de cette progression;* car ce produit est une puissance de la raison, et toute puissance de la raison est un terme de la progression.

Le premier terme de la progression arithmétique étant zéro, il résulte du principe du n° 143, que *la somme de plusieurs termes de la progression arithmétique est un terme de cette progression;* car cette somme est un multiple de la raison, et tout multiple de la raison est un terme de la progression.

Lorsqu'on prend deux termes correspondans, celui de la progression géométrique est égal à la raison de cette progression prise un certain nombre de fois comme facteur, et celui de la progression arithmétique est égal à la raison de cette progression répétée le même nombre de fois. Cela résulte des principes des n°s 143 et 148.

Il s'ensuit que *si l'on multiplie l'un par l'autre deux termes de la progression géométrique, et si l'on ajoute des termes correspondans de la progression arithmétique,* le PRODUIT *et la* SOMME *seront deux termes qui se correspondront dans ces progressions;* car le *produit* renfermant tous les facteurs du multiplicande et du multiplicateur, sera égal à la raison prise autant de fois comme facteur qu'elle se trouve dans les deux termes

qu'on a multipliés, et la *somme* des termes correspondans de la progression arithmétique sera égale à la raison de cette progression prise autant de fois qu'elle se trouve dans les deux termes qu'on a ajoutés.

Par conséquent : *Pour trouver le produit de deux termes de la progression géométrique, il suffit d'ajouter les termes correspondans de la progression arithmétique ; la* SOMME *correspond au* PRODUIT *demandé.*

EXEMPLE. Soient les deux progressions indéfinies

$$\div\ 1 : 3 : 9 : 27 : 81 : 243 : 729 : \text{etc.}$$
$$\div\ 0 . 2 . 4 . 6 . 8 . 10 . 12 . \text{etc.}$$

On voit que *le logarithme* 12, *du produit* 729 *des nombres* 9 *et* 81, *est égal à la somme des logarithmes* 4, 8, *des facteurs* 9 *et* 81.

153. Pour étendre ces propriétés aux nombres qui ne font pas partie des deux progressions primitives, il suffit de concevoir, par la pensée, qu'on insère assez de moyens géométriques et arithmétiques entre les termes successifs de ces deux progressions, pour que tous les nombres soient les termes des nouvelles progressions qui en résultent.

Les termes de la nouvelle progression arithmétique étant les logarithmes des termes correspondans de la nouvelle progression géométrique, il s'ensuit que *tous les nombres ont des logarithmes*, et que réciproquement, *un nombre quelconque peut être considéré comme le logarithme d'une certaine quantité.*

Les propriétés du n° 152 convenant à tous les nombres, nous établirons ces principes généraux :

1°. *Le logarithme d'un produit est égal à la somme des logarithmes des facteurs de ce produit.*

La recherche des logarithmes des nombres entiers se réduit donc à calculer les logarithmes des facteurs premiers de ces nombres.

2°. *Le logarithme du quotient est égal au logarithme du dividende, moins le logarithme du diviseur ;* cela résulte de (1°.).

*Le logarithme d'une fraction est donc égal au logarithme du numérateur, moins le logarithme du dénominateur.*

Par conséquent, les logarithmes des nombres fractionnaires et décimaux ne dépendent que des logarithmes des nombres entiers.

3°. *Le logarithme du quatrième terme d'une proportion s'obtient en retranchant de la somme des logarithmes des moyens, le logarithme du premier terme.* Cela résulte du principe du n° 129, et des propriétés énoncées (1°.) et (2°.).

4°. *On trouve le logarithme d'une puissance d'une quantité, en multipliant le logarithme de cette quantité par le degré de la puissance* (1°.).

5°. *Le logarithme de la racine d'un certain degré d'un nombre, s'obtient en divisant le logarithme de ce nombre, par le degré de la racine qu'on veut extraire* (4°.).

154. Nous allons voir maintenant comment on peut *calculer, dans un système donné, les logarithmes de tous les nombres plus grands que l'unité.*

Ces logarithmes ne dépendant que de ceux des nombres premiers, il suffit d'indiquer comment on calcule ces derniers logarithmes.

Si l'on insérait assez de moyens géométriques et arithmétiques entre les termes des deux progressions primitives, pour que tous les nombres premiers fissent partie de la nouvelle progression géométrique, on connaîtrait les logarithmes de tous ces nombres. Mais, quoique cela ne soit pas possible dans la pratique, on conçoit néanmoins, que si le nombre des moyens proportionnels est très grand (*); comme on montera de chaque terme de la progression géométrique primitive au terme suivant, par des degrés très rapprochés, on trouvera parmi ces moyens géométriques des nombres qui différeront d'aussi peu qu'on voudra

(*) On prend une puissance de 2 diminuée de 1, pour le nombre des moyens proportionnels qu'on insère entre deux termes consécutifs quelconques, et l'on calcule ces moyens proportionnels par les méthodes des nos 145 et 150.

de chacun des nombres premiers dont on cherche les logarithmes; de sorte que les termes correspondans de la nouvelle progression arithmétique, seront des valeurs fort approchées des logarithmes de ces nombres premiers.

155. Nous ne considérerons désormais que le système particulier déterminé par les progressions indéfinies primitives

$$\div\div 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : 100000 : \text{etc.}$$
$$\div 0 . 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . \text{etc.}$$

Dans ce système :

1°. Les termes 0, 1, 2, 3, etc., de la progression arithmétique, sont les *logarithmes* des termes correspondans, 1, 10, 100, 1000, etc., de la progression géométrique; la *raison* 10 de la progression géométrique est la *base* du système de logarithmes, le logarithme de l'unité est zéro, et le logarithme de la *base* est égal à l'unité.

2°. Les logarithmes des nombres 1, 10, 100, etc., étant 0, 1, 2, etc., suivant qu'un nombre est compris entre 1 et 10, entre 10 et 100, etc., son logarithme tombe entre 0 et 1, entre 1 et 2, etc. Il s'ensuit que si l'on évalue les logarithmes en décimales, la *partie entière* du logarithme d'un nombre entier ou décimal plus grand que 1, contiendra autant d'unités moins une, qu'il y a de chiffres dans la partie entière du nombre dont on cherche le logarithme. Cette partie entière du logarithme s'appelle *caractéristique*.

3°. Lorsque le logarithme d'une quantité est connu, pour en déduire le logarithme du produit ou du quotient de cette quantité par l'unité suivie d'un certain nombre de zéro, il suffit d'augmenter ou de diminuer le logarithme donné, d'un nombre d'unités égal à ce nombre de zéro. Cela résulte de (2°.), et des principes du n° 153 (1°) et (2°.).

156. Nous avons vu (n° 254) comment on détermine les logarithmes des nombres entiers. Le calcul peut être simplifié, lorsqu'il s'agit de *trouver directement le logarithme d'un nombre donné*, car il suffit de chercher successivement la moyenne géométrique entre les deux termes de chaque nouvelle progres-

sion géométrique qui comprennent le nombre dont on cherche le logarithme, et la moyenne arithmétique entre les deux termes correspondans de chaque nouvelle progression arithmétique; chaque moyenne arithmétique est le logarithme de la moyenne géométrique correspondante.

EXEMPLE. *Déterminer le logarithme de* 3, *à moins d'un millième d'unité.*

On cherche d'abord la moyenne géométrique $\sqrt{10}$ ou 3,162 etc., entre les termes 1 et 10 de la progression géométrique qui comprennent le nombre 3; la moyenne arithmétique 0,50, entre les termes correspondans 0 et 1 de la progression arithmétique, est le logarithme de 3,162 etc. Le nombre 3 étant compris entre 1 et 3,162 etc., son logarithme tombe entre les logarithmes 0 et 0,50 des nombres 1 et 3,162 etc.; cherchant la moyenne géométrique 1,778 etc., entre 1 et 3,162 etc., la moyenne arithmétique correspondante 0,25 entre 0 et 0,50 est le logarithme de 1,778 etc. Si l'on continue ces calculs, on trouvera, en conservant trois décimales, que les moyennes géométriques sont

3,162, 1,778, 2,371, 2,738, 2,942, 3,050, 2,996, 3,023, 3,009, 3,002, 2,999,

et que les moyennes arithmétiques correspondantes sont

0,500, 0,250, 0,375, 0,437, 0,468, 0,484, 0,476, 0,480, 0,478, 0,477, 0,477.

Le nombre 3 étant compris entre les termes 3,002 et 2,999 de la progression géométrique, le logarithme de 3 tombe entre les termes correspondans 0,477 etc., 0,477 etc., de la progression arithmétique; et par conséquent, la valeur du logarithme de 3, à moins d'un millième d'unité, est 0,477.

157. La suite des nombres entiers étant indéfinie, et la plupart des logarithmes étant incommensurables, on n'a pu réunir dans une *Table* que les valeurs approchées des logarithmes des nombres entiers 1, 2, 3, etc., en s'arrêtant à une certaine *limite*.

Il existe différentes *Tables de logarithmes*, et comme chacune d'elles est précédée d'un *avertissement* relatif à sa disposition particulière, nous nous bornerons ici à faire connaître la *disposition et les usages de la table de logarithmes placée à*

*la fin de ce volume;* elle renferme tous les nombres entiers moindres que 10000, ils sont dans les colonnes intitulées N, et les cinq premières décimales des logarithmes de ces nombres sont à droite dans les colonnes intitulées Log. (*); on n'a pas mis les caractéristiques, car il est facile d'y suppléer (n° 155, 2°); la différence entre les logarithmes de deux nombres entiers consécutifs compris entre 1000 et 10000 se trouve à droite dans la colonne intitulée D, au milieu de l'espace qui sépare ces logarithmes; le 1^er^ chiffre à droite de cette *différence* exprime des cent-millièmes d'unité. Les différences correspondantes aux logarithmes des nombres entiers moindres que 1000 ne sont pas dans la table, parce qu'on n'en fait pas usage.

158. La recherche du logarithme d'une fraction moindre que l'unité conduisant à une *soustraction dans laquelle le nombre à soustraire est le plus grand* (n° 153, 2°), nous allons faire connaître la convention à l'aide de laquelle on peut obtenir le résultat, et le réduire à la forme la plus simple.

Pour fixer les idées, nous proposerons de *retrancher* 9 *de* 5; ce calcul revient à ôter de 5, les parties 5 et 4 du nombre 9; ce qui conduit à retrancher 5 de 5, et à soustraire ensuite 4 du reste zéro. Cette dernière soustraction ne pouvant s'effectuer, on l'indique en plaçant le *signe* — devant 4; de sorte que l'opération indiquée par $5-9$ se réduit à $-4$, et on dit que le *reste* est $-4$.

En général, *quand le nombre à soustraire est le plus grand, on retranche le plus petit nombre du plus grand, et on met le signe — devant le reste.*

159. Suivant qu'un nombre est précédé du signe + ou du signe — on dit que ce nombre est *positif* ou *négatif*. Les nombres qui ne sont précédés d'aucun signe sont censés affectés du signe +.

Il ne faudra jamais perdre de vue qu'*un nombre négatif indique une soustraction qui reste à effectuer.*

---

(*) Pour trouver ces valeurs approchées, on a calculé les logarithmes avec six décimales, et l'on a ensuite supprimé la dernière décimale d'après la règle du n° 63.

*Lorsqu'on multiplie un nombre négatif par un nombre positif, le produit est négatif.*

Par exemple, le nombre négatif — 3 indiquant une soustraction de 3 unités, la multiplication de — 3 par 2 revient à faire 2 fois cette soustraction ; ce qui se réduit à soustraire 2 fois 3, ou à soustraire 6; le résultat de l'opération doit donc indiquer une soustraction de 6 unités ; il est donc exprimé par — 6.

On en déduit que *le quotient d'un nombre négatif par un nombre positif est négatif.*

Ainsi, le quotient de — 6 par 2 est — 3.

160. Pour être en état d'*opérer avec une* TABLE *de logarithmes*, il suffit de savoir résoudre les deux problèmes suivans :

1^er^ PROBLÈME. *Trouver le logarithme d'un nombre donné.*

Les *logarithmes des nombres entiers moindres que* 10000 sont dans la *Table*.

1^er^ CAS. Lorsqu'on demande le *logarithme d'un nombre entier ou d'un nombre décimal plus grand que l'unité*, la caractéristique de ce logarithme est connue d'avance (n° 155, 2°); et comme la partie décimale du logarithme d'un nombre ne change pas lorsqu'on avance la virgule de plusieurs rangs vers la droite ou vers la gauche de ce nombre (n° 155, 3°), on peut toujours ramener la question à déterminer la partie décimale du logarithme d'un nombre compris entre 1000 et 10000, en transportant la virgule à la suite des quatre premiers chiffres à gauche du nombre dont on cherche le logarithme.

EXEMPLE. *Calculer le logarithme de* $215,98$.

La caractéristique de ce logarithme est 2, et sa partie décimale est la même que celle du logarithme de $2159,8$. Il suffit donc de chercher la partie décimale de ce dernier logarithme.

Le logarithme de 2159 étant 3,334425, nous allons déterminer ce qu'il faut ajouter à ce dernier logarithme pour obtenir celui de $2159,8$. Or, la différence entre $l2159$ et $l2160$ (*) est

(*) Pour indiquer le logarithme d'une quantité, on la fait précéder de la lettre initiale *l*.

$0,00020$; on peut donc dire

Si pour une unité ajoutée au nombre 2159, il faut ajouter $0,00020$ à son logarithme, combien pour $0,8$ ajoutés à ce nombre, doit-on ajouter à ce logarithme?

Désignant cette inconnue par $x$, on pose la proportion

$$1 : 0,00020 :: 0,8 : x \ (*); \quad \text{d'où} \quad x = 0,00016.$$

Ajoutant $0,00016$ à $3,33425$, la somme $3,33441$, est le logarithme de $2159,8$. Le logarithme de $215,98$ est donc $2,33441$.

On en déduit que les logarithmes des nombres

$$21,598, \quad 2,1598, \quad 21598 \quad \text{et} \quad 21598000, \quad \text{sont}$$
$$1,33441, \quad 0,33441, \quad 4,33441 \quad \text{et} \quad 7,33441.$$

2° Cas. *Le logarithme d'une fraction s'obtient en retranchant le logarithme du dénominateur du logarithme du numérateur* (n° 153, 2°).

Par conséquent, selon qu'une fraction est plus grande ou plus petite que l'unité, son logarithme est positif ou négatif.

On trouve de cette manière que les logarithmes des fractions

$$\frac{3478}{9}, \quad \frac{9}{3478}, \quad \frac{21598}{100} \quad \text{et} \quad \frac{21598}{100000000}, \quad \text{sont}$$

$2,58709$, $-2,58709$, $2,33441$ et $-3,66559$.

3e Cas. *Le logarithme d'un nombre décimal moindre que l'unité s'obtient en prenant le logarithme de ce nombre, abstraction faite de la virgule, et en retranchant de ce dernier logarithme autant d'unités qu'il y a de chiffres à droite de la virgule dans le nombre décimal proposé.* Cela résulte des principes des nos 55 et 155 (2°).

Exemple. Calculer le logarithme de $0,0021598$.

On cherche le logarithme $4,33441$ de $21598$, et l'on en ôte 7 unités. Suivant qu'on effectue cette soustraction, sur le logarithme $4,33441$ ou sur la caractéristique $4$, le résultat est

(*) Dans le calcul du 4e terme de cette proportion, on doit négliger les unités inférieures aux cent-millièmes.

$-2{,}66559$ ou $\bar{3}{,}33441$, car d'après le principe du n° 158,

$$4{,}33431 - 7 = -(7 - 4{,}33441) = -2{,}66559, \quad \text{et}$$

$$4{,}33441 - 7 = 4 - 7 + 0{,}33441 = -3 + 0{,}33441 = \bar{3}{,}33441.$$

Le signe — placé au-dessus de la caractéristique 3 indique qu'elle est seule négative.

On voit que *le logarithme d'un nombre décimal moindre que l'unité est susceptible de deux formes différentes.*

1°. *Quand on demande que le logarithme soit entièrement négatif,* le calcul se réduit à chercher la partie décimale du logarithme du nombre entier qui résulte de la suppression de la virgule dans le nombre proposé, à soustraire cette partie décimale de 100000 (ce qui revient à ôter de 10 le 1^er^ chiffre à droite de cette partie décimale, et à retrancher de 9 tous les autres chiffres décimaux); le reste est la partie décimale du logarithme cherché; la caractéristique de ce logarithme contient autant d'unités qu'il y a de zéro entre la virgule et le premier chiffre décimal significatif du nombre donné.

Exemple. *Déterminer les logarithmes des nombres*

$$0{,}21598, \quad 0{,}021598 \quad \text{et} \quad 0{,}00021598.$$

On cherche la partie décimale 33441 de $l\,21598$; on ôte 33441 de 100000; le reste 66559 est la partie décimale des logarithmes demandés, et leurs caractéristiques étant 0, 1, 3, ces logarithmes sont

$$-0{,}66559, \quad -1{,}66559 \quad \text{et} \quad -3{,}66559.$$

2°. *Quand on veut que la caractéristique soit seule négative,* il suffit de chercher la partie décimale du logarithme du nombre entier résultant de la suppression de la virgule dans le nombre décimal proposé, et d'affecter cette partie décimale d'une caractéristique négative qui contienne autant d'unités plus une qu'il y a de zéro entre la virgule et le premier chiffre décimal significatif du nombre donné.

Exemple. *Calculer les logarithmes des nombres*

$$0{,}21598, \quad 0{,}021598, \quad 0{,}0021598.$$

On cherche la partie décimale 33441 du logarithme de 21598, et l'on trouve que les logarithmes demandés sont

$$\bar{1}{,}33441, \quad \bar{2}{,}33441, \quad \bar{4}{,}33441.$$

161. L'emploi des logarithmes dont la caractéristique seule est négative offre cet avantage, que quelles que soient les puissances de 10 par lesquelles on multiplie ou on divise un nombre, les nombres plus grands ou plus petits que l'unité qui en résultent, ont des logarithmes dont la partie décimale reste constamment la même; ce qui n'aurait pas lieu, si l'on faisait usage des logarithmes entièrement négatifs.

D'après cette observation, *lorsque des nombres entiers ne diffèrent que par des zéro placés à la droite, et quand des nombres décimaux ne diffèrent que par la position de la virgule, les logarithmes de ces nombres ont la même partie décimale.*

Ainsi, le logarithme de 2159 étant 3,33425, les logarithmes des nombres

$$21590000, \quad 21{,}59, \quad 0{,}02159 \text{ et } 0{,}000002159,$$

sont $7{,}33425$, $1{,}33425$, $\bar{2}{,}33425$ et $\bar{6}{,}33425$.

162. 2^e^ Problème. *Trouver à quel nombre appartient un logarithme donné.*

La caractéristique du logarithme donné fait connaître l'ordre des plus hautes unités du nombre auquel appartient ce logarithme (n^os^ 155 et 160).

1^er^ Cas. Quand *le logarithme donné est positif,* on suppose que la caractéristique est 3, afin de trouver au moyen de la *Table* le plus de chiffres possible du nombre demandé; on cherche le nombre auquel appartient ce nouveau logarithme; ce nombre ne différant de celui qu'on demande que par la position de la *virgule*, et la caractéristique du logarithme donné indiquant l'ordre des unités du premier chiffre à gauche du nombre cher-

ché (n° 155, 2°), on place la virgule de manière que ce chiffre occupe le rang qui lui convient.

1er Exemple. *Déterminer à quels nombres appartiennent les logarithmes*

$0{,}33425$, $1{,}33425$, $2{,}33425$, $4{,}33425$ et $5{,}33425$.

On cherche le nombre 2159 auquel correspond le logarithme 3,33425. On en déduit que les nombres demandés sont

$2{,}159$, $21{,}59$, $215{,}9$, $2159$ et $21590$.

Remarque. La partie décimale 33425 de chacun des logarithmes proposés, se trouve parmi les parties décimales des logarithmes des nombres entiers de quatre chiffres; mais elle ne se trouverait pas parmi les parties décimales des logarithmes des nombres entiers moindres que 1000.

2e Exemple. *Déterminer à quel nombre appartient le logarithme* 3,33441.

On cherche les deux logarithmes *tabulaires* qui comprennent ce logarithme; on voit qu'il tombe entre $l2159$ et $l2160$; le logarithme 3,33441 appartient donc au nombre 2159 augmenté d'une quantité inconnue $x$ moindre que l'unité.

Pour calculer $x$, on prend la différence $0{,}00020$ entre $l2159$ et $l2160$; on cherche la différence $0{,}00016$, entre le logarithme donné et le logarithme tabulaire immédiatement plus petit; et l'on dit:

Si pour $0{,}00020$ de plus au logarithme de 2159, il faut ajouter 1 à 2159; combien pour $0{,}00016$ de plus au logarithme de 2159, doit-on ajouter à 2159?

La proportion $0{,}00020 : 1 :: 0{,}00016 : x$,

se réduit à $20 : 1 :: 16 : x$; cette dernière donne $x = 0{,}8$ (*).

Le logarithme 3,33441 appartient donc au nombre $2159{,}8$.

(*) Dans le calcul du 4e terme de cette proportion, on doit s'arrêter au chiffre des dixièmes, et il arrive même quelquefois que ce chiffre n'est pas exact.

3e Exemple. *Trouver à quels nombres appartiennent les logarithmes*

0,33441, 1,33441, 2,33441, 4,33441 et 7,33441.

On cherche le nombre 2159,8 auquel correspond le logarithme 3,33441, et l'on voit que les nombres demandés sont

2,1598, 21,598, 215,98, 2159,8 et 21598000.

Remarque. Ces calculs se réduisent à supposer que la caractéristique du logarithme proposé est 3, à chercher le nombre auquel appartient ce nouveau logarithme, et à séparer ensuite par la virgule autant de chiffres plus un, à partir de la gauche de ce nombre, qu'il y a d'unités dans la caractéristique du logarithme proposé.

2e Cas. Lorsque *le logarithme donné est entièrement négatif*, on lui ajoute assez d'unités pour que le résultat soit entièrement positif et affecté de la caractéristique 3 (cela revient à ajouter quatre unités de plus qu'il n'y en a dans la caractéristique); on cherche le nombre auquel appartient ce nouveau logarithme, et l'on avance ensuite la virgule d'autant de rangs vers la gauche de ce nombre décimal, qu'on a ajouté d'unités au logarithme proposé.

Exemple. *Déterminer à quel nombre appartient le logarithme négatif* — 2,66559.

On ajoute 2 + 4 ou 6 unités à — 2,66559; le logarithme 3,33441 qui en résulte, correspondant au nombre 2159,8, on obtiendra le nombre auquel appartient le logarithme donné, en avançant la virgule de six rangs vers la gauche de 2159,8; ce qui donne 0,0021598.

Remarque. Le mécanisme du calcul précédent consiste à retrancher de 100000, la partie décimale du logarithme proposé (ce qui s'exécute en retranchant de 10 le premier chiffre à droite de cette partie décimale, et en ôtant de 9 tous les autres chiffres décimaux); on considère le reste comme la partie décimale d'un logarithme dont la caractéristique est 3; on cherche le nombre décimal auquel appartient ce nouveau logarithme, et

on avance la virgule d'assez de rangs vers la gauche de ce nombre décimal, pour que le résultat contienne autant de zéro entre la virgule et le premier chiffre décimal significatif, qu'il y a d'unités dans la caractéristique du logarithme donné.

Ainsi, pour trouver à quels nombres appartiennent les logarithmes $-0,66559$, $-1,66559$, et $-3,66559$,

on retranche 66559 de 100000, le reste est 33441; et $3,33441$ étant le logarithme de $2159,8$, les nombres demandés sont

$$0,21598, \quad 0,021598, \text{ et } 0,0021598.$$

3e Cas. Enfin, quand *la caractéristique seule est négative*, on conçoit que le logarithme est affecté de la caractéristique 3, on cherche à quel nombre appartient ce nouveau logarithme, et on avance la virgule vers la gauche de ce nombre, de manière que le résultat renferme autant de zéro moins un, entre la virgule et le premier chiffre décimal significatif, qu'il y a d'unités dans la caractéristique négative.

Ainsi, pour trouver à quels nombres appartiennent les logarithmes $\bar{1},33441$, $\bar{2},33441$, $\bar{3},33441$, et $\bar{4},33441$,

on cherche le nombre $2159,8$ auquel correspond le logarithme $3,33441$, et les nombres demandés sont

$$0,21598, \quad 0,021598, \quad 0,0021598, \text{ et } 0,00021598.$$

163. Les exemples précédens suffisent pour mettre en état de calculer le logarithme d'un nombre donné, et de trouver à quel nombre appartient un logarithme proposé. Nous avons toujours ramené la question à opérer sur les logarithmes des nombres compris entre 1000 et 10000, parce que cette méthode a l'avantage de fournir le plus grand degré d'exactitude dont notre *Table* de logarithmes est susceptible. En opérant de cette manière:

1°. *Quand on veut trouver le logarithme d'un nombre, la proportion indiquée* (n° 160), *ne fournit que les cent-millièmes d'unité du logarithme demandé.*

2°. Nos logarithmes *tabulaires* n'ayant que cinq décimales,

l'erreur qui en résulte est telle que, *si l'on veut trouver le nombre auquel appartient un logarithme donné dont la caractéristique est* 3, *on ne devra généralement compter que sur l'exactitude des quatre premiers chiffres à gauche du nombre demandé*, c'est-à-dire sur les quatre chiffres qui sont dans la *table*; de sorte que *dans certains cas, la proportion indiquée* (n° 162) *ne fournit aucun des chiffres décimaux du nombre auquel appartient le logarithme donné.*

En effet, la plus petite différence entre deux logarithmes tabulaires consécutifs étant 0,00004, on voit que 0,00004 d'erreur sur un logarithme, suffisent pour produire environ une unité d'erreur sur le nombre correspondant à ce logarithme; 0,00001 d'erreur sur le logarithme peut donc introduire environ $\frac{1}{4}$ ou 0,25 d'erreur sur le nombre correspondant. Or, les cinq premières décimales du logarithme étant données, on ne connaît ce logarithme qu'à moins de 0,00001 d'unité; l'erreur qui existe dans le nombre auquel appartient cette valeur approchée du logarithme, peut donc être de près de 0,25; elle influe donc quelquefois sur les dixièmes d'unité du nombre cherché.

## *Des complémens arithmétiques.*

164. *Le* COMPLÉMENT ARITHMÉTIQUE *d'un logarithme s'obtient en retranchant ce logarithme de* 10; ce qui revient à ôter d'abord de 10 le premier chiffre significatif à droite du logarithme, et à retrancher de 9 tous les autres chiffres.

Ainsi, les logarithmes des nombres 2, 602, 1256, étant

$$0,30103, \quad 2,77960 \quad \text{et} \quad 3,09899,$$

les *complémens* de ces logarithmes sont

$$9,69897, \quad 7,22040 \quad \text{et} \quad 6,90101.$$

165. *Lorsqu'au lieu de soustraire un logarithme, on ajoute son complément, le résultat est trop grand de* 10 *unités*, car ce résultat est trop fort du logarithme qu'on devait soustraire,

plus du complément qu'on a ajouté, et d'après la définition, la somme de ces deux nombres est 10. Ce principe conduit aux deux propriétés suivantes :

1°. *En ajoutant au logarithme du numérateur d'une fraction, le complément du logarithme du dénominateur, la somme exprime le logarithme de cette fraction augmenté de* 10.

Exemple. *Soit la fraction* $\frac{3478}{9}$.

Si l'on ajoute à $l3478$ le complément de $l9$, la somme 12,58709 sera le logarithme de cette fraction augmenté de 10.

2°. *Le logarithme du quatrième terme d'une proportion peut s'obtenir en ajoutant à la somme des logarithmes des moyens le complément du logarithme du premier terme, et en diminuant le résultat de dix unités.*

Exemple. *Trouver le quatrième terme de la proportion*

$$9500000 : 323 :: 304 : x.$$

On ajoute à la somme 4,99207 des logarithmes des moyens, le complément 3,02228 de $l9500000$, le résultat 8,01435 exprime $lx$ augmenté de 10; divisant donc par $10^{10}$ le nombre auquel appartient le logarithme 8,01435, le quotient 0,010335 etc. est une valeur approchée de $x$.

Remarque. On peut abréger ce calcul; car 8,01435 étant égal à $lx$ augmenté de 10, si l'on diminue la caractéristique de 5, le résultat 3,01435 sera le logarithme de $x$, augmenté de 5; le logarithme 3,01435 appartenant à 1033,5 etc., on obtiendra la valeur approchée 0,010335 etc. de $x$, en avançant la virgule de cinq rangs vers la gauche de 1033,5, etc.

## *Usage des logarithmes pour abréger les calculs numériques.*

166. D'après les propriétés du n° 163, *lorsqu'on fera usage des logarithmes, on ne devra généralement compter que sur l'exactitude des quatre premiers chiffres à partir du premier chiffre significatif à gauche du résultat.* Quand ce degré d'ap-

proximation ne sera pas suffisant, il faudra renoncer à l'emploi des logarithmes.

Nous allons donner plusieurs exemples, en ayant soin de calculer le cinquième chiffre significatif du nombre demandé, par la proportion indiquée (n° 162), afin de faire voir qu'il est souvent inexact. Pour abréger nous désignerons toujours par $x$ le nombre dont il s'agit de trouver la valeur approchée.

1^er^ EXEMPLE. *Calculer le produit de* $3,4567892$ *par* $1,2345678 9$.

Les logarithmes des deux facteurs sont $0,53867$ et $0,09152$; leur somme est $0,63019$. Le nombre $4,2677$ auquel appartient le logarithme $0,63019$ est une valeur approchée de $x$.

La valeur exacte de $x$ est $4,2676409488 18788$.

On voit que l'emploi des logarithmes ne fournit que les quatre premiers chiffres à gauche du produit demandé.

On dispose ordinairement le calcul de la manière suivante,

$$\begin{aligned} l\,3,4567892 &= 0,53867 \\ l\,1,2345678 9 &= 0,09152 \\ \text{Somme} \quad & \overline{0,63019} = l\,4,2677 \text{ etc.} \end{aligned}$$

2^e^ EXEMPLE. *Déterminer le quotient de* $4,2676409488 18788$ *par* $3,4567892$.

Le logarithme du dividende est $0,63018$, et celui du diviseur est $0,53867$. Retranchant le second logarithme du premier, le reste $0,09151$ exprime le logarithme de $x$. Le nombre $1,2345$ auquel appartient le logarithme $0,09151$, fournit une valeur approchée de $x$. Le quotient exact est $1,2345678 9$.

3^e^ EXEMPLE. *Trouver le quotient de* $0,132798$ *par* $0,00567$.

Le logarithme du diviseur étant négatif, on est conduit à retrancher un nombre négatif (*). Pour éviter cette difficulté, on observe que le quotient cherché est le même que celui de $132678$ par $5670$; il suffit donc de retrancher le logarithme de $5670$, du logarithme de $132678$, le reste, $1,36922$ étant le logarithme du quotient demandé, on trouve que ce quotient est $23,40$.

(*) On verra en *Algèbre* comment on effectue cette soustraction.

4e Exemple. *Calculer le quotient de* $\frac{9724}{5676}$ *par* $\frac{998}{3849}$.

Ce quotient est égal à $\frac{9724 \times 3849}{5676 \times 998}$ ; il suffit donc de déterminer le quotient de $9724 \times 3849$ par $5676 \times 998$.

1re Méthode. On prend les logarithmes des nombres 9724, 3849, 5676, 998; de la somme des deux premiers logarithmes, on retranche la somme des deux autres logarithmes, le reste 0,82002 exprime $lx$. Le nombre 6,6072 etc., auquel appartient le logarithme 0,82002 est une valeur approchée de $x$.

La division de $9724 \times 3849$ par $5676 \times 998$, ou de 37427676 par 5664648, conduit à $x = 6,60723$ etc.

2e Méthode. Aux logarithmes des nombres 9724, 3849, on ajoute les complémens des logarithmes des nombres 5676, 998; la somme 20,82002 est trop forte de 20 unités, car on a ajouté deux complémens. Le nombre 6,6072 etc., auquel appartient le logarithme 0,82002, est une valeur approchée de $x$.

5e Exemple. *Calculer la* 14e *puissance de* $\frac{21}{20}$.

On retranche le logarithme de 20 de celui de 21, le reste 0,02119 est le logarithme de $\frac{21}{20}$; on multiplie 0,02119 par 14; le produit 0,29666 exprime $lx$. Le nombre 1,980 auquel appartient le logarithme 0,29666 est une valeur approchée de $x$. La valeur exacte de $x$ est 1,9799 etc.

6e Exemple. *Déterminer la quatrième puissance de* $\frac{2}{25}$.

1re Méthode. On prend le logarithme — 1,09691 de $\frac{2}{25}$; son quadruple — 4,38764 exprime $lx$; le nombre 0,00004096, auquel appartient le logarithme — 4,38764, détermine $x$.

2e Méthode. On ajoute à $l2$, le complément de $l25$, la somme 8,90309 est le logarithme de $\frac{2}{25}$ augmenté de 10; le quadruple 35,61236 de 8,90309 est donc le logarithme de $x$, augmenté de 40; divisant par $10^{40}$ le nombre qui correspond

au logarithme 35,61236, le quotient exprimerait $x$; mais il est plus simple de diminuer d'abord la caractéristique 35 de 32 unités, afin de la réduire à 3; le reste 3,61236 exprime $lx$ augmenté de 8, c'est-à-dire le logarithme de $x \times 10^8$; et comme le logarithme 3,61236 correspond au nombre 4096, on divise 4096 par $10^8$; le quotient 0,00004096 est la valeur de $x$.

7e Exemple. *Déterminer le cube de* 0,649.

Le logarithme de 0,649 étant — 0,18776, le triple — 0,56328 de — 0,18776 exprime $lx$. On en déduit que $x = 0,27335$. La valeur exacte de $x$ est 0,273359449.

8e Exemple. *Calculer la racine cubique de* $\frac{2}{7899}$.

1re Méthode. On retranche $l7899$ de $l2$, le reste 3,59654 affecté du signe — est le logarithme de $\frac{2}{7899}$. On divise — 3,59654 par 3, le quotient — 1,19884 exprime le logarithme de $x$. Le nombre 0,06326 etc. auquel appartient le logarithme — 1,19884 est une valeur approchée de $x$.

2e Méthode. Pour éviter les logarithmes négatifs, on ajoute à $l2$, le complément de $l7899$, la somme 6,40346 est le logarithme de $\frac{2}{7899}$ augmenté de 10.

Si l'on divisait 6,40346 par 3, le quotient 2,13448 serait égal à $lx$ augmenté de $\frac{10}{3}$; c'est-à-dire au logarithme de $x \times \sqrt[3]{10^{10}}$, car d'après les propriétés des nos 153 et 155,

$$l(x \times \sqrt[3]{10^{10}}) = lx + l\sqrt[3]{10^{10}} = lx + \frac{1}{3} l10^{10} = lx + \frac{10}{3} l10 = lx + \frac{10}{3}.$$

On obtiendrait donc $x$, en divisant par $\sqrt[3]{10^{10}}$ le nombre auquel appartient le logarithme 2,13448.

Mais ce calcul étant très compliqué, on observe que si le logarithme dont il faut prendre le tiers, au lieu d'être trop fort de 10, était trop grand d'un multiple de *l'indice* 3 de la racine

à extraire, de 6 par exemple, le tiers de ce logarithme, qui serait trop grand de 2, appartiendrait à $x \times 100$; de sorte qu'en divisant par 100 le nombre correspondant à ce nouveau logarithme, le quotient exprimerait $x$. Opérant de cette manière on diminue le logarithme 6,40346 de 4 unités, le reste 2,40346 est égal à $l\frac{2}{7899}$ augmenté de 6; le tiers 0,801115 de 2,40346 est égal à $lx$ augmenté de 2; et comme le logarithme 0,801115 appartient au nombre 6,3262 etc., on obtient la valeur approchée 0,063262 etc. de $x$, en divisant 6,3262 etc. par 100.

9e Exemple. *Calculer la racine quarrée du cube de* 12.

On multiplie par 3 le logarithme de 12; le résultat 3,23754 est le logarithme de $12^3$; la moitié 1,61877 de 3,23754 exprime le logarithme de la racine quarrée de $12^3$; le nombre 41,569 auquel appartient ce dernier logarithme, est une valeur approchée de la racine cherchée.

10e Exemple. *Calculer la racine cubique de la quatrième puissance de* $\frac{2}{25}$.

Le logarithme de $\left(\frac{2}{25}\right)^4$ étant — 4,38764 (6e *exemple*), le tiers — 1,46254 de ce logarithme exprime $lx$; le nombre 0,03447, auquel appartient le logarithme — 1,46254, est une valeur approchée de $x$.

# CHAPITRE NEUVIÈME.

## *Théorie arithmétique des différens systèmes de numération.*

167. Nous avons vu (n° 2) que pour représenter tous les nombres entiers avec *dix* chiffres, il suffit de convenir qu'en avançant successivement d'un rang vers la gauche d'un nombre, ses chiffres expriment des unités de *dix* en *dix* fois plus grandes.

On peut établir d'autres systèmes de numération, c'est-à-dire écrire tous les nombres avec plus ou moins de *caractères*, en convenant par *analogie*, qu'*en avançant successivement d'un rang vers la gauche d'un nombre, ses chiffres expriment des unités autant de fois plus grandes qu'il y a de chiffres dans le système.* La *base* du système est le nombre des chiffres dont il se compose.

Ainsi, quelle que soit la *base*, le 1^er^ chiffre d'un nombre, à partir de la droite, exprime des unités simples ou du 1^er^ ordre, le 2^e^ chiffre exprime des unités du 2^e^ ordre, le 3^e^ des unités du 3^e^ ordre; etc. Chaque unité du 1^er^ ordre vaut 1, chaque unité du 2^e^ ordre est égale à la base, chaque unité du 3^e^ ordre est égale à la 2^e^ puissance de la base; et ainsi de suite.

## *Du Système duodécimal.*

168. Pour fixer les idées, nous considérerons le système composé de *douze* chiffres, et qu'on nomme, par cette raison, *système duodécimal*. Nous désignerons dix et onze par $\delta$ et $\omega$; de sorte que les onze premiers nombres,

*un, deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit, neuf, dix, onze,*

seront représentés par les chiffres

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, $\delta$, $\omega$.

Pour écrire tous les autres nombres entiers, il suffit de convenir qu'*en avançant successivement d'un rang vers la gauche, les chiffres expriment des unités de douze en douze fois plus grandes ;* de sorte qu'en partant de la droite d'un nombre, chaque unité du 1^er^ ordre vaut 1, chaque unité du 2^e^ ordre vaut 12 (*), chaque unité du 3^e^ ordre vaut $12^2$ ou 144, chaque unité du 4^e^ ordre vaut $12^3$ ou 1728; etc.

Ainsi, les nombres (10), (100), (1000), etc., ont pour valeurs 12, 144, 1728, etc.

Cela posé : si l'on ajoute une unité à onze, on obtiendra le nombre (10). Pour écrire les nombres, treize, quatorze, ...., vingt-trois, on remplace successivement le zéro du nombre (10), par chacun des onze chiffres significatifs, 1, 2, 3, ..., ↊, ↋. Le nombre vingt-trois étant composé d'une douzaine et de onze unités, en lui ajoutant 1, on obtient le nombre vingt-quatre, formé de 2 douzaines, et qui s'écrit (20); remplaçant le zéro par chacun des onze chiffres significatifs, on trouve les onze nombres entiers compris entre 2 douzaines ou vingt-quatre, et 3 douzaines ou trente-six; et en continuant ainsi, on arrive au nombre (↋↋) composé de onze douzaines plus onze unités; ce nombre est égal à $11 \times 12 + 11$ ou à 143. De cette manière, on écrit avec deux chiffres tous les nombres compris entre onze et cent quarante-quatre. Ajoutant l'unité à (↋↋), on obtient le nombre cent quarante-quatre, qui vaut douze douzaines, et que l'on écrit (100). Remplaçant successivement les chiffres de ce dernier nombre par chacun des onze chiffres significatifs, on parvient à écrire tous les nombres compris entre 144 et 1728. Et ainsi de suite.

169. *Quand un nombre entier est écrit dans le système duodécimal, pour l'écrire dans le système décimal, on multiplie le 1^er^ chiffre à droite par 1, le 2^e^ par la base 12, le 3^e^ par $12^2$ ou 144, le 4^e^ par $12^3$ ou 1728; et ainsi de suite, jusqu'au*

(*) Les nombres que nous ne placerons pas entre parenthèses seront écrits dans le système *décimal*, et pour indiquer qu'un nombre est écrit dans le système *duodécimal*, nous le mettrons entre *parenthèses*.

*chiffre des plus hautes unités ; la somme de ces produits est le nombre demandé.*

EXEMPLE. $(\delta 35) = 5 + 3 \times 12 + 10 \times 144 = 1481$.

*Lorsqu'un nombre est écrit dans le système décimal, pour l'écrire dans le système duodécimal, on le divise par 12 ; le reste est le 1^er^ chiffre à droite du nombre demandé, et le quotient exprime des douzaines, c'est-à-dire des unités du 2^e^ ordre ; divisant ce quotient par 12, le reste est le 2^e^ chiffre du nombre cherché, et le quotient représente des unités du 3^e^ ordre ; continuant ce calcul, on parvient à un quotient moindre que 12, qui est le dernier chiffre du nombre demandé.* Cela résulte de ce que, dans le système duodécimal, 12 unités d'un ordre quelconque valent une unité de l'ordre immédiatement supérieur.

EXEMPLE. Soit proposé d'*écrire* 1481 *dans le système duodécimal.*

On divise ce nombre par 12 ; ce qui donne le reste 5 et le quotient 123 ; la division de 123 par 12 fournit le reste 3 et le quotient $\delta$ ; de sorte que le nombre demandé est $(\delta 35)$.

Pour *énoncer un nombre écrit dans le système duodécimal,* on l'écrit dans le système décimal, et on énonce ensuite ce dernier nombre d'après la règle qui a été donnée (n° 2).

170. *Les méthodes exposées pour opérer sur les nombres écrits dans le système décimal s'appliquent au système duodécimal, avec cette seule différence que la base étant douze, il faut douze unités d'un ordre pour former une unité de l'ordre immédiatement supérieur.*

On trouve ainsi, que la *somme* des nombres $(70\delta)$, $(3\omega)$, est $(749)$, que leur *différence* est $(68\omega)$, et que leur *produit* est $(23832)$.

Pour *diviser* $(23832)$ par $(3\omega)$, on effectue le calcul de la manière suivante :

| $(23832)$ | $(3\omega)$ |
|---|---|
| $(235)$ | $(70\delta)$ |
| $(33)$ | |
| $(332)$ | |
| $(332)$ | |
| 0 | |

*Multiples du diviseur.*

| | |
|---|---|
| $(3\omega \times 2) = (7\delta)$ | $(3\omega \times 7) = (235)$ |
| $(3\omega \times 3) = (\omega 9)$ | $(3\omega \times 8) = (274)$ |
| $(3\omega \times 4) = (138)$ | $(3\omega \times 9) = (2\omega 3)$ |
| $(3\omega \times 5) = (177)$ | $(3\omega \times \delta) = (332)$ |
| $(3\omega \times 6) = (1\omega 6)$ | $(3\omega \times \omega) = (371)$. |

On forme d'abord les produits du diviseur ($3\omega$) par chacun des nombres d'un seul chiffre. On voit alors que le 1^er^ dividende partiel (238), tombe entre (235) et (274), c'est-à-dire entre ($3\omega \times 7$) et ($3\omega \times 8$); le 1^er^ chiffre à gauche du quotient est donc 7; on retranche (235) de (238), et à la droite du reste 3, on abaisse 3 qui est le chiffre suivant du dividende; le 2^e^ dividende partiel (33) qui en résulte, étant moindre que le diviseur, le chiffre correspondant du quotient est 0; on abaisse à la droite de (33) le dernier chiffre 2 du dividende; le 3^e^ dividende partiel (332) étant le produit de ($3\omega$) par $\delta$, le chiffre correspondant du quotient est $\delta$; on ôte (332) de (332), le reste zéro indique que le quotient ($70\delta$) est exact.

Les *preuves des quatre règles* s'exécutent comme dans le n° 11.

171. *Les théories exposées dans les deux premiers chapitres s'appliquent au système duodécimal, en substituant la base douze à la base dix.* Ainsi:

1°. Comme en avançant successivement d'un rang vers la droite d'un *nombre duodécimal,* les chiffres expriment des unités de douze en douze fois plus petites, le 1^er^ chiffre à droite de la *virgule* exprime des douzièmes; le 2^e^ exprime des cent-quarante-quatrièmes; etc. Par exemple,

$$(623{,}45\delta) = 6 \times 144 + 2 \times 12 + 3 + \frac{4}{12} + \frac{5}{144} + \frac{\delta}{1728}.$$

2°. Un nombre duodécimal est multiplié ou est divisé autant de fois par le facteur (10) que la virgule a été avancée de rangs vers la droite ou vers la gauche de ce nombre (n° 54).

3°. Tout nombre duodécimal équivaut à une fraction dont le numérateur est le nombre duodécimal abstraction faite de la virgule, et dont le dénominateur est l'unité suivie d'autant de zéro qu'il y a de chiffres à droite de la virgule (n° 55). Ainsi,

$$(623{,}45\delta 7) = \frac{(62345\delta 7)}{(10000)} \text{ et } (0{,}0031) = \frac{(31)}{(10000)}.$$

4°. Pour convertir en nombre duodécimal, une fraction dont le dénominateur est l'unité suivie de plusieurs zéro, on écrit

le numérateur, et on sépare au moyen de la virgule autant de chiffres à la droite de ce numérateur qu'il y a de zéro dans le dénominateur ( n° 55 ). Ainsi,

$$\frac{(62345\delta 7)}{(10000)} = (62_{,}345\delta 7) \text{ et } \frac{(31)}{(10000)} = (0_{,}0031).$$

172. *Les règles des n*$^{os}$ 57, . . . , 64, *s'appliquent aux nombres duodécimaux,* avec cette seule différence que la base dix et ses facteurs premiers, 2, 5, doivent être remplacés par la base douze et ses facteurs premiers 2, 3; *les fractions décimales périodiques* deviennent des *fractions duodécimales périodiques,* et dans les dénominateurs des fractions ordinaires équivalentes, chaque 9 est remplacé par $\omega$.

On trouve de cette manière, que la *somme* des nombres duodécimaux $(70_{,}\delta)$, $(3_{,}\omega)$ est $(74_{,}9)$, que leur *différence* est $(68_{,}\omega)$ que leur *produit* est $(238_{,}32)$, que le *quotient* de $(238_{,}32)$ par $(3\omega)$ est $(70_{,}\delta)$, et que

$$(0_{,}272727 \text{ etc.}) = \left(\frac{27}{\omega\omega}\right)$$

$$(8_{,}01367676767 \text{ etc.}) = \frac{(801367) - (8013\delta)}{(\delta\omega 000)}$$

$$(0_{,}0013070707 \text{ etc.}) = \frac{(1307) - (13)}{(\omega\omega 0000)}$$

173. Pour *trouver le reste de la division d'un nombre par la base douze diminuée ou augmentée de* 1, c'est-à-dire par *onze* ou par *treize,* il suffit d'avoir recours aux règles des n$^{os}$ 23 et 26 et d'y remplacer les nombres *neuf* et *onze,* par *onze* et *treize.*

Ainsi, le reste de la division de $(234)$ par onze est $2 + 3 + 4$ ou 9, et le reste de la division de $(7\omega 5354)$ par treize est $4 + 3 + \omega) - (5 + 5 + 7)$, ou $(16) - (15)$, ou 1.

## COMPARAISON *de quelques mesures étrangères avec les nouvelles mesures françaises.*

| MESURES LINÉAIRES. | Millim. |
|---|---|
| Ancien pied français | 324,7 |
| Pied anglais | 304,7 |
| Vare de Castille | 836,6 |
| Pied du Rhin | 313,9 |
| De Vienne | 316,0 |
| D'Amsterdam | 283,0 |
| De Suède | 297,1 |
| De Russie | 354,1 |
| De la Chine | 320,0 |

| POIDS. | | Gram. |
|---|---|---|
| Liv. poids de marc | | 489,2 |
| Angl. | livre troy | 372,6 |
| Angl. | avoir du poise | 453,1 |
| Castille | | 459,4 |
| Cologne | | 467,4 |
| Vienne | | 558,6 |
| Amsterdam | | 491,4 |
| Suède | | 424,6 |
| Russie | | 409,5 |

***TABLEAU** de comparaison des monnaies étrangères avec les monnaies françaises, toutes supposées droites (exactes) de poids et de titre, d'après les lois de fabrication.* (Tiré de l'*Annuaire* de 1821.)

| M. | Dénomination des pièces. | Poids légal. | Tit. légal. | Valeurs. |
|---|---|---|---|---|
| | ANGLETERRE. | | | |
| *Or.* | Guinée de 21 schellings | 8g3802 | 917 | 26f 47c |
| | Demi | 4,1901 | 917 | 13 23,50 |
| | Un quart | 2,095 | 917 | 6 61,75 |
| | Un tiers, ou 7 schellings | 2,7934 | 917 | 8 82,33 |
| | Souverain depuis 1818, de 20 schellings | 7,9808 | 917 | 25 20,80 |
| *Arg.* | Crown, ou couronne de 5 schell. anciens | 30,074 | 925 | 6 18 |
| | Schelling ancien | 6,015 | 925 | 1 23,60 |
| | Crown, ou couronne, depuis 1818 | 28,2514 | 925 | 5 80,72 |
| | Schelling, depuis 1818 | 5,6503 | 925 | 1 16,14 |
| | AUTRICHE ET BOHÊME. | | | |
| *Or.* | Ducat de l'Empereur | 3,491 | 986 | 11 86 |
| | Ducat de Hongrie | 3,491 | 990 | 11 90 |
| | Souverain | 5,567 | 917 | 17 58 |
| | Demi | 2,7835 | 917 | 8 79 |
| *Arg.* | Ecu, ou risdale de convention, depuis 1753 | 28,064 | 833 | 5 19,50 |
| | Demi-risdale, ou florin | 14,032 | 833 | 2 59,75 |
| | Vingt kreutzers | 6,682 | 583 | 0 86,50 |
| | Dix kreutzers | 3,898 | 500 | 0 43,25 |
| | HOLLANDE. | | | |
| *Or.* | Ducat | 3,512 | 986 | 11 93 |
| | Ryder | 9,988 | 920 | 31 65 |
| | Vingt florins, 1808 | 13,659 | 917 | 43 14 |
| | Dix florins, *idem* | 6,8295 | 917 | 21 57 |
| | —— de Guillaume, 1818 | 6,700 | 900 | 20 77 |
| *Arg.* | Florin de 20 sous | 10,597 | 917 | 2 15,94 |
| | Escalin, ou pièce de 6 sous | 4,976 | 583 | 0 64 |
| | Ducaton ou ryder | 32,750 | 941 | 6 85 |
| | Ducat ou risdale | 28,230 | 873 | 5 48 |
| | DANEMARCK ET HOLSTEIN. | | | |
| *Or.* | Ducat courant depuis 1767 | 3,143 | 875 | 9 47 |
| | Ducat spécies, 1791 à 1802 | 3,519 | 979 | 11 86 |
| | Chrétien, 1773 | 6,735 | 903 | 20 95 |
| *Arg.* | Risdale d'espèce, ou double écu de 96 schellings danois, depuis 1776 | 29,126 | 875 | 5 66 |
| | Risdale courante, ou pièce de 6 m. Dan. de 1750 | 26,800 | 833 | 4 96 |
| | Mark danois de 16 schellings, de 1776 | » » | 688 | 0 94 |
| | Mark de Lubeck de 16 schellings, de 1740 | 9,164 | 750 | 1 53 |

| Métal. | Dénomination des pièces. | Poids légal. | Tit. légal. | Valeurs. |
|---|---|---|---|---|
| | ÉTAT ECCLÉSIASTIQUE. | | | |
| *Or.* | Pistoles de Pie VI et Pie VII | 5g471 | 916⅔ | 17f27c50 |
| | Demi | 2,7355 | 916⅔ | 8 63,75 |
| | Sequin, 1769, Clément XIV et ses successeurs. | 3,426 | 1000 | 11 80 |
| | Demi | 1,713 | 1000 | 5 90 |
| *Arg.* | Ecu de 10 pauls, ou 100 bayoques | 26,437 | 916⅔ | 5 38,50 |
| | Trois dixièmes d'écu, ou teston de 30 bayoques. | 7,932 | 916⅔ | 1 62 |
| | Un cinquième d'écu, ou papeto de 20 bayoq. | 5,287 | 916⅔ | 1 08 |
| | Un dixième d'écu, ou paul de 10 bayoques... | 2,644 | 916⅔ | 0 54 |
| | ESPAGNE. | | | |
| *Or.* | Pistole ou doublon de 8 écus, 1772 à 1786.... | 27,045 | 901 | 83 93 |
| | —— de 4 écus | 13,5225 | 901 | 41 96,50 |
| | —— de 2 écus | 6,7613 | 901 | 20 98,25 |
| | Demi-pistole, ou écu | 3,3806 | 901 | 10 49,12 |
| | Pistole ou doublon de 8 écus, depuis 1786.... | 27,045 | 875 | 81 51 |
| | —— de 4 écus | 13,5225 | 875 | 40 75,50 |
| | —— de 2 écus | 6,7613 | 875 | 20 37,75 |
| | Demi-pistole ou écu | 3,3806 | 875 | 10 18,87 |
| *Arg.* | Piastre, depuis 1772 | 27,045 | 903 | 5 43 |
| | Réal de 2, ou piécette, ou cinquième de piastre. | 5,971 | 813 | 1 08 |
| | Réal de 1, ou demi-piécette, ou 10e de piastre.. | 2,9855 | 813 | 0 54 |
| | Réallillo, ou réal de veillon, ou 20e de piastre. | 1,4928 | 813 | 0 27 |
| | *Nota.* Ces trois dernières pièces sont dénommées *monnaie provinciale*; elles sont fabriquées en Espagne et n'ont cours que dans la péninsule. | | | |
| | HAMBOURG. | | | |
| *Or.* | Ducat *ad legem imperii* | 3,491 | 986 | 11 86 |
| | Ducat nouveau de la ville | 3,488 | 979 | 11 76 |
| *Arg.* | Marc banco (*monnaie imaginaire*) | » » | » » | 1 88 |
| | Marc ou 16 schell., d'après la convent. de Lubeck. | 9,164 | 750 | 1 53 |
| | Risdale de constitution, ou écu de banque. | 29,233 | 889 | 5 78 |
| | TOSCANE. | | | |
| *Or.* | Ruspone, ou 3 sequins aux lys | 10,464 | 1000 | 36 04 |
| | Un tiers ruspone, ou sequin aux lys | 3,488 | 1000 | 12 01,33 |
| | Demi-sequin | 1,744 | 1000 | 6 00,67 |
| | Sequin à l'effigie | 3,488 | 1000 | 12 01,33 |
| | Rosine | 6,976 | 896 | 21 54 |
| | Demi | 3,488 | 896 | 10 77 |
| *Arg.* | Francescone de 10 paoli, livournine, piastre à la rose, talaro, léopoldine et écu de 10 paoli. | 27,507 | 917 | 5 61 |
| | Pièce de 5 paoli | 13,7535 | 917 | 2 80,50 |
| | —— de 2 paoli | 5,501 | 917 | 1 12,20 |
| | —— de 1 paoli | 2,751 | 917 | 0 56,10 |
| | SUISSE. | | | |
| *Or.* | Pièce de 32 franken de Suisse | 15,297 | 904 | 47 63 |
| | —— de 16 | 7,6485 | 904 | 23 81,50 |
| | Ducat de Zurich | 3,491 | 979 | 11 77 |
| | —— de Berne | 3,452 | 979 | 11 64 |
| | Pistole de Berne | 7,648 | 902 | 23 76 |
| *Arg.* | Ecu de Bâle de 30 batz, ou 2 florins | 23,386 | 878 | 4 56 |
| | Demi-écu, ou florin de 15 batz | 11,693 | 878 | 2 28 |
| | Franc de Berne, depuis 1803 | 7,512 | 900 | 1 50 |
| | Ecu de Zurick, de 1781 | 25,057 | 844 | 4 70 |
| | Demi, ou florin, depuis 1781 | 12,5285 | 844 | 2 35 |
| | Ecu de 40 batz de Bâle et Soleure, depuis 1798. | 29,480 | 901 | 5 90 |
| | Pièce de 4 franken de Berne, de 1799 | 29,370 | 901 | 5 88 |
| | —— de 4 franken de Suisse, en 1803 | 30,049 | 900 | 6 0 |
| | —— de 2 franken de Suisse, en 1803 | 15,0245 | 900 | 3 0 |
| | —— d'un franken de Suisse, en 1803 | 7,5123 | 900 | 1 50 |

| Métal. | Dénomination des pièces. | Poids légal. | Tit. légal. | Valeurs. |
|---|---|---|---|---|
| | NAPLES. | | | |
| *Or.* | Le titre des ducats est trop variable pour pouvoir en donner l'évaluat. en monnaies françaises. | » » | » | » » |
| | Once nouveau de 3 ducats, depuis 1818 | 3s786 | 996 | 12f99c |
| | Quintuple de 15 ducats, depuis 1818 | 18,933 | 996 | 64 95 |
| | Décuple de 30 ducats, depuis 1818 | 37,865 | 996 | 129 90 |
| *Arg.* | 12 carlins de 120 grains, depuis 1804 | 27,533 | 833⅓ | 5 10 |
| | Ducats de 10 carlins de 100 grains, 1784 | 22,810 | 839$\frac{11}{12}$ | 4 25 |
| | 2 carlins, depuis 1804 | 4,589 | 833⅓ | 0 85 |
| | 1 carlin, depuis 1804 | 2,2945 | 833⅓ | 0 42,5 |
| | Ducat de 10 carlins, de 1818 | 22,943 | 833⅓ | 4 25 |
| | PARME. | | | |
| *Or.* | Sequin | 3,468 | 1000 | 11 95 |
| | Pistole de 1784 | 7,498 | 891 | 23 01 |
| | Pistole de 1786 à 1791 | 7,141 | 891 | 21 91,50 |
| | 40 lire de Marie-Louise, depuis 1815 | 12,9032 | 900 | 40 » |
| | 20 lire de Marie-Louise, depuis 1815 | 6,4516 | 900 | 20 » |
| *Arg.* | Ducat de 1784 et 1796 | 25,707 | 996 | 5 18 |
| | Pièce de 3 livres, depuis 1790 | 3,672 | 833 | 0 68 |
| | —— d'une livre 10 sous, depuis 1790 | 1,836 | 833 | 0 34 |
| | 5 lire de Marie-Louise, depuis 1815 | 25,000 | 900 | 5 » |
| | 2 lire, 1 lira, $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{4}$ de lira, à proportion | » » | » | » » |
| | GÊNES. | | | |
| *Or.* | Sequin | 3,487 | 1000 | 12 01 |
| | PORTUGAL. | | | |
| *Or.* | Moeda douro, lisbonnine de 4800 reis | 10,752 | 917 | 33 96 |
| | Meia moeda, demi-lisbonnine 2400 reis | 5,376 | 917 | 16 98 |
| | Quartinho, quart de lisbonnine, de 1200 reis | 2,688 | 917 | 8 49 |
| | Meia dobra, portugaise de 6400 reis | 14,334 | 917 | 45 27 |
| | Demi-portugaise de 3200 reis | 7,167 | 917 | 22 63,50 |
| | Pièce de 16 testons de 1600 reis | 3,583 | 917 | 11 31,75 |
| | —— de 12 testons de 1200 reis | 2,538 | 917 | 8 02 |
| | —— de 8 testons de 800 reis | 1,792 | 917 | 5 66 |
| | Cruzade de 480 reis | 1,045 | 917 | 3 30 |
| *Arg.* | Cruzade neuve de 480 reis | 14,633 | 903 | 2 94 |
| | 1000 reis | » » | » | 6 12,50 |
| | PRUSSE. | | | |
| *Or.* | Ducat | 3,491 | 979 | 11 77 |
| | Frédéric | 6,689 | 903 | 20 80 |
| | Demi | 3,3445 | 903 | 10 40 |
| *Arg.* | Risdale, écu thaler de 24 bons gros, de 1767 à 1807 | 22,298 | 750 | 3 71,63 |
| | Demi, ou 12 bons gros | 11,149 | 750 | 1 85,81 |
| | Gros | » » | » | 0 15,48 |
| *Or.* | *Néant.* RAGUSE. | | | |
| *Arg.* | Talaro, dit ragusine | 29,400 | 600 | 3 90 |
| | Demi | 14,700 | 600 | 1 95 |
| | Ducat | 13,666 | 450 | 1 37 |
| | 12 grossettes | 4,140 | 450 | 0 41 |
| | 6 grossettes | 2,070 | 450 | 0 20,50 |
| | RUSSIE. | | | |
| *Or.* | Ducat de 1755 à 1763 | 3,495 | 979 | 11 79 |
| | —— de 1763 | 3,473 | 969 | 11 69 |
| | Impériale de 10 roubles, de 1755 à 1763 | 16,585 | 917 | 52 38 |
| | Demie de 5 roubles, de 1755 à 1763 | 8,2925 | 917 | 26 19 |
| | Impériale de 10 roubles, depuis 1763 | 13,073 | 917 | 41 20 |
| | Demie de 5 roubles, depuis 1763 | 6,5365 | 917 | 20 64,50 |
| *Arg.* | Rouble de 100 copecks, de 1750 à 1762 | 25,870 | 802 | 4 61 |
| | —— depuis 1763 à 1807 | 24,011 | 750 | 4 0 |

| Métal. | Dénomination des pièces. | Poids légal. | Titre légal. | Valeurs. |
|---|---|---|---|---|
| | SARDAIGNE. | | | |
| *Or.* | Carlin, depuis 1768 | 16s056 | 892 | 49f 33c |
| | Demi | 8,028 | 892 | 24 66,5o |
| | Pistole | 9,118 | 906 | 28 45 |
| | Demie | 4,559 | 906 | 14 22,5o |
| *Arg.* | Ecu, depuis 1768 | 23,590 | 896 | 4 70 |
| | Demi-écu | 11,795 | 896 | 2 35 |
| | Quart d'écu, ou une livre | 5,8975 | 896 | 1 17,5o |
| | Ecu neuf de 5 livres, 1816 | 25,000 | 900 | 5 o |
| | SAVOIE ET PIÉMONT. | | | |
| *Or.* | Sequin | 3,468 | 1000 | 11 94,5o |
| | Double neuve pistole de 24 livres | 9,620 | 906 | 30 o |
| | Demie de 12 livres | 4,810 | 906 | 15 o |
| | Carlin depuis 1755 | 48,100 | 906 | 15o o |
| | Demi | 24,050 | 906 | 75 o |
| | Pistole neuve de 20 livres, de 1816 | 6,4516 | 900 | 20 o |
| *Arg.* | Ecu de 6 livres, depuis 1755 | 35,118 | 906 | 7 07 |
| | Demi-écu | 17,559 | 906 | 3 53,5o |
| | Un quart, ou 3o sous | 8,7795 | 906 | 1 76,75 |
| | Demi-quart, ou 15 sous | 4,3897 | 906 | o 88,37 |
| | Ecu neuf de 5 livres, 1816 | 25 » | 900 | 5 o |
| | SAXE. | | | |
| *Or.* | Ducat | 3,491 | 986 | 11 86 |
| | Double Auguste, ou 10 thalers | 13,340 | 903 | 41 49 |
| | Auguste, ou 5 thalers | 6,670 | 903 | 20 74,5o |
| | Demi-Auguste | 3,335 | 903 | 1o 37,25 |
| *Arg.* | Risdale d'espèce, ou écu de convent., depuis 1763 | 28,064 | 833 | 5 19,5o |
| | Demi, ou florin de convention | 14,032 | 833 | 2 59,75 |
| | Thaler de 24 bons gros (monnaie imagin.) | » » | » | 3 89,63 |
| | Un gros ou 32e de risdale, ou 24e de thaler | 1,982 | 368 | o 16,21 |
| | SICILE. | | | |
| *Or.* | Once, depuis 1748 | 4,399 | 906 | 13 73 |
| *Arg.* | Ecu de 12 tarins | 27,533 | 833 1/3 | 5 10 |
| | SUÈDE. | | | |
| *Or.* | Ducat | 3,482 | 976 | 11 70 |
| | Demi | 1,741 | 976 | 5 85 |
| | Quart | 0,8705 | 976 | 2 92,5o |
| *Arg.* | Risdale d'espèce de 48 schell., de 1720 à 1802 | 29,568 | 878 | 5 75,73 |
| | 2 tiers de risdale, ou double plotte de 32 schell. | 19,672 | 878 | 3 83,82 |
| | Un tiers, ou 16 schellings | 9,836 | 878 | 1 91,91 |
| | VENISE. | | | |
| *Or.* | Sequin | 3,484 | 1000 | 12 o |
| | Demi | 1,742 | 1000 | 6 o |
| | Oselle | 13,066 | 1000 | 47 07 |
| | Ducat | 2,175 | 1000 | 7 49 |
| | Pistole | 6,764 | 917 | 21 36 |
| *Arg.* | Ducat effectif de 8 livres piccolis | 22,777 | 826 | 4 18 |
| | Ecu à la croix | 31,788 | 948 | 6 70 |
| | Justine ou ducaton | 27,954 | 948 | 5 91 |
| | Talaro | 28,990 | 826 | 5 32 |
| | Oselle | 9,843 | 948 | 2 07 |
| | Ducat cour. de 6 2/3 de liv. picc., 124 s. mon. de Cte | » » | » | 3 23,95 |
| | Livre de 20 sous | » » | » | o 52,25 |
| | ÉTATS-UNIS D'AMÉRIQUE. | | | |
| *Or.* | Double aigle de 10 dollars | 17,480 | 917 | 35 21 |
| | Aigle de 5 dollars | 8,740 | 917 | 27 6o,5o |
| | Demi-aigle, ou 2 1/2 dollars | 4,370 | 917 | 13 80,25 |
| *Arg.* | Dollar | 27,000 | 903 | 5 42 |
| | Demi | 13,500 | 903 | 2 71 |
| | Un quart | 6,750 | | 1 35,5o |

| Métal. | Dénomination des pièces. | Poids légal. | Tit. légal. | Valeurs. |
|---|---|---|---|---|
| | BADE. | | | |
| *Or.* | Pièce de 2 florins | 6s800 | 901 | 21f04c |
| | —— de 1 florin | 3,400 | 901 | 10 52 |
| *Arg.* | Pièce de 2 florins | 25,450 | 750 | 4 18 |
| | —— de 1 florin | 12,725 | 750 | 2 09 |
| | JAPON. | | | |
| | (*Par approximation, et faute de renseignem. précis sur le poids et le titre légal des monn.*) | | | |
| *Or.* | Kobang vieux de 100 mas | » » | » | 51 24 |
| | Demi —— de 50 mas | » » | » | 25 62 |
| | Kobang nouveau de 100 mas | » » | » | 32 69 |
| | Demi —— de 50 mas | » » | » | 16 34,50 |
| *Arg.* | Tigo-gin, ou pièce de 40 mas | » » | » | 14 40 |
| | Demi de 20 mas | » » | » | 7 20 |
| | Un quart de 10 mas | » » | » | 3 60 |
| | Un huitième de 5 mas | » » | » | 1 80 |
| | MOGOL. (*Par approximation.*) | | | |
| *Or.* | Roupie du Mogol | » » | » | 38 72 |
| | Demie | » » | » | 19 36 |
| | Un quart | » » | » | 9 68 |
| | Pagode au croissant | » » | » | 9 46 |
| | —— à l'étoile | » » | » | 9 35 |
| | Ducat de la Compagnie hollandaise | » » | » | 11 62 |
| | Demi | » » | » | 5 81 |
| *Arg.* | Roupie du Mogol | » » | » | 2 42 |
| | —— de Madras | » » | » | 2 40 |
| | —— d'Arcate | » » | » | 2 36 |
| | —— de Pondichéry | » » | » | 2 42 |
| | Double fanon des Indes | » » | » | 0 63 |
| | Fanon | » » | » | 0 31,50 |
| | Pièce de la Compagnie hollandaise | » » | » | 2 40 |
| | PERSE. (*Par approximation.*) | | | |
| *Or.* | Roupie | » » | » | 36 75 |
| | Demie | » » | » | 18 37,50 |
| *Arg.* | Double roupie de 5 abassis | » » | » | 4 90 |
| | Roupie de 2 $\frac{1}{2}$ abassis | » » | » | 2 45 |
| | Abassi | » » | » | 0 97 |
| | Mamoudi | » » | » | 0 48,50 |
| | Larin | » » | » | 1 03 |
| | TURQUIE. | | | |
| *Or.* | Sequin zermahboud d'Abdoul-Hamid, 1774 | 2,642 | 958 | 8 72 |
| | Nisfie, ou $\frac{1}{2}$ zermahboud *idem* | 1,321 | 958 | 4 36 |
| | Roubbié, ou $\frac{1}{3}$ de sequin fondoukli | 0,881 | 802 | 2 43,33 |
| | Sequin zermahboud de Sélim III | 2,642 | 802 | 7 30 |
| | Demi | 1,321 | 802 | 3 65 |
| | Un quart | 0,661 | 802 | 1 82,50 |
| *Arg.* | L'allmichlec de 60 paras, depuis 1771 | 28,822 | 550 | 3 52 |
| | Yaremlec de 20 paras, ou 60 aspres, 1757 | » » | » | 0 99 |
| | Roubb de 10 paras, ou 30 aspres, 1757 | » » | » | 0 49,50 |
| | Para de 3 aspres, 1773 | » » | » | 0 04 |
| | Aspre, dont 120 pour la piastre de 1773 | » » | » | 0 01,33 |
| | Piastre de 40 paras, ou 120 aspres, 1780 | 18,015 | 500 | 2 0 |
| | Pièce de 5 piastres de Mahmoud, 1811 | » » | « | 4 13,67 |

1er TABLEAU. Réduction des mesures *linéaires* anciennes, en mesures nouvelles, et réciproquement.

| N. | Lieues terrestr. en kilom. * | Lieues marines en kilom. ** | Toises en mètres. | Pieds en mètres. | Pouces en mètres. | Lignes en mètres. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 4,4444 | 5,5556 | 1,94904 | 0,32484 | 0,027070 | 0,002256 |
| 2 | 8,8889 | 11,1111 | 3,89807 | 0,64968 | 0,054140 | 0,004512 |
| 3 | 13,3333 | 16,6667 | 5,84711 | 0,97452 | 0,081210 | 0,006768 |
| 4 | 17,7778 | 22,2222 | 7,79615 | 1,29936 | 0,108280 | 0,009024 |
| 5 | 22,2222 | 27,7778 | 9,74519 | 1,62420 | 0,135350 | 0,011280 |
| 6 | 26,6667 | 33,3333 | 11,69422 | 1,94904 | 0,162419 | 0,013536 |
| 7 | 31,1111 | 38,8889 | 13,64326 | 2,27388 | 0,189489 | 0,015792 |
| 8 | 35,5556 | 44,4444 | 15,59230 | 2,59872 | 0,216559 | 0,018048 |
| 9 | 40,0000 | 50,0000 | 17,54133 | 2,92356 | 0,243629 | 0,020304 |
| 10 | 44,4444 | 55,5556 | 19,49037 | 3,24840 | 0,270699 | 0,022560 |

| N. | Aunes en mètres.*** |
|---|---|
| 1 | 1,18845 |
| 2 | 2,37689 |
| 3 | 3,56534 |
| 4 | 4,75378 |
| 5 | 5,94223 |
| 6 | 7,13068 |
| 7 | 8,31912 |
| 8 | 9,50757 |
| 9 | 10,69601 |
| 10 | 11,88446 |

| N. | Fractions d'aune en mètres. |
|---|---|
| 1/16 | 0,594 |
| 2/16 | 0,396 |
| 3/16 | 0,792 |
| 4/16 | 0,297 |
| 5/16 | 0,891 |
| 6/16 | 0,198 |
| 7/16 | 0,990 |
| 8/16 | 0,749 |
| 9/16 | 0,446 |

| N. | Fractions d'aune en mètres. |
|---|---|
| 8/16 | 0,743 |
| 9/16 | 1,040 |
| 10/16 | 0,099 |
| 11/16 | 0,495 |
| 12/16 | 0,693 |
| 13/16 | 1,089 |
| 14/16 | 0,074 |
| 15/16 | 0,223 |
| 16/16 | 0,371 |

| N. | Fractions d'aune en mètres. |
|---|---|
| 7/16 | 0,520 |
| 8/16 | 0,668 |
| 9/16 | 0,817 |
| 10/16 | 0,966 |
| 11/16 | 1,114 |

| N. | Kilom. en lieues terrestres. | Kilom. en lieues mar. | Mètres en toises. | Mètres en pieds. | Mètres en pouces. | Mètres en lignes. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,225 | 0,18 | 0,51307 | 3,07844 | 36,9413 | 443,296 |
| 2 | 0,450 | 0,36 | 1,02615 | 6,15689 | 73,8827 | 886,592 |
| 3 | 0,675 | 0,54 | 1,53922 | 9,23533 | 110,8240 | 1329,888 |
| 4 | 0,900 | 0,72 | 2,05230 | 12,31378 | 147,7653 | 1773,184 |
| 5 | 1,125 | 0,90 | 2,56537 | 15,39222 | 184,7067 | 2216,480 |
| 6 | 1,350 | 1,08 | 3,07844 | 18,47066 | 221,6480 | 2659,775 |
| 7 | 1,575 | 1,26 | 3,59152 | 21,54911 | 258,5893 | 3103,071 |
| 8 | 1,800 | 1,44 | 4,10459 | 24,62755 | 295,5306 | 3546,367 |
| 9 | 2,025 | 1,62 | 4,61767 | 27,70600 | 332,4720 | 3989,663 |
| 10 | 2,250 | 1,80 | 5,13074 | 30,78444 | 369,4133 | 4432,959 |

| N. | Mètres en aunes de Paris. |
|---|---|
| 1 | 0,84144 |
| 2 | 1,68287 |
| 3 | 2,52431 |
| 4 | 3,36574 |
| 5 | 4,20718 |
| 6 | 5,04861 |
| 7 | 5,89005 |
| 8 | 6,73148 |
| 9 | 7,57292 |
| 10 | 8,41435 |

* La lieue de 25 au degré vaut 2280$^{toises}$,33.

** La lieue marine de 20 au degré vaut 2850$^{toises}$,41.

*** L'aune de Paris vaut 3 pieds pouces 10 lignes $\frac{5}{6}$.

## 2e Tableau. Réduction des mesures *quarrées* anciennes, en mesures nouvelles, et réciproquement.

| N. | Toises quarr. en mètres quarr. | Pieds quarr. en mètres quarr. | Pouces quarr. en mètres quarr. | Lignes quarr. en mètres quarr. |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 3,798244 | 0,105521 | 0,00073278 | 0,000005089 |
| 2 | 7,597487 | 0,211041 | 0,00146556 | 0,000010178 |
| 3 | 11,396231 | 0,316562 | 0,00219834 | 0,000015267 |
| 4 | 15,194975 | 0,422083 | 0,00293112 | 0,000020356 |
| 5 | 18,993718 | 0,527604 | 0,00366390 | 0,000025445 |
| 6 | 22,792462 | 0,633124 | 0,00439668 | 0,000030534 |
| 7 | 26,591205 | 0,738645 | 0,00512946 | 0,000035623 |
| 8 | 30,389949 | 0,844166 | 0,00586224 | 0,000040712 |
| 9 | 34,188693 | 0,949686 | 0,00659502 | 0,000045801 |
| 10 | 37,987436 | 1,055207 | 0,00732780 | 0,000050890 |

| N. | Lieues quarrées en myriamètres quarrés. | Lieues quarrées en myriares. | Arp. Eaux et For. en hec. ou perches quarrées en ares. | Arp. de Paris en hect. ou perch. quarrées en ares. |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,1975309 | 19,75309 | 0,510720 | 0,341887 |
| 2 | 0,3950617 | 39,50617 | 1,021440 | 0,683774 |
| 3 | 0,5925926 | 59,25926 | 1,532160 | 1,025661 |
| 4 | 0,7901234 | 79,01234 | 2,042880 | 1,367548 |
| 5 | 0,9876543 | 98,76543 | 2,553600 | 1,709435 |
| 6 | 1,1851852 | 118,51852 | 3,064320 | 2,051322 |
| 7 | 1,3827160 | 138,27160 | 3,575040 | 2,393209 |
| 8 | 1,5802469 | 158,02469 | 4,085760 | 2,735096 |
| 9 | 1,7777777 | 177,77777 | 4,596480 | 3,076983 |
| 10 | 1,9753086 | 197,53086 | 5,107200 | 3,418870 |

| N. | Mètres quarr. en toises quarr. | Mètres quarr. en pieds quarrés | Mètres quarr. en pouces quarr. | Mètres quarr. en lignes quarr. |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,263245 | 9,47682 | 1364,66 | 196511 |
| 2 | 0,526490 | 18,95363 | 2729,32 | 393023 |
| 3 | 0,789735 | 28,43045 | 4093,99 | 589534 |
| 4 | 1,052980 | 37,90726 | 5458,65 | 786045 |
| 5 | 1,316225 | 47,38408 | 6823,31 | 982557 |
| 6 | 1,579469 | 56,86090 | 8187,97 | 1179068 |
| 7 | 1,842714 | 66,33771 | 9552,63 | 1375579 |
| 8 | 2,105959 | 75,81453 | 10917,30 | 1572090 |
| 9 | 2,369204 | 85,29134 | 12281,96 | 1768602 |
| 10 | 2,632449 | 94,76816 | 13646,62 | 1965113 |

| N. | Myriamètres quarrés en lieues quarrées. | Myriares en lieues quarrées. | Hectares en arp. Eaux et F. ou ares en perch. quarr. | Hect. en arp. de Paris, ou ares en perch. quarr. |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 5,0625 | 0,050625 | 1,958020 | 2,924943 |
| 2 | 10,1250 | 0,101250 | 3,916040 | 5,849886 |
| 3 | 15,1875 | 0,151875 | 5,874060 | 8,774829 |
| 4 | 20,2500 | 0,202500 | 7,832080 | 11,699772 |
| 5 | 25,3125 | 0,253125 | 9,790100 | 14,624715 |
| 6 | 30,3750 | 0,303750 | 11,748120 | 17,549658 |
| 7 | 35,4375 | 0,354375 | 13,706140 | 20,474601 |
| 8 | 40,5000 | 0,405000 | 15,664160 | 23,399544 |
| 9 | 45,5625 | 0,455625 | 17,622180 | 26,324487 |
| 10 | 50,6250 | 0,506250 | 19,580200 | 29,249430 |

## 3e Tableau. Réduction des mesures *cubiques* anciennes, en mesures nouvelles, et réciproquement.

| N. | Toises cubes en mètres cubes. | Pieds cubes en mètres cubes. | Pouces cubes en mètres cubes. | Lignes cubes en mètres cubes. | N. | Cordes de bois, Eaux et Forêts, en stères. | Solives (charpente) en stères ou mètres cubes. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 7,40389 | 0,0342773 | 0,000019836 | 0,000000011148 | 1 | 3,8391 | 0,10283 |
| 2 | 14,80778 | 0,0685545 | 0,000039673 | 0,000000022296 | 2 | 7,6781 | 0,20566 |
| 3 | 22,21167 | 0,1028318 | 0,000059509 | 0,000000033444 | 3 | 11,5172 | 0,30850 |
| 4 | 29,61556 | 0,1371090 | 0,000079346 | 0,000000044592 | 4 | 15,3562 | 0,41133 |
| 5 | 37,01945 | 0,1713863 | 0,000099182 | 0,000000055740 | 5 | 19,1953 | 0,51416 |
| 6 | 44,42334 | 0,2056636 | 0,000119018 | 0,000000066888 | 6 | 23,0343 | 0,61699 |
| 7 | 51,82723 | 0,2399408 | 0,000138855 | 0,000000078036 | 7 | 26,8734 | 0,71982 |
| 8 | 59,23112 | 0,2742181 | 0,000158691 | 0,000000089184 | 8 | 30,7124 | 0,82265 |
| 9 | 66,63501 | 0,3084953 | 0,000178528 | 0,000000100332 | 9 | 34,5515 | 0,92549 |
| 10 | 74,03890 | 0,3427726 | 0,000198364 | 0,000000111480 | 10 | 38,3905 | 1,02832 |

| N. | Mètres cubes en toises cubes. | Mètres cubes en pieds cubes. | Mètres cubes en pouces cubes. | Mètres cubes en lignes cubes. | N. | Stères en cordes de bois Eaux et Forêts. | Mètres cubes en solives. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,135064 | 29,1739 | 50412,42 | 87112655 | 1 | 0,26048 | 9,7246 |
| 2 | 0,270128 | 58,3477 | 100824,83 | 174225310 | 2 | 0,52096 | 19,4492 |
| 3 | 0,405192 | 87,5216 | 151237,25 | 261337965 | 3 | 0,78144 | 29,1739 |
| 4 | 0,542057 | 116,6954 | 201649,66 | 348450619 | 4 | 1,04192 | 38,8985 |
| 5 | 0,675321 | 145,8693 | 252062,08 | 435563274 | 5 | 1,30241 | 48,6231 |
| 6 | 0,810385 | 175,0431 | 302474,50 | 522675929 | 6 | 1,56289 | 58,3477 |
| 7 | 0,945449 | 204,2170 | 352886,91 | 609788584 | 7 | 1,82337 | 68,0923 |
| 8 | 1,080513 | 233,3908 | 403299,33 | 696901239 | 8 | 2,08385 | 77,7970 |
| 9 | 1,215577 | 262,5647 | 453711,74 | 784013894 | 9 | 2,34433 | 87,5216 |
| 10 | 1,350641 | 291,7385 | 504124,16 | 871126549 | 10 | 2,60481 | 97,2462 |

4e TABLEAU. Réduction des mesures de *capacité* anciennes, en mesures nouvelles, et réciproquement.

| N. | Pintes de Paris en litres. | Muids de vin de Paris en hectolitr. | Septiers de blé de Par. en hectolitr. | Boisseaux en litres. | Litrons en litres. |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,9313 | 2,6822 | 1,5610 | 13,008 | 0,8130 |
| 2 | 1,8626 | 5,3644 | 3,1220 | 26,017 | 1,6260 |
| 3 | 2,7940 | 8,0466 | 4,6830 | 39,025 | 2,4391 |
| 4 | 3,7253 | 10,7288 | 6,2440 | 52,033 | 3,2521 |
| 5 | 4,6566 | 13,4110 | 7,8050 | 65,042 | 4,0651 |
| 6 | 5,5879 | 16,0932 | 9,3660 | 78,050 | 4,8781 |
| 7 | 6,5192 | 18,7754 | 10,9270 | 91,058 | 5,6911 |
| 8 | 7,4506 | 21,4576 | 12,4880 | 104,066 | 6,5042 |
| 9 | 8,3819 | 24,1398 | 14,0490 | 117,075 | 7,3172 |
| 10 | 9,3132 | 26,8220 | 15,6100 | 130,083 | 8,1302 |

| N. | Litres en pint. de Par. | Hectolit. en muids de vin de Paris. | Hectolit. en sept. de blé de Paris. | Litres en boisseaux. | Litres en litrons. |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1,0737 | 0,3728 | 0,6406 | 0,07687 | 1,2300 |
| 2 | 2,1475 | 0,7457 | 1,2812 | 0,15375 | 2,4600 |
| 3 | 3,2212 | 1,1185 | 1,9219 | 0,23062 | 3,6900 |
| 4 | 4,2950 | 1,4913 | 2,5625 | 0,30750 | 4,9199 |
| 5 | 5,3687 | 1,8642 | 3,2031 | 0,38437 | 6,1499 |
| 6 | 6,4424 | 2,2370 | 3,8437 | 0,46124 | 7,3799 |
| 7 | 7,5162 | 2,6098 | 4,4843 | 0,53812 | 8,6099 |
| 8 | 8,5899 | 2,9826 | 5,1250 | 0,61499 | 9,8399 |
| 9 | 9,6637 | 3,3555 | 5,7656 | 0,69187 | 11,0699 |
| 10 | 10,7374 | 3,7283 | 6,4062 | 0,76874 | 12,2998 |

5e TABLEAU. Réduction des *poids* anciens en poids nouveaux, et réciproquement.

| N. | Livres en kilogramm. | Onces en kilogramm. | Gros en kilogramm. | Grains en kilogramm. | Quintaux en myriagram. |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,48951 | 0,03059 | 0,003824 | 0,000531 | 4,8951 |
| 2 | 0,97901 | 0,06119 | 0,007648 | 0,0001062 | 9,7901 |
| 3 | 1,46852 | 0,09178 | 0,011472 | 0,0001593 | 14,6852 |
| 4 | 1,95802 | 0,12238 | 0,015296 | 0,0002124 | 19,5802 |
| 5 | 2,44753 | 0,15297 | 0,019120 | 0,0002655 | 24,4753 |
| 6 | 2,93704 | 0,18356 | 0,022944 | 0,0003186 | 29,3704 |
| 7 | 3,42654 | 0,21416 | 0,026768 | 0,0003717 | 34,2654 |
| 8 | 3,91605 | 0,24475 | 0,030592 | 0,0004248 | 39,1605 |
| 9 | 4,40555 | 0,27535 | 0,034416 | 0,0004779 | 44,0555 |
| 10 | 4,89506 | 0,30594 | 0,038240 | 0,0005310 | 48,9506 |

| N. | Kilogramm. en livres. | Kilogramm. en onces. | Kilogramm. en gros. | Kilogramm. en grains. | Myriagram. en quintaux. |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2,04288 | 32,686 | 261,49 | 18827,15 | 0,20429 |
| 2 | 4,08575 | 65,372 | 522,98 | 37654,30 | 0,40858 |
| 3 | 6,12863 | 98,058 | 784,46 | 56481,45 | 0,61286 |
| 4 | 8,17150 | 130,744 | 1045,95 | 75308,60 | 0,81715 |
| 5 | 10,21438 | 163,430 | 1307,44 | 94135,75 | 1,02144 |
| 6 | 12,25726 | 196,116 | 1568,93 | 112962,90 | 1,22573 |
| 7 | 14,30013 | 228,802 | 1830,42 | 131790,05 | 1,43001 |
| 8 | 16,34301 | 261,488 | 2091,90 | 150617,20 | 1,63430 |
| 9 | 18,38588 | 294,174 | 2353,39 | 169444,35 | 1,83859 |
| 10 | 20,42876 | 326,860 | 2614,88 | 188271,50 | 2,04288 |

6e Tableau. Réduction des monnaies anciennes en monnaies nouvelles, et réciproquement.

| N. | Livres en francs. | Sous en francs. | Deniers en francs. | Francs en Livres. |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,987 650 942 | 0,049 382 547 | 0,004 115 212 | 1,012 503 463 |
| 2 | 1,975 301 885 | 0,098 765 09 | 0,008 230 424 | 2,025 006 926 |
| 3 | 2,962 952 827 | 0,148 147 641 | 0,012 345 636 | 3,037 510 390 |
| 4 | 3,950 603 770 | 0,197 530 188 | 0,016 460 849 | 4,050 013 853 |
| 5 | 4,938 254 713 | 0,246 912 735 | 0,020 576 061 | 5,062 517 316 |
| 6 | 5,925 905 655 | 0,296 295 282 | 0,024 691 273 | 6,075 020 780 |
| 7 | 6,913 556 598 | 0,345 677 829 | 0,028 806 485 | 7,087 524 432 |
| 8 | 7,901 207 541 | 0,395 060 377 | 0,032 921 698 | 8,100 027 706 |
| 9 | 8,888 858 483 | 0,444 442 924 | 0,037 036 910 | 9,112 531 170 |

FIN DES NOTES.

# TABLE

# DES LOGARITHMES,

## DEPUIS 1 JUSQU'A 10 000.

# LOGARITHMES DES NOMBRES DE 1 A 10000.

| N. | Log. | N. | Log. | N. | Log. | N. | Log. | N. | Log. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 00000 | 51 | 70757 | 101 | 00432 | 151 | 17898 | 201 | 30320 |
| 2 | 30103 | 52 | 71600 | 102 | 00860 | 152 | 18184 | 202 | 30535 |
| 3 | 47712 | 53 | 72428 | 103 | 01284 | 153 | 18469 | 203 | 30750 |
| 4 | 60206 | 54 | 73239 | 104 | 01703 | 154 | 18752 | 204 | 30963 |
| 5 | 69897 | 55 | 74036 | 105 | 02119 | 155 | 19033 | 205 | 31175 |
| 6 | 77815 | 56 | 74819 | 106 | 02531 | 156 | 19312 | 206 | 31387 |
| 7 | 84510 | 57 | 75587 | 107 | 02938 | 157 | 19590 | 207 | 31597 |
| 8 | 90309 | 58 | 76343 | 108 | 03342 | 158 | 19866 | 208 | 31806 |
| 9 | 95424 | 59 | 77085 | 109 | 03743 | 159 | 20140 | 209 | 32015 |
| 10 | 00000 | 60 | 77815 | 110 | 04139 | 160 | 20412 | 210 | 32222 |
| 11 | 04139 | 61 | 78533 | 111 | 04532 | 161 | 20683 | 211 | 32428 |
| 12 | 07918 | 62 | 79239 | 112 | 04922 | 162 | 20952 | 212 | 32634 |
| 13 | 11394 | 63 | 79934 | 113 | 05308 | 163 | 21219 | 213 | 32838 |
| 14 | 14613 | 64 | 80618 | 114 | 05690 | 164 | 21484 | 214 | 33041 |
| 15 | 17609 | 65 | 81291 | 115 | 06070 | 165 | 21748 | 215 | 33244 |
| 16 | 20412 | 66 | 81954 | 116 | 06446 | 166 | 22011 | 216 | 33445 |
| 17 | 23045 | 67 | 82607 | 117 | 06819 | 167 | 22272 | 217 | 33646 |
| 18 | 25527 | 68 | 83251 | 118 | 07188 | 168 | 22531 | 218 | 33846 |
| 19 | 27875 | 69 | 83885 | 119 | 07555 | 169 | 22789 | 219 | 34044 |
| 20 | 30103 | 70 | 84510 | 120 | 07918 | 170 | 23045 | 220 | 34242 |
| 21 | 32222 | 71 | 85126 | 121 | 08279 | 171 | 23300 | 221 | 34439 |
| 22 | 34242 | 72 | 85733 | 122 | 08636 | 172 | 23553 | 222 | 34635 |
| 23 | 36173 | 73 | 86332 | 123 | 08991 | 173 | 23805 | 223 | 34830 |
| 24 | 38021 | 74 | 86923 | 124 | 09342 | 174 | 24055 | 224 | 35025 |
| 25 | 39794 | 75 | 87506 | 125 | 09691 | 175 | 24304 | 225 | 35218 |
| 26 | 41497 | 76 | 88081 | 126 | 10037 | 176 | 24551 | 226 | 35411 |
| 27 | 43136 | 77 | 88649 | 127 | 10380 | 177 | 24797 | 227 | 35603 |
| 28 | 44716 | 78 | 89209 | 128 | 10721 | 178 | 25042 | 228 | 35793 |
| 29 | 46240 | 79 | 89763 | 129 | 11059 | 179 | 25285 | 229 | 35984 |
| 30 | 47712 | 80 | 90309 | 130 | 11394 | 180 | 25527 | 230 | 36173 |
| 31 | 49136 | 81 | 90849 | 131 | 11727 | 181 | 25768 | 231 | 36361 |
| 32 | 50515 | 82 | 91381 | 132 | 12057 | 182 | 26007 | 232 | 36549 |
| 33 | 51851 | 83 | 91908 | 133 | 12385 | 183 | 26245 | 233 | 36736 |
| 34 | 53148 | 84 | 92428 | 134 | 12710 | 184 | 26482 | 234 | 36922 |
| 35 | 54407 | 85 | 92942 | 135 | 13033 | 185 | 26717 | 235 | 37107 |
| 36 | 55630 | 86 | 93450 | 136 | 13354 | 186 | 26951 | 236 | 37291 |
| 37 | 56820 | 87 | 93952 | 137 | 13672 | 187 | 27184 | 237 | 37475 |
| 38 | 57978 | 88 | 94448 | 138 | 13988 | 188 | 27416 | 238 | 37658 |
| 39 | 59106 | 89 | 94939 | 139 | 14301 | 189 | 27646 | 239 | 37840 |
| 40 | 60206 | 90 | 95424 | 140 | 14613 | 190 | 27875 | 240 | 38021 |
| 41 | 61278 | 91 | 95904 | 141 | 14922 | 191 | 28103 | 241 | 38202 |
| 42 | 62325 | 92 | 96379 | 142 | 15229 | 192 | 28330 | 242 | 38382 |
| 43 | 63347 | 93 | 96848 | 143 | 15534 | 193 | 28556 | 243 | 38561 |
| 44 | 64345 | 94 | 97313 | 144 | 15836 | 194 | 28780 | 244 | 38739 |
| 45 | 65321 | 95 | 97772 | 145 | 16137 | 195 | 29003 | 245 | 38917 |
| 46 | 66276 | 96 | 98227 | 146 | 16435 | 196 | 29226 | 246 | 39094 |
| 47 | 67210 | 97 | 98677 | 147 | 16732 | 197 | 29447 | 247 | 39270 |
| 48 | 68124 | 98 | 99123 | 148 | 17026 | 198 | 29667 | 248 | 39445 |
| 49 | 69020 | 99 | 99564 | 149 | 17319 | 199 | 29885 | 249 | 39620 |
| 50 | 69897 | 100 | 00000 | 150 | 17609 | 200 | 30103 | 250 | 39794 |

| N. | Log. | N. | Log. | N. | Log. | N. | Log. | N. | Log. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 251 | 39967 | 301 | 47857 | 351 | 54531 | 401 | 60314 | 451 | 65418 |
| 252 | 40140 | 302 | 48001 | 352 | 54654 | 402 | 60423 | 452 | 65514 |
| 253 | 40312 | 303 | 48144 | 353 | 54777 | 403 | 60531 | 453 | 65610 |
| 254 | 40483 | 304 | 48287 | 354 | 54900 | 404 | 60638 | 454 | 65706 |
| 255 | 40654 | 305 | 48430 | 355 | 55023 | 405 | 60746 | 455 | 65801 |
| 256 | 40824 | 306 | 48572 | 356 | 55145 | 406 | 60853 | 456 | 65898 |
| 257 | 40993 | 307 | 48714 | 357 | 55267 | 407 | 60959 | 457 | 65992 |
| 258 | 41162 | 308 | 48855 | 358 | 55388 | 408 | 61066 | 458 | 66087 |
| 259 | 41330 | 309 | 48996 | 359 | 55509 | 409 | 61172 | 459 | 66181 |
| 260 | 41497 | 310 | 49136 | 360 | 55630 | 410 | 61278 | 460 | 66276 |
| 261 | 41664 | 311 | 49276 | 361 | 55751 | 411 | 61384 | 461 | 66370 |
| 262 | 41830 | 312 | 49415 | 362 | 55871 | 412 | 61490 | 462 | 66464 |
| 263 | 41996 | 313 | 49554 | 363 | 55991 | 413 | 61595 | 463 | 66558 |
| 264 | 42160 | 314 | 49693 | 364 | 56110 | 414 | 61700 | 464 | 66652 |
| 265 | 42325 | 315 | 49831 | 365 | 56229 | 415 | 61805 | 465 | 66745 |
| 266 | 42488 | 316 | 49969 | 366 | 56348 | 416 | 61909 | 466 | 66839 |
| 267 | 42651 | 317 | 50106 | 367 | 56467 | 417 | 62014 | 467 | 66932 |
| 268 | 42813 | 318 | 50243 | 368 | 56585 | 418 | 62118 | 468 | 67025 |
| 269 | 42975 | 319 | 50379 | 369 | 56703 | 419 | 62221 | 469 | 67117 |
| 270 | 43136 | 320 | 50515 | 370 | 56820 | 420 | 62325 | 470 | 67210 |
| 271 | 43297 | 321 | 50651 | 371 | 56937 | 421 | 62428 | 471 | 67302 |
| 272 | 43457 | 322 | 50786 | 372 | 57054 | 422 | 62531 | 472 | 67394 |
| 273 | 43616 | 323 | 50920 | 373 | 57171 | 423 | 62634 | 473 | 67486 |
| 274 | 43775 | 324 | 51055 | 374 | 57287 | 424 | 62737 | 474 | 67578 |
| 275 | 43933 | 325 | 51188 | 375 | 57403 | 425 | 62839 | 475 | 67669 |
| 276 | 44091 | 326 | 51322 | 376 | 57519 | 426 | 62941 | 476 | 67761 |
| 277 | 44248 | 327 | 51455 | 377 | 57634 | 427 | 63043 | 477 | 67852 |
| 278 | 44404 | 328 | 51587 | 378 | 57749 | 428 | 63144 | 478 | 67943 |
| 279 | 44560 | 329 | 51720 | 379 | 57864 | 429 | 63246 | 479 | 68034 |
| 280 | 44716 | 330 | 51851 | 380 | 57978 | 430 | 63347 | 480 | 68124 |
| 281 | 44871 | 331 | 51983 | 381 | 58092 | 431 | 63448 | 481 | 68215 |
| 282 | 45025 | 332 | 52114 | 382 | 58206 | 432 | 63548 | 482 | 68305 |
| 283 | 45179 | 333 | 52244 | 383 | 58320 | 433 | 63649 | 483 | 68395 |
| 284 | 45332 | 334 | 52375 | 384 | 58433 | 434 | 63749 | 484 | 68485 |
| 285 | 45484 | 335 | 52504 | 385 | 58546 | 435 | 63849 | 485 | 68574 |
| 286 | 45637 | 336 | 52634 | 386 | 58659 | 436 | 63949 | 486 | 68664 |
| 287 | 45788 | 337 | 52763 | 387 | 58771 | 437 | 64048 | 487 | 68753 |
| 288 | 45939 | 338 | 52892 | 388 | 58883 | 438 | 64147 | 488 | 68842 |
| 289 | 46090 | 339 | 53020 | 389 | 58995 | 439 | 64246 | 489 | 68931 |
| 290 | 46240 | 340 | 53148 | 390 | 59106 | 440 | 64345 | 490 | 69020 |
| 291 | 46389 | 341 | 53275 | 391 | 59218 | 441 | 64444 | 491 | 69108 |
| 292 | 46538 | 342 | 53403 | 392 | 59329 | 442 | 64542 | 492 | 69197 |
| 293 | 46687 | 343 | 53529 | 393 | 59439 | 443 | 64640 | 493 | 69285 |
| 294 | 46835 | 344 | 53656 | 394 | 59550 | 444 | 64738 | 494 | 69373 |
| 295 | 46982 | 345 | 53782 | 395 | 59660 | 445 | 64836 | 495 | 69461 |
| 296 | 47129 | 346 | 53908 | 396 | 59770 | 446 | 64933 | 496 | 69548 |
| 297 | 47276 | 347 | 54033 | 397 | 59879 | 447 | 65031 | 497 | 69636 |
| 298 | 47422 | 348 | 54158 | 398 | 59988 | 448 | 65128 | 498 | 69723 |
| 299 | 47567 | 349 | 54283 | 399 | 60097 | 449 | 65225 | 499 | 69810 |
| 300 | 47712 | 350 | 54407 | 400 | 60206 | 450 | 65321 | 500 | 69897 |

| N. | Log. | N. | Log. | N. | Log. | N. | Log. | N. | Log. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 501 | 69984 | 551 | 74115 | 601 | 77887 | 651 | 81358 | 701 | 84572 |
| 502 | 70070 | 552 | 74194 | 602 | 77960 | 652 | 81425 | 702 | 84634 |
| 503 | 70157 | 553 | 74273 | 603 | 78032 | 653 | 81491 | 703 | 84696 |
| 504 | 70243 | 554 | 74351 | 604 | 78104 | 654 | 81558 | 704 | 84757 |
| 505 | 70329 | 555 | 74429 | 605 | 78176 | 655 | 81624 | 705 | 84819 |
| 506 | 70415 | 556 | 74507 | 606 | 78247 | 656 | 81690 | 706 | 84880 |
| 507 | 70501 | 557 | 74586 | 607 | 78319 | 657 | 81757 | 707 | 84942 |
| 508 | 70586 | 558 | 74663 | 608 | 78390 | 658 | 81823 | 708 | 85003 |
| 509 | 70672 | 559 | 74741 | 609 | 78462 | 659 | 81889 | 709 | 85065 |
| 510 | 70757 | 560 | 74819 | 610 | 78533 | 660 | 81954 | 710 | 85126 |
| 511 | 70842 | 561 | 74896 | 611 | 78604 | 661 | 82020 | 711 | 85187 |
| 512 | 70927 | 562 | 74974 | 612 | 78675 | 662 | 82086 | 712 | 85248 |
| 513 | 71012 | 563 | 75051 | 613 | 78746 | 663 | 82151 | 713 | 85309 |
| 514 | 71096 | 564 | 75128 | 614 | 78817 | 664 | 82217 | 714 | 85370 |
| 515 | 71181 | 565 | 75205 | 615 | 78888 | 665 | 82282 | 715 | 85431 |
| 516 | 71265 | 566 | 75282 | 616 | 78958 | 666 | 82347 | 716 | 85491 |
| 517 | 71349 | 567 | 75358 | 617 | 79029 | 667 | 82413 | 717 | 85552 |
| 518 | 71433 | 568 | 75435 | 618 | 79099 | 668 | 82478 | 718 | 85612 |
| 519 | 71517 | 569 | 75511 | 619 | 79169 | 669 | 82543 | 719 | 85673 |
| 520 | 71600 | 570 | 75587 | 620 | 79239 | 670 | 82607 | 720 | 85733 |
| 521 | 71684 | 571 | 75664 | 621 | 79309 | 671 | 82672 | 721 | 85794 |
| 522 | 71767 | 572 | 75740 | 622 | 79379 | 672 | 82737 | 722 | 85854 |
| 523 | 71850 | 573 | 75815 | 623 | 79449 | 673 | 82802 | 723 | 85914 |
| 524 | 71933 | 574 | 75891 | 624 | 79518 | 674 | 82866 | 724 | 85974 |
| 525 | 72016 | 575 | 75967 | 625 | 79588 | 675 | 82930 | 725 | 86034 |
| 526 | 72099 | 576 | 76042 | 626 | 79657 | 676 | 82995 | 726 | 86094 |
| 527 | 72181 | 577 | 76118 | 627 | 79727 | 677 | 83059 | 727 | 86153 |
| 528 | 72263 | 578 | 76193 | 628 | 79796 | 678 | 83123 | 728 | 86213 |
| 529 | 72346 | 579 | 76268 | 629 | 79865 | 679 | 83187 | 729 | 86273 |
| 530 | 72428 | 580 | 76343 | 630 | 79934 | 680 | 83251 | 730 | 86332 |
| 531 | 72509 | 581 | 76418 | 631 | 80003 | 681 | 83315 | 731 | 86392 |
| 532 | 72591 | 582 | 76492 | 632 | 80072 | 682 | 83378 | 732 | 86451 |
| 533 | 72673 | 583 | 76567 | 633 | 80140 | 683 | 83442 | 733 | 86510 |
| 534 | 72754 | 584 | 76641 | 634 | 80209 | 684 | 83506 | 734 | 86570 |
| 535 | 72835 | 585 | 76716 | 635 | 80277 | 685 | 83569 | 735 | 86629 |
| 536 | 72916 | 586 | 76790 | 636 | 80346 | 686 | 83632 | 736 | 86688 |
| 537 | 72997 | 587 | 76864 | 637 | 80414 | 687 | 83696 | 737 | 86747 |
| 538 | 73078 | 588 | 76938 | 638 | 80482 | 688 | 83759 | 738 | 86806 |
| 539 | 73159 | 589 | 77012 | 639 | 80550 | 689 | 83822 | 739 | 86864 |
| 540 | 73239 | 590 | 77085 | 640 | 80618 | 690 | 83885 | 740 | 86923 |
| 541 | 73320 | 591 | 77159 | 641 | 80686 | 691 | 83948 | 741 | 86982 |
| 542 | 73400 | 592 | 77232 | 642 | 80754 | 692 | 84011 | 742 | 87040 |
| 543 | 73480 | 593 | 77305 | 643 | 80821 | 693 | 84073 | 743 | 87099 |
| 544 | 73560 | 594 | 77379 | 644 | 80889 | 694 | 84136 | 744 | 87157 |
| 545 | 73640 | 595 | 77452 | 645 | 80956 | 695 | 84198 | 745 | 87216 |
| 546 | 73719 | 596 | 77525 | 646 | 81023 | 696 | 84261 | 746 | 87274 |
| 547 | 73799 | 597 | 77597 | 647 | 81090 | 697 | 84323 | 747 | 87332 |
| 548 | 73878 | 598 | 77670 | 648 | 81158 | 698 | 84386 | 748 | 87390 |
| 549 | 73957 | 599 | 77743 | 649 | 81224 | 699 | 84448 | 749 | 87448 |
| 550 | 74036 | 600 | 77815 | 650 | 81291 | 700 | 84510 | 750 | 87506 |

| N. | Log. | N. | Log. | N. | Log. | N. | Log. | N. | Log. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 751 | 87564 | 801 | 90363 | 851 | 92993 | 901 | 95472 | 951 | 97818 |
| 752 | 87622 | 802 | 90417 | 852 | 93044 | 902 | 95521 | 952 | 97864 |
| 753 | 87679 | 803 | 90472 | 853 | 93095 | 903 | 95569 | 953 | 97909 |
| 754 | 87737 | 804 | 90526 | 854 | 93146 | 904 | 95617 | 954 | 97955 |
| 755 | 87795 | 805 | 90580 | 855 | 93197 | 905 | 95665 | 955 | 98000 |
| 756 | 87852 | 806 | 90634 | 856 | 93247 | 906 | 95713 | 956 | 98046 |
| 757 | 87910 | 807 | 90687 | 857 | 93298 | 907 | 95761 | 957 | 98091 |
| 758 | 87967 | 808 | 90741 | 858 | 93349 | 908 | 95809 | 958 | 98137 |
| 759 | 88024 | 809 | 90795 | 859 | 93399 | 909 | 95856 | 959 | 98182 |
| 760 | 88081 | 810 | 90849 | 860 | 93450 | 910 | 95904 | 960 | 98227 |
| 761 | 88138 | 811 | 90902 | 861 | 93500 | 911 | 95952 | 961 | 98272 |
| 762 | 88195 | 812 | 90956 | 862 | 93551 | 912 | 95999 | 962 | 98318 |
| 763 | 88252 | 813 | 91009 | 863 | 93601 | 913 | 96047 | 963 | 98363 |
| 764 | 88309 | 814 | 91062 | 864 | 93651 | 914 | 96095 | 964 | 98408 |
| 765 | 88366 | 815 | 91116 | 865 | 93702 | 915 | 96142 | 965 | 98453 |
| 766 | 88423 | 816 | 91169 | 866 | 93752 | 916 | 96190 | 966 | 98498 |
| 767 | 88480 | 817 | 91222 | 867 | 93802 | 917 | 96237 | 967 | 98543 |
| 768 | 88536 | 818 | 91275 | 868 | 93852 | 918 | 96284 | 968 | 98588 |
| 769 | 88593 | 819 | 91328 | 869 | 93902 | 919 | 96332 | 969 | 98632 |
| 770 | 88649 | 820 | 91381 | 870 | 93952 | 920 | 96379 | 970 | 98677 |
| 771 | 88705 | 821 | 91434 | 871 | 94002 | 921 | 96426 | 971 | 98722 |
| 772 | 88762 | 822 | 91487 | 872 | 94052 | 922 | 96473 | 972 | 98767 |
| 773 | 88818 | 823 | 91540 | 873 | 94101 | 923 | 96520 | 973 | 98811 |
| 774 | 88874 | 824 | 91593 | 874 | 94151 | 924 | 96567 | 974 | 98856 |
| 775 | 88930 | 825 | 91645 | 875 | 94201 | 925 | 96614 | 975 | 98900 |
| 776 | 88986 | 826 | 91698 | 876 | 94250 | 926 | 96661 | 976 | 98945 |
| 777 | 89042 | 827 | 91751 | 877 | 94300 | 927 | 96708 | 977 | 98989 |
| 778 | 89098 | 828 | 91803 | 878 | 94349 | 928 | 96755 | 978 | 99034 |
| 779 | 89154 | 829 | 91855 | 879 | 94399 | 929 | 96802 | 979 | 99078 |
| 780 | 89209 | 830 | 91908 | 880 | 94448 | 930 | 96848 | 980 | 99123 |
| 781 | 89265 | 831 | 91960 | 881 | 94498 | 931 | 96895 | 981 | 99167 |
| 782 | 89321 | 832 | 92012 | 882 | 94547 | 932 | 96942 | 982 | 99211 |
| 783 | 89376 | 833 | 92065 | 883 | 94596 | 933 | 96988 | 983 | 99255 |
| 784 | 89432 | 834 | 92117 | 884 | 94645 | 934 | 97035 | 984 | 99300 |
| 785 | 89487 | 835 | 92169 | 885 | 94694 | 935 | 97081 | 985 | 99344 |
| 786 | 89542 | 836 | 92221 | 886 | 94743 | 936 | 97128 | 986 | 99388 |
| 787 | 89597 | 837 | 92273 | 887 | 94792 | 937 | 97174 | 987 | 99432 |
| 788 | 89653 | 838 | 92324 | 888 | 94841 | 938 | 97220 | 988 | 99476 |
| 789 | 89708 | 839 | 92376 | 889 | 94890 | 939 | 97267 | 989 | 99520 |
| 790 | 89763 | 840 | 92428 | 890 | 94939 | 940 | 97313 | 990 | 99564 |
| 791 | 89818 | 841 | 92480 | 891 | 94988 | 941 | 97359 | 991 | 99607 |
| 792 | 89873 | 842 | 92531 | 892 | 95036 | 942 | 97405 | 992 | 99651 |
| 793 | 89927 | 843 | 92583 | 893 | 95085 | 943 | 97451 | 993 | 99695 |
| 794 | 89982 | 844 | 92634 | 894 | 95134 | 944 | 97497 | 994 | 99739 |
| 795 | 90037 | 845 | 92686 | 895 | 95182 | 945 | 97543 | 995 | 99782 |
| 796 | 90091 | 846 | 92737 | 896 | 95231 | 946 | 97589 | 996 | 99826 |
| 797 | 90146 | 847 | 92788 | 897 | 95279 | 947 | 97635 | 997 | 99870 |
| 798 | 90200 | 848 | 92840 | 898 | 95328 | 948 | 97681 | 998 | 99913 |
| 799 | 90255 | 849 | 92891 | 899 | 95376 | 949 | 97727 | 999 | 99957 |
| 800 | 90309 | 850 | 92942 | 900 | 95424 | 950 | 97772 | 1000 | 00000 |

| N. | Log. | D | N. | Log. | D | N. | Log. | D | N. | Log | D | N. | Log. | D |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1001 | 00043 | 43 | 1051 | 02160 | 41 | 1101 | 04179 | 40 | 1151 | 06198 | 38 | 1201 | 07954 | 36 |
| 1002 | 00087 | 43 | 1052 | 02202 | 42 | 1102 | 04218 | 39 | 1152 | 06145 | 37 | 1202 | 07990 | 36 |
| 1003 | 00130 | 43 | 1053 | 02243 | 41 | 1103 | 04258 | 40 | 1153 | 06183 | 38 | 1203 | 08027 | 37 |
| 1004 | 00173 | 43 | 1054 | 02284 | 41 | 1104 | 04297 | 39 | 1154 | 06221 | 38 | 1204 | 08063 | 36 |
| 1005 | 00217 | 44 | 1055 | 02325 | 41 | 1105 | 04336 | 39 | 1155 | 06258 | 37 | 1205 | 08099 | 36 |
| 1006 | 00260 | 43 | 1056 | 02366 | 41 | 1106 | 04376 | 40 | 1156 | 06296 | 38 | 1206 | 08135 | 36 |
| 1007 | 00303 | 43 | 1057 | 02407 | 41 | 1107 | 04415 | 39 | 1157 | 06333 | 37 | 1207 | 08171 | 36 |
| 1008 | 00346 | 43 | 1058 | 02449 | 42 | 1108 | 04454 | 39 | 1158 | 06371 | 38 | 1208 | 08207 | 36 |
| 1009 | 00389 | 43 | 1059 | 02490 | 41 | 1109 | 04493 | 39 | 1159 | 06408 | 37 | 1209 | 08243 | 36 |
| 1010 | 00432 | 43 | 1060 | 02531 | 41 | 1110 | 04532 | 39 | 1160 | 06446 | 38 | 1210 | 08279 | 36 |
| 1011 | 00475 | 43 | 1061 | 02572 | 41 | 1111 | 04571 | 39 | 1161 | 06483 | 38 | 1211 | 08314 | 35 |
| 1012 | 00518 | 43 | 1062 | 02612 | 40 | 1112 | 04610 | 39 | 1162 | 06521 | 37 | 1212 | 08350 | 36 |
| 1013 | 00561 | 43 | 1063 | 02653 | 41 | 1113 | 04650 | 40 | 1163 | 06558 | 37 | 1213 | 08386 | 36 |
| 1014 | 00604 | 43 | 1064 | 02694 | 41 | 1114 | 04689 | 39 | 1164 | 06595 | 37 | 1214 | 08422 | 36 |
| 1015 | 00647 | 43 | 1065 | 02735 | 41 | 1115 | 04727 | 38 | 1165 | 06633 | 38 | 1215 | 08458 | 36 |
| 1016 | 00689 | 42 | 1066 | 02776 | 41 | 1116 | 04766 | 39 | 1166 | 06670 | 37 | 1216 | 08493 | 35 |
| 1017 | 00732 | 43 | 1067 | 02816 | 40 | 1117 | 04805 | 39 | 1167 | 06707 | 37 | 1217 | 08529 | 36 |
| 1018 | 00775 | 43 | 1068 | 02857 | 41 | 1118 | 04844 | 39 | 1168 | 06744 | 37 | 1218 | 08565 | 36 |
| 1019 | 00817 | 42 | 1069 | 02898 | 41 | 1119 | 04883 | 39 | 1169 | 06781 | 37 | 1219 | 08600 | 35 |
| 1020 | 00860 | 43 | 1070 | 02938 | 40 | 1120 | 04922 | 39 | 1170 | 06819 | 38 | 1220 | 08636 | 36 |
| 1021 | 00903 | 43 | 1071 | 02979 | 41 | 1121 | 04961 | 39 | 1171 | 06856 | 37 | 1221 | 08672 | 36 |
| 1022 | 00945 | 42 | 1072 | 03019 | 40 | 1122 | 04999 | 38 | 1172 | 06893 | 37 | 1222 | 08707 | 35 |
| 1023 | 00988 | 43 | 1073 | 03060 | 41 | 1123 | 05038 | 39 | 1173 | 06930 | 37 | 1223 | 08743 | 36 |
| 1024 | 01030 | 42 | 1074 | 03100 | 40 | 1124 | 05077 | 39 | 1174 | 06967 | 37 | 1224 | 08778 | 35 |
| 1025 | 01072 | 42 | 1075 | 03141 | 41 | 1125 | 05115 | 38 | 1175 | 07004 | 37 | 1225 | 08814 | 36 |
| 1026 | 01115 | 43 | 1076 | 03181 | 40 | 1126 | 05154 | 39 | 1176 | 07041 | 37 | 1226 | 08849 | 35 |
| 1027 | 01157 | 42 | 1077 | 03222 | 41 | 1127 | 05192 | 38 | 1177 | 07078 | 37 | 1227 | 08884 | 35 |
| 1028 | 01199 | 42 | 1078 | 03262 | 40 | 1128 | 05231 | 39 | 1178 | 07115 | 37 | 1228 | 08920 | 36 |
| 1029 | 01242 | 43 | 1079 | 03302 | 40 | 1129 | 05269 | 38 | 1179 | 07151 | 36 | 1229 | 08955 | 35 |
| 1030 | 01284 | 42 | 1080 | 03342 | 40 | 1130 | 05308 | 39 | 1180 | 07188 | 37 | 1230 | 08991 | 36 |
| 1031 | 01326 | 42 | 1081 | 03383 | 41 | 1131 | 05346 | 38 | 1181 | 07225 | 37 | 1231 | 09026 | 35 |
| 1032 | 01368 | 42 | 1082 | 03423 | 40 | 1132 | 05385 | 39 | 1182 | 07262 | 37 | 1232 | 09061 | 35 |
| 1033 | 01410 | 42 | 1083 | 03463 | 40 | 1133 | 05423 | 38 | 1183 | 07298 | 36 | 1233 | 09096 | 35 |
| 1034 | 01452 | 42 | 1084 | 03503 | 40 | 1134 | 05461 | 38 | 1184 | 07335 | 37 | 1234 | 09132 | 36 |
| 1035 | 01494 | 42 | 1085 | 03543 | 40 | 1135 | 05500 | 39 | 1185 | 07372 | 37 | 1235 | 09167 | 35 |
| 1036 | 01536 | 42 | 1086 | 03583 | 40 | 1136 | 05538 | 38 | 1186 | 07408 | 36 | 1236 | 09202 | 35 |
| 1037 | 01578 | 42 | 1087 | 03623 | 40 | 1137 | 05576 | 38 | 1187 | 07445 | 37 | 1237 | 09237 | 35 |
| 1038 | 01620 | 42 | 1088 | 03663 | 40 | 1138 | 05614 | 38 | 1188 | 07482 | 37 | 1238 | 09272 | 35 |
| 1039 | 01662 | 42 | 1089 | 03703 | 40 | 1139 | 05652 | 38 | 1189 | 07518 | 36 | 1239 | 09307 | 35 |
| 1040 | 01703 | 41 | 1090 | 03743 | 40 | 1140 | 05690 | 38 | 1190 | 07555 | 37 | 1240 | 09342 | 35 |
| 1041 | 01745 | 42 | 1091 | 03782 | 39 | 1141 | 05729 | 39 | 1191 | 07591 | 36 | 1241 | 09377 | 35 |
| 1042 | 01787 | 42 | 1092 | 03822 | 40 | 1142 | 05767 | 38 | 1192 | 07628 | 37 | 1242 | 09412 | 35 |
| 1043 | 01828 | 41 | 1093 | 03862 | 40 | 1143 | 05805 | 38 | 1193 | 07664 | 36 | 1243 | 09447 | 35 |
| 1044 | 01870 | 42 | 1094 | 03902 | 40 | 1144 | 05843 | 38 | 1194 | 07700 | 36 | 1244 | 09482 | 35 |
| 1045 | 01912 | 42 | 1095 | 03941 | 39 | 1145 | 05881 | 38 | 1195 | 07737 | 37 | 1245 | 09517 | 35 |
| 1046 | 01953 | 41 | 1096 | 03981 | 40 | 1146 | 05918 | 37 | 1196 | 07773 | 36 | 1246 | 09552 | 35 |
| 1047 | 01995 | 42 | 1097 | 04021 | 40 | 1147 | 05956 | 38 | 1197 | 07809 | 36 | 1247 | 09587 | 35 |
| 1048 | 02036 | 41 | 1098 | 04060 | 39 | 1148 | 05994 | 38 | 1198 | 07846 | 37 | 1248 | 09621 | 34 |
| 1049 | 02078 | 42 | 1099 | 04100 | 40 | 1149 | 06032 | 38 | 1199 | 07882 | 36 | 1249 | 09656 | 35 |
| 1050 | 02119 | 41 | 1100 | 04139 | 39 | 1150 | 06070 | 38 | 1200 | 07918 | 36 | 1250 | 09691 | 35 |

| N. | Log. | D | N. | Log. | D | N. | Log. | D | N. | Log. | D | N. | Log. | D |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1251 | 09726 | 35 | 1301 | 11428 | 34 | 1351 | 13066 | 33 | 1401 | 14644 | 31 | 1451 | 16167 | 30 |
| 1252 | 09760 | 34 | 1302 | 11461 | 33 | 1352 | 13098 | 32 | 1402 | 14675 | 31 | 1452 | 16197 | 30 |
| 1253 | 09795 | 35 | 1303 | 11494 | 33 | 1353 | 13130 | 32 | 1403 | 14706 | 31 | 1453 | 16227 | 30 |
| 1254 | 09830 | 35 | 1304 | 11528 | 34 | 1354 | 13162 | 32 | 1404 | 14737 | 31 | 1454 | 16256 | 29 |
| 1255 | 09864 | 34 | 1305 | 11561 | 33 | 1355 | 13194 | 32 | 1405 | 14768 | 31 | 1455 | 16286 | 30 |
| | | 35 | | | 33 | | | 32 | | | 31 | | | 30 |
| 1256 | 09899 | 35 | 1306 | 11594 | 34 | 1356 | 13226 | 32 | 1406 | 14799 | 30 | 1456 | 16316 | 30 |
| 1257 | 09934 | 34 | 1307 | 11628 | 33 | 1357 | 13258 | 32 | 1407 | 14829 | 31 | 1457 | 16346 | 30 |
| 1258 | 09968 | 34 | 1308 | 11661 | 33 | 1358 | 13290 | 32 | 1408 | 14860 | 31 | 1458 | 16376 | 30 |
| 1259 | 10003 | 35 | 1309 | 11694 | 33 | 1359 | 13322 | 32 | 1409 | 14891 | 31 | 1459 | 16406 | 30 |
| 1260 | 10037 | 34 | 1310 | 11727 | 33 | 1360 | 13354 | 32 | 1410 | 14922 | 31 | 1460 | 16435 | 29 |
| | | 35 | | | 33 | | | 32 | | | 31 | | | 30 |
| 1261 | 10072 | 34 | 1311 | 11760 | 33 | 1361 | 13386 | 32 | 1411 | 14953 | 30 | 1461 | 16465 | 30 |
| 1262 | 10106 | 34 | 1312 | 11793 | 33 | 1362 | 13418 | 32 | 1412 | 14983 | 31 | 1462 | 16495 | 30 |
| 1263 | 10140 | 34 | 1313 | 11826 | 33 | 1363 | 13450 | 32 | 1413 | 15014 | 31 | 1463 | 16524 | 29 |
| 1264 | 10175 | 35 | 1314 | 11860 | 34 | 1364 | 13481 | 31 | 1414 | 15045 | 31 | 1464 | 16554 | 30 |
| 1265 | 10209 | 34 | 1315 | 11893 | 33 | 1365 | 13513 | 32 | 1415 | 15076 | 31 | 1465 | 16584 | 30 |
| | | 34 | | | 33 | | | 32 | | | 30 | | | 29 |
| 1266 | 10243 | 35 | 1316 | 11926 | 33 | 1366 | 13545 | 32 | 1416 | 15106 | 31 | 1466 | 16613 | 30 |
| 1267 | 10278 | 34 | 1317 | 11959 | 33 | 1367 | 13577 | 32 | 1417 | 15137 | 31 | 1467 | 16643 | 30 |
| 1268 | 10312 | 34 | 1318 | 11992 | 32 | 1368 | 13609 | 31 | 1418 | 15168 | 30 | 1468 | 16673 | 29 |
| 1269 | 10346 | 34 | 1319 | 12024 | 33 | 1369 | 13640 | 32 | 1419 | 15198 | 31 | 1469 | 16702 | 30 |
| 1270 | 10380 | 34 | 1320 | 12057 | 33 | 1370 | 13672 | 32 | 1420 | 15229 | 30 | 1470 | 16732 | 29 |
| | | 35 | | | 33 | | | 32 | | | 30 | | | 29 |
| 1271 | 10415 | 34 | 1321 | 12090 | 33 | 1371 | 13704 | 31 | 1421 | 15259 | 31 | 1471 | 16761 | 30 |
| 1272 | 10449 | 34 | 1322 | 12123 | 33 | 1372 | 13735 | 32 | 1422 | 15290 | 30 | 1472 | 16791 | 29 |
| 1273 | 10483 | 34 | 1323 | 12156 | 33 | 1373 | 13767 | 32 | 1423 | 15320 | 31 | 1473 | 16820 | 30 |
| 1274 | 10517 | 34 | 1324 | 12189 | 33 | 1374 | 13799 | 32 | 1424 | 15351 | 30 | 1474 | 16850 | 29 |
| 1275 | 10551 | 34 | 1325 | 12222 | 32 | 1375 | 13830 | 31 | 1425 | 15381 | 30 | 1475 | 16879 | 29 |
| | | 34 | | | 33 | | | 32 | | | 31 | | | 30 |
| 1276 | 10585 | 34 | 1326 | 12254 | 33 | 1376 | 13862 | 32 | 1426 | 15412 | 30 | 1476 | 16909 | 29 |
| 1277 | 10619 | 34 | 1327 | 12287 | 33 | 1377 | 13893 | 31 | 1427 | 15442 | 31 | 1477 | 16938 | 29 |
| 1278 | 10653 | 34 | 1328 | 12320 | 32 | 1378 | 13925 | 32 | 1428 | 15473 | 30 | 1478 | 16967 | 29 |
| 1279 | 10687 | 34 | 1329 | 12352 | 33 | 1379 | 13956 | 31 | 1429 | 15503 | 30 | 1479 | 16997 | 30 |
| 1280 | 10721 | 34 | 1330 | 12385 | 33 | 1380 | 13988 | 32 | 1430 | 15534 | 31 | 1480 | 17026 | 29 |
| | | 34 | | | 33 | | | 31 | | | 30 | | | 30 |
| 1281 | 10755 | 34 | 1331 | 12418 | 32 | 1381 | 14019 | 32 | 1431 | 15564 | 30 | 1481 | 17056 | 29 |
| 1282 | 10789 | 34 | 1332 | 12450 | 33 | 1382 | 14051 | 31 | 1432 | 15594 | 30 | 1482 | 17085 | 29 |
| 1283 | 10823 | 34 | 1333 | 12483 | 33 | 1383 | 14082 | 32 | 1433 | 15625 | 31 | 1483 | 17114 | 29 |
| 1284 | 10857 | 34 | 1334 | 12516 | 32 | 1384 | 14114 | 32 | 1434 | 15655 | 30 | 1484 | 17143 | 29 |
| 1285 | 10890 | 33 | 1335 | 12548 | 32 | 1385 | 14145 | 31 | 1435 | 15685 | 30 | 1485 | 17173 | 30 |
| | | 34 | | | 33 | | | 31 | | | 30 | | | 29 |
| 1286 | 10924 | 34 | 1336 | 12581 | 32 | 1386 | 14176 | 32 | 1436 | 15715 | 31 | 1486 | 17202 | 29 |
| 1287 | 10958 | 34 | 1337 | 12613 | 33 | 1387 | 14208 | 31 | 1437 | 15746 | 30 | 1487 | 17231 | 29 |
| 1288 | 10992 | 34 | 1338 | 12646 | 32 | 1388 | 14239 | 31 | 1438 | 15776 | 30 | 1488 | 17260 | 29 |
| 1289 | 11025 | 33 | 1339 | 12678 | 32 | 1389 | 14270 | 31 | 1439 | 15806 | 30 | 1489 | 17289 | 29 |
| 1290 | 11059 | 34 | 1340 | 12710 | 33 | 1390 | 14301 | 31 | 1440 | 15836 | 30 | 1490 | 17319 | 30 |
| | | 34 | | | 33 | | | 32 | | | 30 | | | 29 |
| 1291 | 11093 | 33 | 1341 | 12743 | 32 | 1391 | 14333 | 31 | 1441 | 15866 | 31 | 1491 | 17348 | 29 |
| 1292 | 11126 | 34 | 1342 | 12775 | 33 | 1392 | 14364 | 31 | 1442 | 15897 | 30 | 1492 | 17377 | 29 |
| 1293 | 11160 | 33 | 1343 | 12808 | 32 | 1393 | 14395 | 31 | 1443 | 15927 | 30 | 1493 | 17406 | 29 |
| 1294 | 11193 | 34 | 1344 | 12840 | 32 | 1394 | 14426 | 31 | 1444 | 15957 | 30 | 1494 | 17435 | 29 |
| 1295 | 11227 | 34 | 1345 | 12872 | 33 | 1395 | 14457 | 32 | 1445 | 15987 | 30 | 1495 | 17464 | 29 |
| 1296 | 11261 | 33 | 1346 | 12905 | 32 | 1396 | 14489 | 31 | 1446 | 16017 | 30 | 1496 | 17493 | 29 |
| 1297 | 11294 | 33 | 1347 | 12937 | 32 | 1397 | 14520 | 31 | 1447 | 16047 | 30 | 1497 | 17522 | 29 |
| 1298 | 11327 | 34 | 1348 | 12969 | 32 | 1398 | 14551 | 31 | 1448 | 16077 | 30 | 1498 | 17551 | 29 |
| 1299 | 11361 | 33 | 1349 | 13001 | 32 | 1399 | 14582 | 31 | 1449 | 16107 | 30 | 1499 | 17580 | 29 |
| 1300 | 11394 | | 1350 | 13033 | | 1400 | 14613 | | 1450 | 16137 | | 1500 | 17609 | |

| N. | Log. | D | N. | Log. | D | N. | Log. | D | N. | Log. | D | N. | Log. | D |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1501 | 17638 | 29 | 1551 | 19061 | 28 | 1601 | 20439 | 27 | 1651 | 21575 | 27 | 1701 | 23070 | 25 |
| 1502 | 17667 | 29 | 1552 | 19089 | 28 | 1602 | 20466 | 27 | 1652 | 21601 | 26 | 1702 | 23096 | 26 |
| 1503 | 17696 | 29 | 1553 | 19117 | 28 | 1603 | 20493 | 27 | 1653 | 21827 | 26 | 1703 | 23121 | 25 |
| 1504 | 17725 | 29 | 1554 | 19145 | 28 | 1604 | 20520 | 27 | 1654 | 21854 | 27 | 1704 | 23147 | 26 |
| 1505 | 17754 | 29 | 1555 | 19173 | 28 | 1605 | 20548 | 28 | 1655 | 21880 | 26 | 1705 | 23172 | 25 |
| | | 28 | | | 28 | | | 27 | | | 26 | | | 26 |
| 1506 | 17782 | | 1556 | 19201 | | 1606 | 20575 | | 1656 | 21906 | | 1706 | 23198 | |
| 1507 | 17811 | 29 | 1557 | 19229 | 28 | 1607 | 20602 | 27 | 1657 | 21932 | 26 | 1707 | 23223 | 25 |
| 1508 | 17840 | 29 | 1558 | 19257 | 28 | 1608 | 20629 | 27 | 1658 | 21958 | 26 | 1708 | 23249 | 26 |
| 1509 | 17869 | 29 | 1559 | 19285 | 28 | 1609 | 20656 | 27 | 1659 | 21985 | 27 | 1709 | 23274 | 25 |
| 1510 | 17898 | 29 | 1560 | 19312 | 27 | 1610 | 20683 | 27 | 1660 | 22011 | 26 | 1710 | 23300 | 26 |
| | | 28 | | | 28 | | | | | | 26 | | | 25 |
| 1511 | 17926 | | 1561 | 19340 | | 1611 | 20710 | 27 | 1661 | 22037 | | 1711 | 23325 | |
| 1512 | 17955 | 29 | 1562 | 19368 | 28 | 1612 | 20737 | 27 | 1662 | 22063 | 26 | 1712 | 23350 | 25 |
| 1513 | 17984 | 29 | 1563 | 19396 | 28 | 1613 | 20763 | 26 | 1663 | 22089 | 26 | 1713 | 23376 | 26 |
| 1514 | 18013 | 29 | 1564 | 19424 | 28 | 1614 | 20790 | 27 | 1664 | 22115 | 26 | 1714 | 23401 | 25 |
| 1515 | 18041 | 28 | 1565 | 19451 | 27 | 1615 | 20817 | 27 | 1665 | 22141 | 26 | 1715 | 23426 | 25 |
| | | 29 | | | 28 | | | | | | 26 | | | 26 |
| 1516 | 18070 | | 1566 | 19479 | | 1616 | 20844 | 27 | 1666 | 22167 | | 1716 | 23452 | |
| 1517 | 18099 | 29 | 1567 | 19507 | 28 | 1617 | 20871 | 27 | 1667 | 22194 | 27 | 1717 | 23477 | 25 |
| 1518 | 18127 | 28 | 1568 | 19535 | 28 | 1618 | 20898 | 27 | 1668 | 22220 | 26 | 1718 | 23503 | 25 |
| 1519 | 18156 | 29 | 1569 | 19562 | 27 | 1619 | 20925 | 27 | 1669 | 22246 | 26 | 1719 | 23528 | 26 |
| 1520 | 18184 | 28 | 1570 | 19590 | 28 | 1620 | 20952 | 27 | 1670 | 22272 | 26 | 1720 | 23553 | 25 |
| | | 29 | | | 28 | | | 26 | | | 26 | | | 25 |
| 1521 | 18213 | | 1571 | 19618 | | 1621 | 20978 | | 1671 | 22298 | | 1721 | 23578 | |
| 1522 | 18241 | 28 | 1572 | 19645 | 27 | 1622 | 21005 | 27 | 1672 | 22324 | 26 | 1722 | 23603 | 25 |
| 1523 | 18270 | 29 | 1573 | 19673 | 28 | 1623 | 21032 | 27 | 1673 | 22350 | 26 | 1723 | 23629 | 26 |
| 1524 | 18298 | 28 | 1574 | 19700 | 27 | 1624 | 21059 | 27 | 1674 | 22376 | 26 | 1724 | 23654 | 25 |
| 1525 | 18327 | 29 | 1575 | 19728 | 28 | 1625 | 21085 | 26 | 1675 | 22401 | 25 | 1725 | 23679 | 25 |
| | | 28 | | | 28 | | | 27 | | | 26 | | | |
| 1526 | 18355 | | 1576 | 19756 | | 1626 | 21112 | | 1676 | 22427 | | 1726 | 23704 | 25 |
| 1527 | 18384 | 29 | 1577 | 19783 | 27 | 1627 | 21139 | 27 | 1677 | 22453 | 26 | 1727 | 23729 | 25 |
| 1528 | 18412 | 28 | 1578 | 19811 | 28 | 1628 | 21165 | 26 | 1678 | 22479 | 26 | 1728 | 23754 | 25 |
| 1529 | 18441 | 29 | 1579 | 19838 | 27 | 1629 | 21192 | 27 | 1679 | 22505 | 26 | 1729 | 23779 | 25 |
| 1530 | 18469 | 28 | 1580 | 19866 | 28 | 1630 | 21219 | 27 | 1680 | 22531 | 26 | 1730 | 23805 | 26 |
| | | 29 | | | 27 | | | 26 | | | 26 | | | 25 |
| 1531 | 18498 | | 1581 | 19893 | | 1631 | 21245 | | 1681 | 22557 | | 1731 | 23830 | |
| 1532 | 18526 | 28 | 1582 | 19921 | 28 | 1632 | 21272 | 27 | 1682 | 22583 | 26 | 1732 | 23855 | 25 |
| 1533 | 18554 | 28 | 1583 | 19948 | 27 | 1633 | 21299 | 27 | 1683 | 22608 | 25 | 1733 | 23880 | 25 |
| 1534 | 18583 | 29 | 1584 | 19976 | 28 | 1634 | 21325 | 26 | 1684 | 22634 | 26 | 1734 | 23905 | 25 |
| 1535 | 18611 | 28 | 1585 | 20003 | 27 | 1635 | 21352 | 27 | 1685 | 22660 | 26 | 1735 | 23930 | 25 |
| | | 28 | | | 27 | | | 26 | | | 26 | | | 25 |
| 1536 | 18639 | | 1586 | 20030 | | 1636 | 21378 | | 1686 | 22686 | | 1736 | 23955 | |
| 1537 | 18667 | 28 | 1587 | 20058 | 28 | 1637 | 21405 | 27 | 1687 | 22712 | 26 | 1737 | 23980 | 25 |
| 1538 | 18696 | 29 | 1588 | 20085 | 27 | 1638 | 21431 | 26 | 1688 | 22737 | 25 | 1738 | 24005 | 25 |
| 1539 | 18724 | 28 | 1589 | 20112 | 27 | 1639 | 21458 | 27 | 1689 | 22763 | 26 | 1739 | 24030 | 25 |
| 1540 | 18752 | 28 | 1590 | 20140 | 28 | 1640 | 21484 | 26 | 1690 | 22789 | 26 | 1740 | 24055 | 25 |
| | | 28 | | | 27 | | | 27 | | | 25 | | | 25 |
| 1541 | 18780 | | 1591 | 20167 | | 1641 | 21511 | | 1691 | 22814 | | 1741 | 24080 | |
| 1542 | 18808 | 28 | 1592 | 20194 | 27 | 1642 | 21537 | 26 | 1692 | 22840 | 26 | 1742 | 24105 | 25 |
| 1543 | 18837 | 29 | 1593 | 20222 | 28 | 1643 | 21564 | 27 | 1693 | 22866 | 26 | 1743 | 24130 | 25 |
| 1544 | 18865 | 28 | 1594 | 20249 | 27 | 1644 | 21590 | 26 | 1694 | 22891 | 25 | 1744 | 24155 | 25 |
| 1545 | 18893 | 28 | 1595 | 20276 | 27 | 1645 | 21617 | 27 | 1695 | 22917 | 26 | 1745 | 24180 | 25 |
| | | 28 | | | 27 | | | 26 | | | 26 | | | 24 |
| 1546 | 18921 | | 1596 | 20303 | | 1646 | 21643 | | 1696 | 22942 | | 1746 | 24204 | |
| 1547 | 18949 | 28 | 1597 | 20330 | 27 | 1647 | 21669 | 26 | 1697 | 22968 | 25 | 1747 | 24229 | 25 |
| 1548 | 18977 | 28 | 1598 | 20358 | 28 | 1648 | 21696 | 27 | 1698 | 22994 | 26 | 1748 | 24254 | 25 |
| 1549 | 19005 | 28 | 1599 | 20385 | 27 | 1649 | 21722 | 26 | 1699 | 23019 | 25 | 1749 | 24279 | 25 |
| 1550 | 19033 | 28 | 1600 | 20412 | 27 | 1650 | 21748 | 26 | 1700 | 23045 | 26 | 1750 | 24304 | 25 |

| N. | Log. | D | N. | Log. | D | N. | Log. | D | N. | Log. | D | N. | Log. | D |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1751 | 24329 | 25 | 1801 | 25551 | 24 | 1851 | 26741 | 24 | 1901 | 27898 | 23 | 1951 | 29026 | 23 |
| 1752 | 24353 | 24 | 1802 | 25575 | 24 | 1852 | 26764 | 23 | 1902 | 27921 | 23 | 1952 | 29048 | 22 |
| 1753 | 24378 | 25 | 1803 | 25600 | 25 | 1853 | 26788 | 24 | 1903 | 27944 | 23 | 1953 | 29070 | 22 |
| 1754 | 24403 | 25 | 1804 | 25624 | 24 | 1854 | 26811 | 23 | 1904 | 27967 | 23 | 1954 | 29092 | 22 |
| 1755 | 24428 | 25 | 1805 | 25648 | 24 | 1855 | 26834 | 23 | 1905 | 27989 | 22 | 1955 | 29115 | 23 |
| | | 24 | | | 24 | | | 24 | | | 23 | | | 22 |
| 1756 | 24452 | 25 | 1806 | 25673 | 24 | 1856 | 26858 | 23 | 1906 | 28012 | 23 | 1956 | 29137 | 22 |
| 1757 | 24477 | 25 | 1807 | 25696 | 24 | 1857 | 26881 | 23 | 1907 | 28035 | 23 | 1957 | 29159 | 22 |
| 1758 | 24502 | 25 | 1808 | 25720 | 24 | 1858 | 26905 | 24 | 1908 | 28058 | 23 | 1958 | 29181 | 22 |
| 1759 | 24527 | 24 | 1809 | 25744 | 24 | 1859 | 26928 | 23 | 1909 | 28081 | 22 | 1959 | 29203 | 23 |
| 1760 | 24551 | 25 | 1810 | 25768 | 24 | 1860 | 26951 | 23 | 1910 | 28103 | 23 | 1960 | 29226 | 22 |
| | | 25 | | | 24 | | | 24 | | | 23 | | | 22 |
| 1761 | 24576 | 25 | 1811 | 25792 | 24 | 1861 | 26975 | 23 | 1911 | 28126 | 23 | 1961 | 29248 | 22 |
| 1762 | 24601 | 24 | 1812 | 25816 | 24 | 1862 | 26998 | 23 | 1912 | 28149 | 22 | 1962 | 29270 | 22 |
| 1763 | 24625 | 25 | 1813 | 25840 | 24 | 1863 | 27021 | 24 | 1913 | 28171 | 23 | 1963 | 29292 | 22 |
| 1764 | 24650 | 24 | 1814 | 25864 | 24 | 1864 | 27045 | 23 | 1914 | 28194 | 23 | 1964 | 29314 | 22 |
| 1765 | 24674 | 25 | 1815 | 25888 | 24 | 1865 | 27068 | 23 | 1915 | 28217 | 23 | 1965 | 29336 | 22 |
| | | 25 | | | 24 | | | 23 | | | 23 | | | 22 |
| 1766 | 24699 | 25 | 1816 | 25912 | 23 | 1866 | 27091 | 23 | 1916 | 28240 | 22 | 1966 | 29358 | 22 |
| 1767 | 24724 | 24 | 1817 | 25935 | 24 | 1867 | 27114 | 24 | 1917 | 28262 | 23 | 1967 | 29380 | 23 |
| 1768 | 24748 | 25 | 1818 | 25959 | 24 | 1868 | 27138 | 23 | 1918 | 28285 | 22 | 1968 | 29403 | 22 |
| 1769 | 24773 | 24 | 1819 | 25983 | 24 | 1869 | 27161 | 23 | 1919 | 28307 | 23 | 1969 | 29425 | 22 |
| 1770 | 24797 | 25 | 1820 | 26007 | 24 | 1870 | 27184 | 23 | 1920 | 28330 | 23 | 1970 | 29447 | 22 |
| | | 24 | | | 24 | | | 24 | | | 22 | | | 22 |
| 1771 | 24822 | 24 | 1821 | 26031 | 24 | 1871 | 27207 | 23 | 1921 | 28353 | 22 | 1971 | 29469 | 22 |
| 1772 | 24846 | 25 | 1822 | 26055 | 24 | 1872 | 27231 | 23 | 1922 | 28375 | 23 | 1972 | 29491 | 22 |
| 1773 | 24871 | 24 | 1823 | 26079 | 23 | 1873 | 27254 | 23 | 1923 | 28398 | 23 | 1973 | 29513 | 22 |
| 1774 | 24895 | 25 | 1824 | 26102 | 24 | 1874 | 27277 | 23 | 1924 | 28421 | 22 | 1974 | 29535 | 22 |
| 1775 | 24920 | 24 | 1825 | 26126 | 24 | 1875 | 27300 | 23 | 1925 | 28443 | 23 | 1975 | 29557 | 22 |
| | | 25 | | | 24 | | | 23 | | | 23 | | | 22 |
| 1776 | 24944 | 25 | 1826 | 26150 | 24 | 1876 | 27323 | 23 | 1926 | 28466 | 22 | 1976 | 29579 | 22 |
| 1777 | 24969 | 24 | 1827 | 26174 | 24 | 1877 | 27346 | 24 | 1927 | 28488 | 23 | 1977 | 29601 | 22 |
| 1778 | 24993 | 25 | 1828 | 26198 | 23 | 1878 | 27370 | 23 | 1928 | 28511 | 22 | 1978 | 29623 | 22 |
| 1779 | 25018 | 24 | 1829 | 26221 | 24 | 1879 | 27393 | 23 | 1929 | 28533 | 23 | 1979 | 29645 | 22 |
| 1780 | 25042 | 24 | 1830 | 26245 | 24 | 1880 | 27416 | 23 | 1930 | 28556 | 22 | 1980 | 29667 | 21 |
| | | 24 | | | 24 | | | 22 | | | 23 | | | 22 |
| 1781 | 25066 | 25 | 1831 | 26269 | 24 | 1881 | 27439 | 23 | 1931 | 28578 | 23 | 1981 | 29688 | 22 |
| 1782 | 25091 | 24 | 1832 | 26293 | 23 | 1882 | 27462 | 23 | 1932 | 28601 | 22 | 1982 | 29710 | 22 |
| 1783 | 25115 | 24 | 1833 | 26316 | 24 | 1883 | 27485 | 23 | 1933 | 28623 | 23 | 1983 | 29732 | 22 |
| 1784 | 25139 | 25 | 1834 | 26340 | 24 | 1884 | 27508 | 23 | 1934 | 28646 | 22 | 1984 | 29754 | 22 |
| 1785 | 25164 | 24 | 1835 | 26364 | 24 | 1885 | 27531 | 23 | 1935 | 28668 | 23 | 1985 | 29776 | 22 |
| | | 24 | | | 23 | | | 23 | | | 23 | | | 22 |
| 1786 | 25188 | 24 | 1836 | 26387 | 24 | 1886 | 27554 | 23 | 1936 | 28691 | 22 | 1986 | 29798 | 22 |
| 1787 | 25212 | 25 | 1837 | 26411 | 24 | 1887 | 27577 | 23 | 1937 | 28713 | 22 | 1987 | 29820 | 22 |
| 1788 | 25237 | 24 | 1838 | 26435 | 23 | 1888 | 27600 | 23 | 1938 | 28735 | 23 | 1988 | 29842 | 21 |
| 1789 | 25261 | 24 | 1839 | 26458 | 24 | 1889 | 27623 | 23 | 1939 | 28758 | 22 | 1989 | 29863 | 22 |
| 1790 | 25285 | 25 | 1840 | 26482 | 23 | 1890 | 27646 | 23 | 1940 | 28780 | 23 | 1990 | 29885 | 22 |
| 1791 | 25310 | 24 | 1841 | 26505 | 24 | 1891 | 27669 | 23 | 1941 | 28803 | 22 | 1991 | 29907 | 22 |
| 1792 | 25334 | 24 | 1842 | 26529 | 24 | 1892 | 27692 | 23 | 1942 | 28825 | 22 | 1992 | 29929 | 22 |
| 1793 | 25358 | 24 | 1843 | 26553 | 23 | 1893 | 27715 | 23 | 1943 | 28847 | 23 | 1993 | 29951 | 22 |
| 1794 | 25382 | 24 | 1844 | 26576 | 24 | 1894 | 27738 | 23 | 1944 | 28870 | 22 | 1994 | 29973 | 21 |
| 1795 | 25406 | 25 | 1845 | 26600 | 23 | 1895 | 27761 | 23 | 1945 | 28892 | 22 | 1995 | 29994 | 22 |
| 1796 | 25431 | 24 | 1846 | 26623 | 24 | 1896 | 27784 | 23 | 1946 | 28914 | 23 | 1996 | 30016 | 22 |
| 1797 | 25455 | 24 | 1847 | 26647 | 23 | 1897 | 27807 | 23 | 1947 | 28937 | 22 | 1997 | 30038 | 22 |
| 1798 | 25479 | 24 | 1848 | 26670 | 24 | 1898 | 27830 | 22 | 1948 | 28959 | 23 | 1998 | 30060 | 21 |
| 1799 | 25503 | 24 | 1849 | 26694 | 23 | 1899 | 27852 | 23 | 1949 | 28981 | 22 | 1999 | 30081 | 22 |
| 1800 | 25527 | 24 | 1850 | 26717 | | 1900 | 27875 | | 1950 | 29003 | | 2000 | 30103 | |

| N. | Log. | D | N. | Log. | D | N. | Log. | D | N. | Log. | D | N. | Log. | D |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2001 | 30125 | 22 | 2051 | 31197 | 22 | 2101 | 32243 | 21 | 2151 | 33264 | 20 | 2201 | 34262 | 20 |
| 2002 | 30146 | 21 | 2052 | 31218 | 21 | 2102 | 32263 | 20 | 2152 | 33284 | 20 | 2202 | 34282 | 20 |
| 2003 | 30168 | 22 | 2053 | 31239 | 21 | 2103 | 32284 | 21 | 2153 | 33304 | 20 | 2203 | 34301 | 19 |
| 2004 | 30190 | 22 | 2054 | 31260 | 21 | 2104 | 32305 | 21 | 2154 | 33325 | 21 | 2204 | 34321 | 20 |
| 2005 | 30211 | 21 | 2055 | 31281 | 21 | 2105 | 32325 | 20 | 2155 | 33345 | 20 | 2205 | 34341 | 20 |
| | | 22 | | | 21 | | | 21 | | | 20 | | | 20 |
| 2006 | 30233 | | 2056 | 31302 | | 2106 | 32346 | | 2156 | 33365 | | 2206 | 34361 | |
| 2007 | 30255 | 22 | 2057 | 31323 | 21 | 2107 | 32366 | 20 | 2157 | 33385 | 20 | 2207 | 34380 | 19 |
| 2008 | 30276 | 21 | 2058 | 31345 | 22 | 2108 | 32387 | 21 | 2158 | 33405 | 20 | 2208 | 34400 | 20 |
| 2009 | 30298 | 22 | 2059 | 31366 | 21 | 2109 | 32408 | 21 | 2159 | 33425 | 20 | 2209 | 34420 | 20 |
| 2010 | 30320 | 22 | 2060 | 31387 | 21 | 2110 | 32428 | 20 | 2160 | 33445 | 20 | 2210 | 34439 | 19 |
| | | 21 | | | 21 | | | 21 | | | 20 | | | 20 |
| 2011 | 30341 | | 2061 | 31408 | | 2111 | 32449 | | 2161 | 33465 | | 2211 | 34459 | |
| 2012 | 30363 | 22 | 2062 | 31429 | 21 | 2112 | 32469 | 20 | 2162 | 33486 | 21 | 2212 | 34479 | 20 |
| 2013 | 30384 | 21 | 2063 | 31450 | 21 | 2113 | 32490 | 21 | 2163 | 33506 | 20 | 2213 | 34498 | 19 |
| 2014 | 30406 | 22 | 2064 | 31471 | 21 | 2114 | 32510 | 20 | 2164 | 33526 | 20 | 2214 | 34518 | 20 |
| 2015 | 30428 | 22 | 2065 | 31492 | 21 | 2115 | 32531 | 21 | 2165 | 33546 | 20 | 2215 | 34537 | 19 |
| | | 21 | | | 21 | | | 21 | | | 20 | | | 20 |
| 2016 | 30449 | | 2066 | 31513 | | 2116 | 32552 | | 2166 | 33566 | | 2216 | 34557 | |
| 2017 | 30471 | 22 | 2067 | 31534 | 21 | 2117 | 32572 | 20 | 2167 | 33586 | 20 | 2217 | 34577 | 20 |
| 2018 | 30492 | 21 | 2068 | 31555 | 21 | 2118 | 32593 | 21 | 2168 | 33606 | 20 | 2218 | 34596 | 19 |
| 2019 | 30514 | 22 | 2069 | 31576 | 21 | 2119 | 32613 | 20 | 2169 | 33626 | 20 | 2219 | 34616 | 20 |
| 2020 | 30535 | 21 | 2070 | 31597 | 21 | 2120 | 32634 | 21 | 2170 | 33646 | 20 | 2220 | 34635 | 19 |
| | | 22 | | | 21 | | | 20 | | | 20 | | | 20 |
| 2021 | 30557 | | 2071 | 31618 | | 2121 | 32654 | | 2171 | 33666 | | 2221 | 34655 | |
| 2022 | 30578 | 21 | 2072 | 31639 | 21 | 2122 | 32675 | 21 | 2172 | 33686 | 20 | 2222 | 34674 | 19 |
| 2023 | 30600 | 22 | 2073 | 31660 | 21 | 2123 | 32695 | 20 | 2173 | 33706 | 20 | 2223 | 34694 | 20 |
| 2024 | 30621 | 21 | 2074 | 31681 | 21 | 2124 | 32715 | 20 | 2174 | 33726 | 20 | 2224 | 34713 | 19 |
| 2025 | 30643 | 22 | 2075 | 31702 | 21 | 2125 | 32736 | 21 | 2175 | 33746 | 20 | 2225 | 34733 | 20 |
| | | 21 | | | 21 | | | 20 | | | 20 | | | 20 |
| 2026 | 30664 | | 2076 | 31723 | | 2126 | 32756 | | 2176 | 33766 | | 2226 | 34753 | |
| 2027 | 30685 | 21 | 2077 | 31744 | 21 | 2127 | 32777 | 21 | 2177 | 33786 | 20 | 2227 | 34772 | 19 |
| 2028 | 30707 | 22 | 2078 | 31765 | 21 | 2128 | 32797 | 20 | 2178 | 33806 | 20 | 2228 | 34792 | 20 |
| 2029 | 30728 | 21 | 2079 | 31785 | 20 | 2129 | 32818 | 21 | 2179 | 33826 | 20 | 2229 | 34811 | 19 |
| 2030 | 30750 | 22 | 2080 | 31806 | 21 | 2130 | 32838 | 20 | 2180 | 33846 | 20 | 2230 | 34830 | 19 |
| | | 21 | | | 21 | | | 20 | | | 20 | | | 20 |
| 2031 | 30771 | | 2081 | 31827 | | 2131 | 32858 | | 2181 | 33866 | | 2231 | 34850 | |
| 2032 | 30792 | 21 | 2082 | 31848 | 21 | 2132 | 32879 | 21 | 2182 | 33885 | 19 | 2232 | 34869 | 19 |
| 2033 | 30814 | 22 | 2083 | 31869 | 21 | 2133 | 32899 | 20 | 2183 | 33905 | 20 | 2233 | 34889 | 20 |
| 2034 | 30835 | 21 | 2084 | 31890 | 21 | 2134 | 32919 | 20 | 2184 | 33925 | 20 | 2234 | 34908 | 19 |
| 2035 | 30856 | 21 | 2085 | 31911 | 21 | 2135 | 32940 | 21 | 2185 | 33945 | 20 | 2235 | 34928 | 20 |
| | | 22 | | | 20 | | | 20 | | | 20 | | | 19 |
| 2036 | 30878 | | 2086 | 31931 | | 2136 | 32960 | | 2186 | 33965 | | 2236 | 34947 | |
| 2037 | 30899 | 21 | 2087 | 31952 | 21 | 2137 | 32980 | 20 | 2187 | 33985 | 20 | 2237 | 34967 | 20 |
| 2038 | 30920 | 21 | 2088 | 31973 | 21 | 2138 | 33001 | 21 | 2188 | 34005 | 20 | 2238 | 34986 | 19 |
| 2039 | 30942 | 22 | 2089 | 31994 | 21 | 2139 | 33021 | 20 | 2189 | 34025 | 20 | 2239 | 35005 | 19 |
| 2040 | 30963 | 21 | 2090 | 32015 | 20 | 2140 | 33041 | 20 | 2190 | 34044 | 19 | 2240 | 35025 | 20 |
| | | 21 | | | 21 | | | 21 | | | 20 | | | 19 |
| 2041 | 30984 | | 2091 | 32035 | | 2141 | 33062 | | 2191 | 34064 | | 2241 | 35044 | |
| 2042 | 31006 | 22 | 2092 | 32056 | 21 | 2142 | 33082 | 20 | 2192 | 34084 | 20 | 2242 | 35064 | 20 |
| 2043 | 31027 | 21 | 2093 | 32077 | 21 | 2143 | 33102 | 20 | 2193 | 34104 | 20 | 2243 | 35083 | 19 |
| 2044 | 31048 | 21 | 2094 | 32098 | 21 | 2144 | 33122 | 20 | 2194 | 34124 | 20 | 2244 | 35102 | 19 |
| 2045 | 31069 | 21 | 2095 | 32118 | 20 | 2145 | 33143 | 21 | 2195 | 34143 | 19 | 2245 | 35122 | 20 |
| | | 22 | | | 21 | | | 20 | | | 20 | | | 19 |
| 2046 | 31091 | | 2096 | 32139 | | 2146 | 33163 | | 2196 | 34163 | | 2246 | 35141 | |
| 2047 | 31112 | 21 | 2097 | 32160 | 21 | 2147 | 33183 | 20 | 2197 | 34183 | 20 | 2247 | 35160 | 19 |
| 2048 | 31133 | 21 | 2098 | 32181 | 21 | 2148 | 33203 | 20 | 2198 | 34203 | 20 | 2248 | 35180 | 20 |
| 2049 | 31154 | 21 | 2099 | 32201 | 20 | 2149 | 33224 | 21 | 2199 | 34223 | 20 | 2249 | 35199 | 19 |
| 2050 | 31175 | 21 | 2100 | 32222 | 21 | 2150 | 33244 | 20 | 2200 | 34242 | 19 | 2250 | 35218 | 19 |

| N | Log. | D | N. | Log. | D | N. | Log. | D | N. | Log. | D | N. | Log. | D |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2251 | 35238 | 20 | 2301 | 36192 | 19 | 2351 | 37125 | 18 | 2401 | 38039 | 18 | 2451 | 38934 | 17 |
| 2252 | 35257 | 19 | 2302 | 36211 | 19 | 2352 | 37144 | 19 | 2402 | 38057 | 18 | 2452 | 38952 | 18 |
| 2253 | 35276 | 19 | 2303 | 36229 | 18 | 2353 | 37162 | 18 | 2403 | 38075 | 18 | 2453 | 38970 | 18 |
| 2254 | 35295 | 19 | 2304 | 36248 | 19 | 2354 | 37181 | 19 | 2404 | 38093 | 18 | 2454 | 38987 | 17 |
| 2255 | 35315 | 20 | 2305 | 36267 | 19 | 2355 | 37199 | 18 | 2405 | 38112 | 19 | 2455 | 39005 | 18 |
| | | 19 | | | 19 | | | 19 | | | 18 | | | 18 |
| 2256 | 35334 | | 2306 | 36286 | | 2356 | 37218 | | 2406 | 38130 | | 2456 | 39023 | |
| 2257 | 35353 | 19 | 2307 | 36305 | 19 | 2357 | 37236 | 18 | 2407 | 38148 | 18 | 2457 | 39041 | 18 |
| 2258 | 35372 | 19 | 2308 | 36324 | 19 | 2358 | 37254 | 18 | 2408 | 38166 | 18 | 2458 | 39058 | 17 |
| 2259 | 35392 | 20 | 2309 | 36342 | 18 | 2359 | 37273 | 19 | 2409 | 38184 | 18 | 2459 | 39076 | 18 |
| 2260 | 35411 | 19 | 2310 | 36361 | 19 | 2360 | 37291 | 18 | 2410 | 38202 | 18 | 2460 | 39094 | 18 |
| | | 19 | | | 19 | | | 19 | | | 18 | | | 17 |
| 2261 | 35430 | | 2311 | 36380 | | 2361 | 37310 | | 2411 | 38220 | | 2461 | 39111 | |
| 2262 | 35449 | 19 | 2312 | 36399 | 19 | 2362 | 37328 | 18 | 2412 | 38238 | 18 | 2462 | 39129 | 18 |
| 2263 | 35468 | 19 | 2313 | 36418 | 19 | 2363 | 37346 | 18 | 2413 | 38256 | 18 | 2463 | 39146 | 17 |
| 2264 | 35488 | 20 | 2314 | 36436 | 18 | 2364 | 37365 | 19 | 2414 | 38274 | 18 | 2464 | 39164 | 18 |
| 2265 | 35507 | 19 | 2315 | 36455 | 19 | 2365 | 37383 | 18 | 2415 | 38292 | 18 | 2465 | 39182 | 18 |
| | | 19 | | | 19 | | | 18 | | | 18 | | | 17 |
| 2266 | 35526 | | 2316 | 36474 | | 2366 | 37401 | | 2416 | 38310 | | 2466 | 39199 | |
| 2267 | 35545 | 19 | 2317 | 36493 | 19 | 2367 | 37420 | 19 | 2417 | 38328 | 18 | 2467 | 39217 | 18 |
| 2268 | 35564 | 19 | 2318 | 36511 | 18 | 2368 | 37438 | 18 | 2418 | 38346 | 18 | 2468 | 39235 | 18 |
| 2269 | 35583 | 19 | 2319 | 36530 | 19 | 2369 | 37457 | 19 | 2419 | 38364 | 18 | 2469 | 39252 | 17 |
| 2270 | 35603 | 20 | 2320 | 36549 | 19 | 2370 | 37475 | 18 | 2420 | 38382 | 18 | 2470 | 39270 | 18 |
| | | 19 | | | 19 | | | 18 | | | 17 | | | 17 |
| 2271 | 35622 | | 2321 | 36568 | | 2371 | 37493 | | 2421 | 38399 | | 2471 | 39287 | |
| 2272 | 35641 | 19 | 2322 | 36586 | 18 | 2372 | 37511 | 18 | 2422 | 38417 | 18 | 2472 | 39305 | 18 |
| 2273 | 35660 | 19 | 2323 | 36605 | 19 | 2373 | 37530 | 19 | 2423 | 38435 | 18 | 2473 | 39322 | 17 |
| 2274 | 35679 | 19 | 2324 | 36624 | 19 | 2374 | 37548 | 18 | 2424 | 38453 | 18 | 2474 | 39340 | 18 |
| 2275 | 35698 | 19 | 2325 | 36642 | 18 | 2375 | 37566 | 18 | 2425 | 38471 | 18 | 2475 | 39358 | 18 |
| | | 19 | | | 19 | | | 19 | | | 18 | | | 17 |
| 2276 | 35717 | | 2326 | 36661 | | 2376 | 37585 | | 2426 | 38489 | | 2476 | 39375 | |
| 2277 | 35736 | 19 | 2327 | 36680 | 19 | 2377 | 37603 | 18 | 2427 | 38507 | 18 | 2477 | 39393 | 18 |
| 2278 | 35755 | 19 | 2328 | 36698 | 18 | 2378 | 37621 | 18 | 2428 | 38525 | 18 | 2478 | 39410 | 17 |
| 2279 | 35774 | 19 | 2329 | 36717 | 19 | 2379 | 37639 | 19 | 2429 | 38543 | 18 | 2479 | 39428 | 18 |
| 2280 | 35793 | 19 | 2330 | 36736 | 19 | 2380 | 37658 | 19 | 2430 | 38561 | 18 | 2480 | 39445 | 17 |
| | | 20 | | | 18 | | | 18 | | | 17 | | | 18 |
| 2281 | 35813 | | 2331 | 36754 | | 2381 | 37676 | | 2431 | 38578 | | 2481 | 39463 | |
| 2282 | 35832 | 19 | 2332 | 36773 | 19 | 2382 | 37694 | 18 | 2432 | 38596 | 18 | 2482 | 39480 | 17 |
| 2283 | 35851 | 19 | 2333 | 36791 | 18 | 2383 | 37712 | 18 | 2433 | 38614 | 18 | 2483 | 39498 | 18 |
| 2284 | 35870 | 19 | 2334 | 36810 | 19 | 2384 | 37731 | 19 | 2434 | 38632 | 18 | 2484 | 39515 | 17 |
| 2285 | 35889 | 19 | 2335 | 36829 | 19 | 2385 | 37749 | 18 | 2435 | 38650 | 18 | 2485 | 39533 | 18 |
| | | 19 | | | 18 | | | 18 | | | 18 | | | 17 |
| 2286 | 35908 | | 2336 | 36847 | | 2386 | 37767 | | 2436 | 38668 | | 2486 | 39550 | |
| 2287 | 35927 | 19 | 2337 | 36866 | 19 | 2387 | 37785 | 18 | 2437 | 38686 | 18 | 2487 | 39568 | 18 |
| 2288 | 35946 | 19 | 2338 | 36884 | 18 | 2388 | 37803 | 18 | 2438 | 38703 | 17 | 2488 | 39585 | 17 |
| 2289 | 35965 | 19 | 2339 | 36903 | 19 | 2389 | 37822 | 19 | 2439 | 38721 | 18 | 2489 | 39602 | 17 |
| 2290 | 35984 | 19 | 2340 | 36922 | 19 | 2390 | 37840 | 18 | 2440 | 38739 | 18 | 2490 | 39620 | 18 |
| | | 19 | | | 18 | | | 18 | | | 18 | | | 17 |
| 2291 | 36003 | | 2341 | 36940 | | 2391 | 37858 | | 2441 | 38757 | | 2491 | 39637 | |
| 2292 | 36021 | 18 | 2342 | 36959 | 19 | 2392 | 37876 | 18 | 2442 | 38775 | 18 | 2492 | 39655 | 18 |
| 2293 | 36040 | 19 | 2343 | 36977 | 18 | 2393 | 37894 | 18 | 2443 | 38792 | 17 | 2493 | 39672 | 17 |
| 2294 | 36059 | 19 | 2344 | 36996 | 19 | 2394 | 37912 | 18 | 2444 | 38810 | 18 | 2494 | 39690 | 18 |
| 2295 | 36078 | 19 | 2345 | 37014 | 18 | 2395 | 37931 | 19 | 2445 | 38828 | 18 | 2495 | 39707 | 17 |
| | | 19 | | | 19 | | | 18 | | | 18 | | | 17 |
| 2296 | 36097 | | 2346 | 37033 | | 2396 | 37949 | | 2446 | 38846 | | 2496 | 39724 | |
| 2297 | 36116 | 19 | 2347 | 37051 | 18 | 2397 | 37967 | 18 | 2447 | 38863 | 17 | 2497 | 39742 | 18 |
| 2298 | 36135 | 19 | 2348 | 37070 | 19 | 2398 | 37985 | 18 | 2448 | 38881 | 18 | 2498 | 39759 | 17 |
| 2299 | 36154 | 19 | 2349 | 37088 | 18 | 2399 | 38003 | 18 | 2449 | 38899 | 18 | 2499 | 39777 | 18 |
| 2300 | 36173 | 19 | 2350 | 37107 | 19 | 2400 | 38021 | 18 | 2450 | 38917 | 18 | 2500 | 39794 | 17 |

| N. | Log. | D | N. | Log. | D | N. | Log. | D | N. | Log. | D | N. | Log. | D |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2501 | 39811 | 17 | 2551 | 40671 | 17 | 2601 | 41514 | 17 | 2651 | 42341 | 16 | 2701 | 43152 | 16 |
| 2502 | 39829 | 18 | 2552 | 40688 | 17 | 2602 | 41531 | 17 | 2652 | 42357 | 16 | 2702 | 43169 | 17 |
| 2503 | 39846 | 17 | 2553 | 40705 | 17 | 2603 | 41547 | 16 | 2653 | 42374 | 17 | 2703 | 43185 | 16 |
| 2504 | 39863 | 17 | 2554 | 40722 | 17 | 2604 | 41564 | 17 | 2654 | 42390 | 16 | 2704 | 43201 | 16 |
| 2505 | 39881 | 18 | 2555 | 40739 | 17 | 2605 | 41581 | 17 | 2655 | 42406 | 16 | 2705 | 43217 | 16 |
| | | 17 | | | 17 | | | 16 | | | 17 | | | 16 |
| 2506 | 39898 | 17 | 2556 | 40756 | 17 | 2606 | 41597 | 17 | 2656 | 42423 | 16 | 2706 | 43233 | 16 |
| 2507 | 39915 | 17 | 2557 | 40773 | 17 | 2607 | 41614 | 17 | 2657 | 42439 | 16 | 2707 | 43249 | 16 |
| 2508 | 39933 | 18 | 2558 | 40790 | 17 | 2608 | 41631 | 17 | 2658 | 42455 | 17 | 2708 | 43265 | 16 |
| 2509 | 39950 | 17 | 2559 | 40807 | 17 | 2609 | 41647 | 16 | 2659 | 42472 | 16 | 2709 | 43281 | 16 |
| 2510 | 39967 | 17 | 2560 | 40824 | 17 | 2610 | 41664 | 17 | 2660 | 42488 | 16 | 2710 | 43297 | 16 |
| | | 18 | | | 17 | | | 17 | | | 16 | | | 16 |
| 2511 | 39985 | 17 | 2561 | 40841 | 17 | 2611 | 41681 | 16 | 2661 | 42504 | 17 | 2711 | 43313 | 16 |
| 2512 | 40002 | 17 | 2562 | 40858 | 17 | 2612 | 41697 | 17 | 2662 | 42521 | 16 | 2712 | 43329 | 16 |
| 2513 | 40019 | 18 | 2563 | 40875 | 17 | 2613 | 41714 | 17 | 2663 | 42537 | 16 | 2713 | 43345 | 16 |
| 2514 | 40037 | 17 | 2564 | 40892 | 17 | 2614 | 41731 | 16 | 2664 | 42553 | 17 | 2714 | 43361 | 16 |
| 2515 | 40054 | 17 | 2565 | 40909 | 17 | 2615 | 41747 | 17 | 2665 | 42570 | 16 | 2715 | 43377 | 16 |
| | | 17 | | | 17 | | | 17 | | | 16 | | | 16 |
| 2516 | 40071 | 17 | 2566 | 40926 | 17 | 2616 | 41764 | 16 | 2666 | 42586 | 16 | 2716 | 43393 | 16 |
| 2517 | 40088 | 18 | 2567 | 40943 | 17 | 2617 | 41780 | 17 | 2667 | 42602 | 17 | 2717 | 43409 | 16 |
| 2518 | 40106 | 17 | 2568 | 40960 | 17 | 2618 | 41797 | 17 | 2668 | 42619 | 16 | 2718 | 43425 | 16 |
| 2519 | 40123 | 17 | 2569 | 40976 | 16 | 2619 | 41814 | 17 | 2669 | 42635 | 16 | 2719 | 43441 | 16 |
| 2520 | 40140 | 17 | 2570 | 40993 | 17 | 2620 | 41830 | 16 | 2670 | 42651 | 16 | 2720 | 43457 | 16 |
| | | 17 | | | 17 | | | 17 | | | 16 | | | 16 |
| 2521 | 40157 | 18 | 2571 | 41010 | 17 | 2621 | 41847 | 16 | 2671 | 42667 | 17 | 2721 | 43473 | 16 |
| 2522 | 40175 | 17 | 2572 | 41027 | 17 | 2622 | 41863 | 17 | 2672 | 42684 | 16 | 2722 | 43489 | 16 |
| 2523 | 40192 | 17 | 2573 | 41044 | 17 | 2623 | 41880 | 16 | 2673 | 42700 | 16 | 2723 | 43505 | 16 |
| 2524 | 40209 | 17 | 2574 | 41061 | 17 | 2624 | 41896 | 17 | 2674 | 42716 | 16 | 2724 | 43521 | 16 |
| 2525 | 40226 | 17 | 2575 | 41078 | 17 | 2625 | 41913 | 17 | 2675 | 42732 | 16 | 2725 | 43537 | 16 |
| | | 17 | | | 17 | | | 16 | | | 17 | | | 16 |
| 2526 | 40243 | 18 | 2576 | 41095 | 16 | 2626 | 41929 | 17 | 2676 | 42749 | 16 | 2726 | 43553 | 16 |
| 2527 | 40261 | 17 | 2577 | 41111 | 17 | 2627 | 41946 | 17 | 2677 | 42765 | 16 | 2727 | 43569 | 15 |
| 2528 | 40278 | 17 | 2578 | 41128 | 17 | 2628 | 41963 | 17 | 2678 | 42781 | 16 | 2728 | 43584 | 16 |
| 2529 | 40295 | 17 | 2579 | 41145 | 17 | 2629 | 41979 | 16 | 2679 | 42797 | 16 | 2729 | 43600 | 16 |
| 2530 | 40312 | 17 | 2580 | 41162 | 17 | 2630 | 41996 | 16 | 2680 | 42813 | 16 | 2730 | 43616 | 16 |
| | | 17 | | | 17 | | | 16 | | | 17 | | | 16 |
| 2531 | 40329 | 17 | 2581 | 41179 | 17 | 2631 | 42012 | 17 | 2681 | 42830 | 16 | 2731 | 43632 | 16 |
| 2532 | 40346 | 18 | 2582 | 41196 | 17 | 2632 | 42029 | 17 | 2683 | 42846 | 16 | 2732 | 43648 | 16 |
| 2533 | 40364 | 17 | 2583 | 41212 | 16 | 2633 | 42045 | 16 | 2683 | 42862 | 16 | 2733 | 43664 | 16 |
| 2534 | 40381 | 17 | 2584 | 41229 | 17 | 2634 | 42062 | 17 | 2684 | 42878 | 16 | 2734 | 43680 | 16 |
| 2535 | 40398 | 17 | 2585 | 41246 | 17 | 2635 | 42078 | 16 | 2685 | 42894 | 16 | 2735 | 43696 | 16 |
| | | 17 | | | 17 | | | 17 | | | 17 | | | 16 |
| 2536 | 40415 | 17 | 2586 | 41263 | 17 | 2636 | 42095 | 16 | 2686 | 42911 | 16 | 2736 | 43712 | 15 |
| 2537 | 40432 | 17 | 2587 | 41280 | 16 | 2637 | 42111 | 16 | 2687 | 42927 | 16 | 2737 | 43727 | 16 |
| 2538 | 40449 | 17 | 2588 | 41296 | 17 | 2638 | 42127 | 16 | 2688 | 42943 | 16 | 2738 | 43743 | 16 |
| 2539 | 40466 | 17 | 2589 | 41313 | 17 | 2639 | 42144 | 16 | 2689 | 42959 | 16 | 2739 | 43759 | 16 |
| 2540 | 40483 | 17 | 2590 | 41330 | 17 | 2640 | 42160 | 16 | 2690 | 42975 | 16 | 2740 | 43775 | 16 |
| | | 17 | | | 17 | | | 17 | | | 16 | | | 16 |
| 2541 | 40500 | 18 | 2591 | 41347 | 16 | 2641 | 42177 | 16 | 2691 | 42991 | 17 | 2741 | 43791 | 16 |
| 2542 | 40518 | 17 | 2592 | 41363 | 17 | 2642 | 42193 | 17 | 2692 | 43008 | 16 | 2742 | 43807 | 16 |
| 2543 | 40535 | 17 | 2593 | 41380 | 17 | 2643 | 42210 | 16 | 2693 | 43024 | 16 | 2743 | 43823 | 15 |
| 2544 | 40552 | 17 | 2594 | 41397 | 17 | 2644 | 42226 | 16 | 2694 | 43040 | 16 | 2744 | 43838 | 16 |
| 2545 | 40569 | 17 | 2595 | 41414 | 17 | 2645 | 42243 | 16 | 2695 | 43056 | 16 | 2745 | 43854 | 16 |
| | | 17 | | | 16 | | | 16 | | | 16 | | | 16 |
| 2546 | 40586 | 17 | 2596 | 41430 | 17 | 2646 | 42259 | 16 | 2696 | 43072 | 16 | 2746 | 43870 | 16 |
| 2547 | 40603 | 17 | 2597 | 41447 | 17 | 2647 | 42275 | 16 | 2697 | 43088 | 16 | 2747 | 43886 | 16 |
| 2548 | 40620 | 17 | 2598 | 41464 | 17 | 2648 | 42292 | 16 | 2698 | 43104 | 16 | 2748 | 43902 | 15 |
| 2549 | 40637 | 17 | 2599 | 41481 | 17 | 2649 | 42308 | 17 | 2699 | 43120 | 16 | 2749 | 43917 | 16 |
| 2550 | 40654 | 17 | 2600 | 41497 | 16 | 2650 | 42325 | 17 | 2700 | 43136 | 16 | 2750 | 43933 | |

| N. | Log. | D | N. | Log. | D | N. | Log. | D | N. | Log. | D | N. | Log. | D |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2751 | 43949 | 16 | 2801 | 44731 | 15 | 2851 | 45500 | 16 | 2901 | 46255 | 15 | 2951 | 46997 | 15 |
| 2752 | 43965 | 16 | 2802 | 44747 | 16 | 2852 | 45515 | 15 | 2902 | 46270 | 15 | 2952 | 47012 | 15 |
| 2753 | 43981 | 15 | 2803 | 44762 | 15 | 2853 | 45530 | 15 | 2903 | 46285 | 15 | 2953 | 47026 | 14 |
| 2754 | 43996 | 15 | 2804 | 44778 | 16 | 2854 | 45545 | 15 | 2904 | 46300 | 15 | 2954 | 47041 | 15 |
| 2755 | 44012 | 16 | 2805 | 44793 | 15 | 2855 | 45561 | 16 | 2905 | 46315 | 15 | 2955 | 47056 | 15 |
| | | 16 | | | 16 | | | 15 | | | 15 | | | 14 |
| 2756 | 44028 | 16 | 2806 | 44809 | 16 | 2856 | 45576 | 15 | 2906 | 46330 | 15 | 2956 | 47070 | 15 |
| 2757 | 44044 | 15 | 2807 | 44824 | 15 | 2857 | 45591 | 15 | 2907 | 46345 | 14 | 2957 | 47085 | 15 |
| 2758 | 44059 | 16 | 2808 | 44840 | 16 | 2858 | 45606 | 15 | 2908 | 46359 | 15 | 2958 | 47100 | 14 |
| 2759 | 44075 | 16 | 2809 | 44855 | 15 | 2859 | 45621 | 16 | 2909 | 46374 | 15 | 2959 | 47114 | 15 |
| 2760 | 44091 | 16 | 2810 | 44871 | 16 | 2860 | 45637 | 15 | 2910 | 47389 | 15 | 2960 | 47129 | 15 |
| | | 16 | | | 15 | | | 15 | | | 15 | | | 15 |
| 2761 | 44107 | 15 | 2811 | 44886 | 16 | 2861 | 45652 | 15 | 2911 | 46404 | 15 | 2961 | 47144 | 15 |
| 2762 | 44122 | 16 | 2812 | 44902 | 15 | 2862 | 45667 | 15 | 2912 | 46419 | 15 | 2962 | 47159 | 14 |
| 2763 | 44138 | 16 | 2813 | 44917 | 15 | 2863 | 45682 | 15 | 2913 | 46434 | 15 | 2963 | 47173 | 15 |
| 2764 | 44154 | 16 | 2814 | 44932 | 16 | 2864 | 45697 | 15 | 2914 | 46449 | 15 | 2964 | 47188 | 14 |
| 2765 | 44170 | 15 | 2815 | 44948 | 15 | 2865 | 45712 | 16 | 2915 | 46464 | 15 | 2965 | 47202 | 15 |
| 2766 | 44185 | 16 | 2816 | 44963 | 16 | 2866 | 45728 | 15 | 2916 | 46479 | 15 | 2966 | 47217 | 15 |
| 2767 | 44201 | 16 | 2817 | 44979 | 15 | 2867 | 45743 | 15 | 2917 | 46494 | 15 | 2967 | 47232 | 14 |
| 2768 | 44217 | 15 | 2818 | 44994 | 16 | 2868 | 45758 | 15 | 2918 | 46509 | 14 | 2968 | 47246 | 15 |
| 2769 | 44232 | 16 | 2819 | 45010 | 15 | 2869 | 45773 | 15 | 2919 | 46523 | 15 | 2969 | 47261 | 15 |
| 2770 | 44248 | 16 | 2820 | 45025 | 15 | 2870 | 45788 | 15 | 2920 | 46538 | 15 | 2970 | 47276 | 14 |
| 2771 | 44264 | 15 | 2821 | 45040 | 16 | 2871 | 45803 | 15 | 2921 | 46553 | 15 | 2971 | 47290 | 15 |
| 2772 | 44279 | 16 | 2822 | 45056 | 15 | 2872 | 45818 | 16 | 2922 | 46568 | 15 | 2972 | 47305 | 14 |
| 2773 | 44295 | 16 | 2823 | 45071 | 15 | 2873 | 45834 | 15 | 2923 | 46583 | 15 | 2973 | 47319 | 15 |
| 2774 | 44311 | 15 | 2824 | 45086 | 16 | 2874 | 45849 | 15 | 2924 | 46598 | 15 | 2974 | 47334 | 15 |
| 2775 | 44326 | 16 | 2825 | 45102 | 15 | 2875 | 45864 | 15 | 2925 | 46613 | 15 | 2975 | 47349 | 14 |
| 2776 | 44342 | 16 | 2826 | 45117 | 16 | 2876 | 45879 | 15 | 2926 | 46627 | 15 | 2976 | 47363 | 15 |
| 2777 | 44358 | 15 | 2827 | 45133 | 15 | 2877 | 45894 | 15 | 2927 | 46642 | 15 | 2977 | 47378 | 14 |
| 2778 | 44373 | 16 | 2828 | 45148 | 15 | 2878 | 45909 | 15 | 2928 | 46657 | 15 | 2978 | 47392 | 15 |
| 2779 | 44389 | 15 | 2829 | 45163 | 16 | 2879 | 45924 | 15 | 2929 | 46672 | 15 | 2979 | 47407 | 15 |
| 2780 | 44404 | 16 | 2830 | 45179 | 15 | 2880 | 45939 | 15 | 2930 | 46687 | 15 | 2980 | 47422 | 14 |
| 2781 | 44420 | 16 | 2831 | 45194 | 15 | 2881 | 45954 | 15 | 2931 | 46702 | 14 | 2981 | 47436 | 15 |
| 2782 | 44436 | 15 | 2832 | 45209 | 16 | 2882 | 45969 | 15 | 2932 | 46716 | 15 | 2982 | 47451 | 14 |
| 2783 | 44451 | 16 | 2833 | 45225 | 15 | 2883 | 45984 | 16 | 2933 | 46731 | 15 | 2983 | 47465 | 15 |
| 2784 | 44467 | 16 | 2834 | 45240 | 15 | 2884 | 46000 | 15 | 2934 | 46746 | 15 | 2984 | 47480 | 14 |
| 2785 | 44483 | 15 | 2835 | 45255 | 16 | 2885 | 46015 | 15 | 2935 | 46761 | 15 | 2985 | 47494 | 15 |
| 2786 | 44498 | 16 | 2836 | 45271 | 15 | 2886 | 46030 | 15 | 2936 | 46776 | 14 | 2986 | 47509 | 15 |
| 2787 | 44514 | 15 | 2837 | 45286 | 15 | 2887 | 46045 | 15 | 2937 | 46790 | 15 | 2987 | 47524 | 14 |
| 2788 | 44529 | 16 | 2838 | 45301 | 16 | 2888 | 46060 | 15 | 2938 | 46805 | 15 | 2988 | 47538 | 15 |
| 2789 | 44545 | 16 | 2839 | 45317 | 15 | 2889 | 46075 | 15 | 2939 | 46820 | 15 | 2989 | 47553 | 14 |
| 2790 | 44560 | 15 | 2840 | 45332 | 15 | 2890 | 46090 | 15 | 2940 | 46835 | 15 | 2990 | 47567 | 15 |
| 2791 | 44576 | 16 | 2841 | 45347 | 15 | 2891 | 46105 | 15 | 2941 | 46850 | 14 | 2991 | 47582 | 14 |
| 2792 | 44592 | 15 | 2842 | 45362 | 16 | 2892 | 46120 | 15 | 2942 | 46864 | 15 | 2992 | 47596 | 15 |
| 2793 | 44607 | 16 | 2843 | 45378 | 15 | 2893 | 46135 | 15 | 2943 | 46879 | 15 | 2993 | 47611 | 14 |
| 2794 | 44623 | 15 | 2844 | 45393 | 15 | 2894 | 46150 | 15 | 2944 | 46894 | 15 | 2994 | 47625 | 15 |
| 2795 | 44638 | 16 | 2845 | 45408 | 15 | 2895 | 46165 | 15 | 2945 | 46909 | 14 | 2995 | 47640 | 14 |
| 2796 | 44654 | 15 | 2846 | 45423 | 16 | 2896 | 46180 | 15 | 2946 | 46923 | 15 | 2996 | 47654 | 15 |
| 2797 | 44669 | 16 | 2847 | 45439 | 15 | 2897 | 46195 | 15 | 2947 | 46938 | 15 | 2997 | 47669 | 14 |
| 2798 | 44685 | 15 | 2848 | 45454 | 15 | 2898 | 46210 | 15 | 2948 | 46953 | 14 | 2998 | 47683 | 15 |
| 2799 | 44700 | 16 | 2849 | 45469 | 15 | 2899 | 46225 | 15 | 2949 | 46967 | 15 | 2999 | 47698 | 14 |
| 2800 | 44716 | | 2850 | 45484 | | 2900 | 46240 | | 2950 | 46982 | | 3000 | 47712 | |

| N. | Log. | D | N. | Log. | D | N. | Log. | D | N. | Log. | D | N. | Log. | D |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3001 | 47737 | 15 | 3051 | 48444 | 14 | 3101 | 49150 | 14 | 3151 | 49845 | 14 | 3201 | 50529 | 14 |
| 3002 | 47741 | 14 | 3052 | 48458 | 14 | 3102 | 49164 | 14 | 3152 | 49859 | 14 | 3202 | 50542 | 13 |
| 3003 | 47756 | 15 | 3053 | 48473 | 15 | 3103 | 49178 | 14 | 3153 | 49872 | 13 | 3203 | 50556 | 14 |
| 3004 | 47770 | 14 | 3054 | 48487 | 14 | 3104 | 49192 | 14 | 3154 | 49886 | 14 | 3204 | 50569 | 13 |
| 3005 | 47784 | 14 | 3055 | 48501 | 14 | 3105 | 49206 | 14 | 3155 | 49900 | 14 | 3205 | 50583 | 14 |
| | | 15 | | | 14 | | | 14 | | | 14 | | | 13 |
| 3006 | 47799 | 14 | 3056 | 48515 | 15 | 3106 | 49220 | 14 | 3156 | 49914 | 13 | 3206 | 50596 | 14 |
| 3007 | 47813 | 15 | 3057 | 48530 | 14 | 3107 | 49234 | 14 | 3157 | 49927 | 14 | 3207 | 50610 | 13 |
| 3008 | 47828 | 14 | 3058 | 48544 | 14 | 3108 | 49248 | 14 | 3158 | 49941 | 14 | 3208 | 50623 | 14 |
| 3009 | 47842 | 15 | 3059 | 48558 | 14 | 3109 | 49262 | 14 | 3159 | 49955 | 14 | 3209 | 50637 | 14 |
| 3010 | 47857 | 14 | 3060 | 48572 | 14 | 3110 | 49276 | 14 | 3160 | 49969 | 14 | 3210 | 50651 | 14 |
| | | 14 | | | 14 | | | 14 | | | 13 | | | 13 |
| 3011 | 47871 | 14 | 3061 | 48586 | 15 | 3111 | 49290 | 14 | 3161 | 49982 | 14 | 3211 | 50664 | 14 |
| 3012 | 47885 | 15 | 3062 | 48601 | 14 | 3112 | 49304 | 14 | 3162 | 49996 | 14 | 3212 | 50678 | 13 |
| 3013 | 47900 | 14 | 3063 | 48615 | 14 | 3113 | 49318 | 14 | 3163 | 50010 | 14 | 3213 | 50691 | 14 |
| 3014 | 47914 | 15 | 3064 | 48629 | 14 | 3114 | 49332 | 14 | 3164 | 50024 | 13 | 3214 | 50705 | 13 |
| 3015 | 47929 | 14 | 3065 | 48643 | 14 | 3115 | 49346 | 14 | 3165 | 50037 | 14 | 3215 | 50718 | 13 |
| | | 14 | | | 14 | | | 14 | | | 14 | | | 14 |
| 3016 | 47943 | 15 | 3066 | 48657 | 14 | 3116 | 49360 | 14 | 3166 | 50051 | 14 | 3216 | 50732 | 13 |
| 3017 | 47958 | 14 | 3067 | 48671 | 15 | 3117 | 49374 | 14 | 3167 | 50065 | 14 | 3217 | 50745 | 14 |
| 3018 | 47972 | 14 | 3068 | 48686 | 14 | 3118 | 49388 | 14 | 3168 | 50079 | 13 | 3218 | 50759 | 13 |
| 3019 | 47986 | 15 | 3069 | 48700 | 14 | 3119 | 49402 | 14 | 3169 | 50092 | 14 | 3219 | 50772 | 14 |
| 3020 | 48001 | 14 | 3070 | 48714 | 14 | 3120 | 49415 | 13 | 3170 | 50106 | 14 | 3220 | 50786 | 13 |
| | | 14 | | | 14 | | | 14 | | | 13 | | | 13 |
| 3021 | 48015 | 14 | 3071 | 48728 | 14 | 3121 | 49429 | 14 | 3171 | 50120 | 13 | 3221 | 50799 | 14 |
| 3022 | 48029 | 15 | 3072 | 48742 | 14 | 3122 | 49443 | 14 | 3172 | 50133 | 14 | 3222 | 50813 | 13 |
| 3023 | 48044 | 14 | 3073 | 48756 | 14 | 3123 | 49457 | 14 | 3173 | 50147 | 14 | 3223 | 50826 | 14 |
| 3024 | 48058 | 15 | 3074 | 48770 | 15 | 3124 | 49471 | 14 | 3174 | 50161 | 14 | 3224 | 50840 | 13 |
| 3025 | 48073 | 14 | 3075 | 48785 | 14 | 3125 | 49485 | 14 | 3175 | 50174 | 13 | 3225 | 50853 | 13 |
| | | 14 | | | 14 | | | 14 | | | 14 | | | 13 |
| 3026 | 48087 | 14 | 3076 | 48799 | 14 | 3126 | 49499 | 14 | 3176 | 50188 | 14 | 3226 | 50866 | 14 |
| 3027 | 48101 | 15 | 3077 | 48813 | 14 | 3127 | 49513 | 14 | 3177 | 50202 | 14 | 3227 | 50880 | 13 |
| 3028 | 48116 | 14 | 3078 | 48827 | 14 | 3128 | 49527 | 14 | 3178 | 50215 | 13 | 3228 | 50893 | 14 |
| 3029 | 48130 | 14 | 3079 | 48841 | 14 | 3129 | 49541 | 14 | 3179 | 50229 | 14 | 3229 | 50907 | 13 |
| 3030 | 48144 | 14 | 3080 | 48855 | 14 | 3130 | 49554 | 13 | 3180 | 50243 | 14 | 3230 | 50920 | 14 |
| | | 15 | | | 14 | | | 14 | | | 13 | | | 14 |
| 3031 | 48159 | 14 | 3081 | 48869 | 14 | 3131 | 49568 | 14 | 3181 | 50256 | 14 | 3231 | 50934 | 13 |
| 3032 | 48173 | 14 | 3082 | 48883 | 14 | 3132 | 49582 | 14 | 3182 | 50270 | 14 | 3232 | 50947 | 14 |
| 3033 | 48187 | 15 | 3083 | 48897 | 14 | 3133 | 49596 | 14 | 3183 | 50284 | 13 | 3233 | 50961 | 13 |
| 3034 | 48202 | 14 | 3084 | 48911 | 14 | 3134 | 49610 | 14 | 3184 | 50297 | 14 | 3234 | 50974 | 13 |
| 3035 | 48216 | 14 | 3085 | 48926 | 15 | 3135 | 49624 | 14 | 3185 | 50311 | 14 | 3235 | 50987 | 14 |
| | | 14 | | | 14 | | | 14 | | | 14 | | | 14 |
| 3036 | 48230 | 14 | 3086 | 48940 | 14 | 3136 | 49638 | 13 | 3186 | 50325 | 13 | 3236 | 51001 | 13 |
| 3037 | 48244 | 15 | 3087 | 48954 | 14 | 3137 | 49651 | 14 | 3187 | 50338 | 14 | 3237 | 51014 | 14 |
| 3038 | 48259 | 14 | 3088 | 48968 | 14 | 3138 | 49665 | 14 | 3188 | 50352 | 13 | 3238 | 51028 | 13 |
| 3039 | 48273 | 14 | 3089 | 48982 | 14 | 3139 | 49679 | 14 | 3189 | 50365 | 14 | 3239 | 51041 | 14 |
| 3040 | 48287 | 14 | 3090 | 48996 | 14 | 3140 | 49693 | 14 | 3190 | 50379 | 14 | 3240 | 51055 | 14 |
| | | 15 | | | 14 | | | 14 | | | 14 | | | 13 |
| 3041 | 48302 | 14 | 3091 | 49010 | 14 | 3141 | 49707 | 14 | 3191 | 50393 | 13 | 3241 | 51068 | 13 |
| 3042 | 48316 | 14 | 3092 | 49024 | 14 | 3142 | 49721 | 13 | 3192 | 50406 | 14 | 3242 | 51081 | 14 |
| 3043 | 48330 | 14 | 3093 | 49038 | 14 | 3143 | 49734 | 14 | 3193 | 50420 | 13 | 3243 | 51095 | 13 |
| 3044 | 48344 | 15 | 3094 | 49052 | 14 | 3144 | 49748 | 14 | 3194 | 50433 | 14 | 3244 | 51108 | 13 |
| 3045 | 48359 | 14 | 3095 | 49066 | 14 | 3145 | 49762 | 14 | 3195 | 50447 | 14 | 3245 | 51121 | 14 |
| | | 14 | | | 14 | | | 14 | | | 14 | | | 14 |
| 3046 | 48373 | 14 | 3096 | 49080 | 14 | 3146 | 49776 | 14 | 3196 | 50461 | 13 | 3246 | 51135 | 13 |
| 3047 | 48387 | 14 | 3097 | 49094 | 14 | 3147 | 49790 | 13 | 3197 | 50474 | 14 | 3247 | 51148 | 14 |
| 3048 | 48401 | 15 | 3098 | 49108 | 14 | 3148 | 49803 | 14 | 3198 | 50488 | 13 | 3248 | 51162 | 13 |
| 3049 | 48416 | 14 | 3099 | 49122 | 14 | 3149 | 49817 | 14 | 3199 | 50501 | 14 | 3249 | 51175 | 13 |
| 3050 | 48430 | | 3100 | 49136 | | 3150 | 49831 | | 3200 | 50515 | | 3250 | 51188 | |

| N. | Log. | D | N. | Log. | D | N. | Log. | D | N. | Log. | D | N. | Log. | D |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3251 | 51202 | 14 | 3301 | 51865 | 14 | 3351 | 52517 | 13 | 3401 | 53161 | 13 | 3451 | 53794 | 12 |
| 3252 | 51215 | 13 | 3302 | 51878 | 13 | 3352 | 52530 | 13 | 3402 | 53173 | 12 | 3452 | 53807 | 13 |
| 3253 | 51228 | 13 | 3303 | 51891 | 13 | 3353 | 52543 | 13 | 3403 | 53186 | 13 | 3453 | 53820 | 13 |
| 3254 | 51242 | 14 | 3304 | 51904 | 13 | 3354 | 52556 | 13 | 3404 | 53199 | 13 | 3454 | 53832 | 12 |
| 3255 | 51255 | 13 | 3305 | 51917 | 13 | 3355 | 52569 | 13 | 3405 | 53212 | 13 | 3455 | 53845 | 13 |
| 3256 | 51268 | 13 | 3306 | 51930 | 13 | 3356 | 52582 | 13 | 3406 | 53224 | 12 | 3456 | 53857 | 12 |
| 3257 | 51282 | 14 | 3307 | 51943 | 13 | 3357 | 52595 | 13 | 3407 | 53237 | 13 | 3457 | 53870 | 13 |
| 3258 | 51295 | 13 | 3308 | 51957 | 14 | 3358 | 52608 | 13 | 3408 | 53250 | 13 | 3458 | 53882 | 12 |
| 3259 | 51308 | 13 | 3309 | 51970 | 13 | 3359 | 52621 | 13 | 3409 | 53263 | 13 | 3459 | 53895 | 13 |
| 3260 | 51322 | 14 | 3310 | 51983 | 13 | 3360 | 52634 | 13 | 3410 | 53275 | 12 | 3460 | 53908 | 13 |
| 3261 | 51335 | 13 | 3311 | 51996 | 13 | 3361 | 52647 | 13 | 3411 | 53288 | 13 | 3461 | 53920 | 12 |
| 3262 | 51348 | 13 | 3312 | 52009 | 13 | 3362 | 52660 | 13 | 3412 | 53301 | 13 | 3462 | 53933 | 13 |
| 3263 | 51362 | 14 | 3313 | 52022 | 13 | 3363 | 52673 | 13 | 3413 | 53314 | 13 | 3463 | 53945 | 12 |
| 3264 | 51375 | 13 | 3314 | 52035 | 13 | 3364 | 52686 | 13 | 3414 | 53326 | 12 | 3464 | 53958 | 13 |
| 3265 | 51388 | 13 | 3315 | 52048 | 13 | 3365 | 52699 | 13 | 3415 | 53339 | 13 | 3465 | 53970 | 12 |
| 3266 | 51402 | 14 | 3316 | 52061 | 13 | 3366 | 52711 | 12 | 3416 | 53352 | 13 | 3466 | 53983 | 13 |
| 3267 | 51415 | 13 | 3317 | 52075 | 14 | 3367 | 52724 | 13 | 3417 | 53364 | 12 | 3467 | 53995 | 12 |
| 3268 | 51428 | 13 | 3318 | 52088 | 13 | 3368 | 52737 | 13 | 3418 | 53377 | 13 | 3468 | 54008 | 13 |
| 3269 | 51441 | 13 | 3319 | 52101 | 13 | 3369 | 52750 | 13 | 3419 | 53390 | 13 | 3469 | 54020 | 12 |
| 3270 | 51455 | 14 | 3320 | 52114 | 13 | 3370 | 52763 | 13 | 3420 | 53403 | 13 | 3470 | 54033 | 13 |
| 3271 | 51468 | 13 | 3321 | 52127 | 13 | 3371 | 52776 | 13 | 3421 | 53415 | 12 | 3471 | 54045 | 12 |
| 3272 | 51481 | 13 | 3322 | 52140 | 13 | 3372 | 52789 | 13 | 3422 | 53428 | 13 | 3472 | 54058 | 13 |
| 3273 | 51495 | 14 | 3323 | 52153 | 13 | 3373 | 52802 | 13 | 3423 | 53441 | 13 | 3473 | 54070 | 12 |
| 3274 | 51508 | 13 | 3324 | 52166 | 13 | 3374 | 52815 | 12 | 3424 | 53453 | 12 | 3474 | 54083 | 13 |
| 3275 | 51521 | 13 | 3325 | 52179 | 13 | 3375 | 52827 | 13 | 3425 | 53466 | 13 | 3475 | 54095 | 12 |
| 3276 | 51534 | 13 | 3326 | 52192 | 13 | 3376 | 52840 | 13 | 3426 | 53479 | 13 | 3476 | 54108 | 13 |
| 3277 | 51548 | 14 | 3327 | 52205 | 13 | 3377 | 52853 | 13 | 3427 | 53491 | 12 | 3477 | 54120 | 12 |
| 3278 | 51561 | 13 | 3328 | 52218 | 13 | 3378 | 52866 | 13 | 3428 | 53504 | 13 | 3478 | 54133 | 13 |
| 3279 | 51574 | 13 | 3329 | 52231 | 13 | 3379 | 52879 | 13 | 3429 | 53517 | 13 | 3479 | 54145 | 12 |
| 3280 | 51587 | 13 | 3330 | 52244 | 13 | 3380 | 52892 | 13 | 3430 | 53529 | 12 | 3480 | 54158 | 13 |
| 3281 | 51601 | 14 | 3331 | 52257 | 13 | 3381 | 52905 | 13 | 3431 | 53542 | 13 | 3481 | 54170 | 12 |
| 3282 | 51614 | 13 | 3332 | 52270 | 13 | 3382 | 52917 | 12 | 3432 | 53555 | 13 | 3482 | 54183 | 13 |
| 3283 | 51627 | 13 | 3333 | 52284 | 14 | 3383 | 52930 | 13 | 3433 | 53567 | 12 | 3483 | 54195 | 12 |
| 3284 | 51640 | 13 | 3334 | 52297 | 13 | 3384 | 52943 | 13 | 3434 | 53580 | 13 | 3484 | 54208 | 13 |
| 3285 | 51654 | 14 | 3335 | 52310 | 13 | 3385 | 52956 | 13 | 3435 | 53593 | 13 | 3485 | 54220 | 12 |
| 3286 | 51667 | 13 | 3336 | 52323 | 13 | 3386 | 52969 | 13 | 3436 | 53605 | 12 | 3486 | 54233 | 13 |
| 3287 | 51680 | 13 | 3337 | 52336 | 13 | 3387 | 52982 | 13 | 3437 | 53618 | 13 | 3487 | 54245 | 12 |
| 3288 | 51693 | 13 | 3338 | 52349 | 13 | 3388 | 52994 | 12 | 3438 | 53631 | 13 | 3488 | 54258 | 13 |
| 3289 | 51706 | 13 | 3339 | 52362 | 13 | 3389 | 53007 | 13 | 3439 | 53643 | 12 | 3489 | 54270 | 12 |
| 3290 | 51720 | 14 | 3340 | 52375 | 13 | 3390 | 53020 | 13 | 3440 | 53656 | 13 | 3490 | 54283 | 13 |
| 3291 | 51733 | 13 | 3341 | 52388 | 13 | 3391 | 53033 | 13 | 3441 | 53668 | 12 | 3491 | 54295 | 12 |
| 3292 | 51746 | 13 | 3342 | 52401 | 13 | 3392 | 53046 | 13 | 3442 | 53681 | 13 | 3492 | 54307 | 13 |
| 3293 | 51759 | 13 | 3343 | 52414 | 13 | 3393 | 53058 | 12 | 3443 | 53694 | 13 | 3493 | 54320 | 12 |
| 3294 | 51772 | 13 | 3344 | 52427 | 13 | 3394 | 53071 | 13 | 3444 | 53706 | 12 | 3494 | 54332 | 13 |
| 3295 | 51786 | 14 | 3345 | 52440 | 13 | 3395 | 53084 | 13 | 3445 | 53719 | 13 | 3495 | 54345 | 12 |
| 3296 | 51799 | 13 | 3346 | 52453 | 13 | 3396 | 53097 | 13 | 3446 | 53732 | 13 | 3496 | 54357 | 13 |
| 3297 | 51812 | 13 | 3347 | 52466 | 13 | 3397 | 53110 | 13 | 3447 | 53744 | 12 | 3497 | 54370 | 12 |
| 3298 | 51825 | 13 | 3348 | 52479 | 13 | 3398 | 53122 | 12 | 3448 | 53757 | 13 | 3498 | 54382 | 12 |
| 3299 | 51838 | 13 | 3349 | 52492 | 13 | 3399 | 53135 | 13 | 3449 | 53769 | 12 | 3499 | 54394 | 13 |
| 3300 | 51851 | 13 | 3350 | 52504 | 12 | 3400 | 53148 | 13 | 3450 | 53782 | 13 | 3500 | 54407 | 13 |

| N. | Log. | D | N. | Log. | D | N. | Log. | D | N. | Log. | D | N. | Log. | D |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3501 | 54419 | 12 | 3551 | 55035 | 12 | 3601 | 55642 | 12 | 3651 | 56241 | 12 | 3701 | 56832 | 12 |
| 3502 | 54432 | 13 | 3552 | 55047 | 12 | 3602 | 55654 | 12 | 3652 | 56253 | 12 | 3702 | 56844 | 12 |
| 3503 | 54444 | 12 | 3553 | 55060 | 13 | 3603 | 55666 | 12 | 3653 | 56265 | 12 | 3703 | 56855 | 11 |
| 3504 | 54456 | 12 | 3554 | 55072 | 12 | 3604 | 55678 | 12 | 3654 | 56277 | 12 | 3704 | 56867 | 12 |
| 3505 | 54469 | 13 | 3555 | 55084 | 12 | 3605 | 55691 | 13 | 3655 | 56289 | 12 | 3705 | 56879 | 12 |
| | | 12 | | | 12 | | | 12 | | | 12 | | | 12 |
| 3506 | 54481 | 13 | 3556 | 55096 | 12 | 3606 | 55703 | 12 | 3656 | 56301 | 11 | 3706 | 56891 | 11 |
| 3507 | 54494 | 12 | 3557 | 55108 | 13 | 3607 | 55715 | 12 | 3657 | 56312 | 12 | 3707 | 56902 | 12 |
| 3508 | 54506 | 12 | 3558 | 55121 | 12 | 3608 | 55727 | 12 | 3658 | 56324 | 12 | 3708 | 56914 | 12 |
| 3509 | 54518 | 13 | 3559 | 55133 | 12 | 3609 | 55739 | 12 | 3659 | 56336 | 12 | 3709 | 56926 | 11 |
| 3510 | 54531 | 12 | 3560 | 55145 | 12 | 3610 | 55751 | 12 | 3660 | 56348 | 12 | 3710 | 56937 | 12 |
| 3511 | 54543 | 12 | 3561 | 55157 | 12 | 3611 | 55763 | 12 | 3661 | 56360 | 12 | 3711 | 56949 | 12 |
| 3512 | 54555 | 13 | 3562 | 55169 | 13 | 3612 | 55775 | 12 | 3662 | 56372 | 12 | 3712 | 56961 | 11 |
| 3513 | 54568 | 12 | 3563 | 55182 | 12 | 3613 | 55787 | 12 | 3663 | 56384 | 12 | 3713 | 56972 | 12 |
| 3514 | 54580 | 13 | 3564 | 55194 | 12 | 3614 | 55799 | 12 | 3664 | 56396 | 11 | 3714 | 56984 | 12 |
| 3515 | 54593 | 12 | 3565 | 55206 | 12 | 3615 | 55811 | 12 | 3665 | 56407 | 12 | 3715 | 56996 | 12 |
| 3516 | 54605 | 12 | 3566 | 55218 | 12 | 3616 | 55823 | 12 | 3666 | 56419 | 12 | 3716 | 57008 | 11 |
| 3517 | 54617 | 13 | 3567 | 55230 | 12 | 3617 | 55835 | 12 | 3667 | 56431 | 12 | 3717 | 57019 | 12 |
| 3518 | 54630 | 12 | 3568 | 55242 | 13 | 3618 | 55847 | 12 | 3668 | 56443 | 12 | 3718 | 57031 | 12 |
| 3519 | 54642 | 12 | 3569 | 55255 | 12 | 3619 | 55859 | 12 | 3669 | 56455 | 12 | 3719 | 57043 | 11 |
| 3520 | 54654 | 13 | 3570 | 55267 | 12 | 3620 | 55871 | 12 | 3670 | 56467 | 11 | 3720 | 57054 | 12 |
| 3521 | 54667 | 12 | 3571 | 55279 | 12 | 3621 | 55883 | 12 | 3671 | 56478 | 12 | 3721 | 57066 | 12 |
| 3522 | 54679 | 12 | 3572 | 55291 | 12 | 3622 | 55895 | 12 | 3672 | 56490 | 12 | 3722 | 57078 | 11 |
| 3523 | 54691 | 13 | 3573 | 55303 | 12 | 3623 | 55907 | 12 | 3673 | 56502 | 12 | 3723 | 57089 | 12 |
| 3524 | 54704 | 12 | 3574 | 55315 | 12 | 3624 | 55919 | 12 | 3674 | 56514 | 12 | 3724 | 57101 | 12 |
| 3525 | 54716 | 12 | 3575 | 55328 | 13 | 3625 | 55931 | 12 | 3675 | 56526 | 12 | 3725 | 57113 | 11 |
| 3526 | 54728 | 13 | 3576 | 55340 | 12 | 3626 | 55943 | 12 | 3676 | 56538 | 11 | 3726 | 57124 | 12 |
| 3527 | 54741 | 12 | 3577 | 55352 | 12 | 3627 | 55955 | 12 | 3677 | 56549 | 12 | 3727 | 57136 | 12 |
| 3528 | 54753 | 12 | 3578 | 55364 | 12 | 3628 | 55967 | 12 | 3678 | 56561 | 12 | 3728 | 57148 | 11 |
| 3529 | 54765 | 12 | 3579 | 55376 | 12 | 3629 | 55979 | 12 | 3679 | 56573 | 12 | 3729 | 57159 | 12 |
| 3530 | 54777 | 13 | 3580 | 55388 | 12 | 3630 | 55991 | 12 | 3680 | 56585 | 12 | 3730 | 57171 | 12 |
| 3531 | 54790 | 12 | 3581 | 55400 | 13 | 3631 | 56003 | 12 | 3681 | 56597 | 11 | 3731 | 57183 | 11 |
| 3532 | 54802 | 12 | 3582 | 55413 | 12 | 3632 | 56015 | 12 | 3682 | 56608 | 12 | 3732 | 57194 | 12 |
| 3533 | 54814 | 13 | 3583 | 55425 | 12 | 3633 | 56027 | 11 | 3683 | 56620 | 12 | 3733 | 57206 | 11 |
| 3534 | 54827 | 12 | 3584 | 55437 | 12 | 3634 | 56038 | 12 | 3684 | 56632 | 12 | 3734 | 57217 | 12 |
| 3535 | 54839 | 12 | 3585 | 55449 | 12 | 3635 | 56050 | 12 | 3685 | 56644 | 12 | 3735 | 57229 | 12 |
| 3536 | 54851 | 13 | 3586 | 55461 | 12 | 3636 | 56062 | 12 | 3686 | 56656 | 11 | 3736 | 57241 | 11 |
| 3537 | 54864 | 12 | 3587 | 55473 | 12 | 3637 | 56074 | 12 | 3687 | 56667 | 12 | 3737 | 57252 | 12 |
| 3538 | 54876 | 12 | 3588 | 55485 | 12 | 3638 | 56086 | 12 | 3688 | 56679 | 12 | 3738 | 57264 | 12 |
| 3539 | 54888 | 12 | 3589 | 55497 | 12 | 3639 | 56098 | 12 | 3689 | 56691 | 12 | 3739 | 57276 | 11 |
| 3540 | 54900 | 13 | 3590 | 55509 | 12 | 3640 | 56110 | 12 | 3690 | 56703 | 11 | 3740 | 57287 | 12 |
| 3541 | 54913 | 12 | 3591 | 55522 | 12 | 3641 | 56122 | 12 | 3691 | 56714 | 12 | 3741 | 57299 | 11 |
| 3542 | 54925 | 12 | 3592 | 55534 | 12 | 3642 | 56134 | 12 | 3692 | 56726 | 12 | 3742 | 57310 | 12 |
| 3543 | 54937 | 12 | 3593 | 55546 | 12 | 3643 | 56146 | 12 | 3693 | 56738 | 12 | 3743 | 57322 | 12 |
| 3544 | 54949 | 13 | 3594 | 55558 | 12 | 3644 | 56158 | 12 | 3694 | 56750 | 11 | 3744 | 57334 | 11 |
| 3545 | 54962 | 12 | 3595 | 55570 | 12 | 3645 | 56170 | 12 | 3695 | 56761 | 12 | 3745 | 57345 | 12 |
| 3546 | 54974 | 12 | 3596 | 55582 | 12 | 3646 | 56182 | 12 | 3696 | 56773 | 12 | 3746 | 57357 | 11 |
| 3547 | 54986 | 12 | 3597 | 55594 | 12 | 3647 | 56194 | 11 | 3697 | 56785 | 12 | 3747 | 57368 | 12 |
| 3548 | 54998 | 13 | 3598 | 55606 | 12 | 3648 | 56205 | 12 | 3698 | 56797 | 12 | 3748 | 57380 | 12 |
| 3549 | 55011 | 12 | 3599 | 55618 | 12 | 3649 | 56217 | 12 | 3699 | 56808 | 11 | 3749 | 57392 | 11 |
| 3550 | 55023 | | 3600 | 55630 | | 3650 | 56229 | | 3700 | 56820 | 12 | 3750 | 57403 | |

| N. | Log. | D | N. | Log. | D | N. | Log. | D | N. | Log. | D | N. | Log. | D |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3751 | 57415 | 12 | 3801 | 57990 | 12 | 3851 | 58557 | 11 | 3901 | 59118 | 12 | 3951 | 59671 | 11 |
| 3752 | 57426 | 11 | 3802 | 58001 | 11 | 3852 | 58569 | 12 | 3902 | 59129 | 11 | 3952 | 59682 | 11 |
| 3753 | 57438 | 12 | 3803 | 58013 | 12 | 3853 | 58580 | 11 | 3903 | 59140 | 11 | 3953 | 59693 | 11 |
| 3754 | 57449 | 11 | 3804 | 58024 | 11 | 3854 | 58591 | 11 | 3904 | 59151 | 11 | 3954 | 59704 | 11 |
| 3755 | 57461 | 12 | 3805 | 58035 | 11 | 3855 | 58602 | 11 | 3905 | 59162 | 11 | 3955 | 59715 | 11 |
| | | 12 | | | 12 | | | 12 | | | 11 | | | 11 |
| 3756 | 57473 | | 3806 | 58047 | | 3856 | 58614 | | 3906 | 59173 | | 3956 | 59726 | |
| 3757 | 57484 | 11 | 3807 | 58058 | 11 | 3857 | 58625 | 11 | 3907 | 59184 | 11 | 3957 | 59737 | 11 |
| 3758 | 57496 | 12 | 3808 | 58070 | 12 | 3858 | 58636 | 11 | 3908 | 59195 | 11 | 3958 | 59748 | 11 |
| 3759 | 57507 | 11 | 3809 | 58081 | 11 | 3859 | 58647 | 11 | 3909 | 59207 | 12 | 3959 | 59759 | 11 |
| 3760 | 57519 | 12 | 3810 | 58092 | 11 | 3860 | 58659 | 12 | 3910 | 59218 | 11 | 3960 | 59770 | 11 |
| | | 11 | | | 12 | | | 11 | | | 11 | | | 10 |
| 3761 | 57530 | | 3811 | 58104 | | 3861 | 58670 | | 3911 | 59229 | | 3961 | 59780 | |
| 3762 | 57542 | 12 | 3812 | 58115 | 11 | 3862 | 58681 | 11 | 3912 | 59240 | 11 | 3962 | 59791 | 11 |
| 3763 | 57553 | 11 | 3813 | 58127 | 12 | 3863 | 58692 | 11 | 3913 | 59251 | 11 | 3963 | 59802 | 11 |
| 3764 | 57565 | 12 | 3814 | 58138 | 11 | 3864 | 58704 | 12 | 3914 | 59262 | 11 | 3964 | 59813 | 11 |
| 3765 | 57576 | 11 | 3815 | 58149 | 11 | 3865 | 58715 | 11 | 3915 | 59273 | 11 | 3965 | 59824 | 11 |
| | | 12 | | | 12 | | | 11 | | | 11 | | | 11 |
| 3766 | 57588 | | 3816 | 58161 | | 3866 | 58726 | | 3916 | 59284 | | 3966 | 59835 | |
| 3767 | 57600 | 12 | 3817 | 58172 | 11 | 3867 | 58737 | 11 | 3917 | 59295 | 11 | 3967 | 59846 | 11 |
| 3768 | 57611 | 11 | 3818 | 58184 | 12 | 3868 | 58749 | 12 | 3918 | 59306 | 11 | 3968 | 59857 | 11 |
| 3769 | 57623 | 12 | 3819 | 58195 | 11 | 3869 | 58760 | 11 | 3919 | 59318 | 12 | 3969 | 59868 | 11 |
| 3770 | 57634 | 11 | 3820 | 58206 | 11 | 3870 | 58771 | 11 | 3920 | 59329 | 11 | 3970 | 59879 | 11 |
| | | 12 | | | 12 | | | 11 | | | 11 | | | 11 |
| 3771 | 57646 | | 3821 | 58218 | | 3871 | 58782 | | 3921 | 59340 | | 3971 | 59890 | |
| 3772 | 57657 | 11 | 3822 | 58229 | 11 | 3872 | 58794 | 12 | 3922 | 59351 | 11 | 3972 | 59901 | 11 |
| 3773 | 57669 | 12 | 3823 | 58240 | 11 | 3873 | 58805 | 11 | 3923 | 59362 | 11 | 3973 | 59912 | 11 |
| 3774 | 57680 | 11 | 3824 | 58252 | 12 | 3874 | 58816 | 11 | 3924 | 59373 | 11 | 3974 | 59923 | 11 |
| 3775 | 57692 | 12 | 3825 | 58263 | 11 | 3875 | 58827 | 11 | 3925 | 59384 | 11 | 3975 | 59934 | 11 |
| | | 11 | | | 11 | | | 11 | | | 11 | | | 11 |
| 3776 | 57703 | | 3826 | 58274 | | 3876 | 58838 | | 3926 | 59395 | | 3976 | 59945 | |
| 3777 | 57715 | 12 | 3827 | 58286 | 12 | 3877 | 58850 | 12 | 3927 | 59406 | 11 | 3977 | 59956 | 11 |
| 3778 | 57726 | 11 | 3828 | 58297 | 11 | 3878 | 58861 | 11 | 3928 | 59417 | 11 | 3978 | 59966 | 10 |
| 3779 | 57738 | 12 | 3829 | 58309 | 12 | 3879 | 58872 | 11 | 3929 | 59428 | 11 | 3979 | 59977 | 11 |
| 3780 | 57749 | 11 | 3830 | 58320 | 11 | 3880 | 58883 | 11 | 3930 | 59439 | 11 | 3980 | 59988 | 11 |
| | | 12 | | | 11 | | | 11 | | | 11 | | | 11 |
| 3781 | 57761 | | 3831 | 58331 | | 3881 | 58894 | | 3931 | 59450 | | 3981 | 59999 | |
| 3782 | 57772 | 11 | 3832 | 58343 | 12 | 3882 | 58906 | 12 | 3932 | 59461 | 11 | 3982 | 60010 | 11 |
| 3783 | 57784 | 12 | 3833 | 58354 | 11 | 3883 | 58917 | 11 | 3933 | 59472 | 11 | 3983 | 60021 | 11 |
| 3784 | 57795 | 11 | 3834 | 58365 | 11 | 3884 | 58928 | 11 | 3934 | 59483 | 11 | 3984 | 60032 | 11 |
| 3785 | 57807 | 12 | 3835 | 58377 | 12 | 3885 | 58939 | 11 | 3935 | 59494 | 11 | 3985 | 60043 | 11 |
| | | 11 | | | 11 | | | 11 | | | 12 | | | 11 |
| 3786 | 57818 | | 3836 | 58388 | | 3886 | 58950 | | 3936 | 59506 | | 3986 | 60054 | |
| 3787 | 57830 | 12 | 3837 | 58399 | 11 | 3887 | 58961 | 12 | 3937 | 59517 | 11 | 3987 | 60065 | 11 |
| 3788 | 57841 | 11 | 3838 | 58410 | 11 | 3888 | 58973 | 11 | 3938 | 59528 | 11 | 3988 | 60076 | 11 |
| 3789 | 57852 | 11 | 3839 | 58422 | 12 | 3889 | 58984 | 11 | 3939 | 59539 | 11 | 3989 | 60086 | 10 |
| 3790 | 57864 | 12 | 3840 | 58433 | 11 | 3890 | 58995 | 11 | 3940 | 59550 | 11 | 3990 | 60097 | 11 |
| | | 11 | | | 11 | | | 11 | | | 11 | | | 11 |
| 3791 | 57875 | | 3841 | 58444 | | 3891 | 59006 | | 3941 | 59561 | | 3991 | 60108 | |
| 3792 | 57887 | 12 | 3842 | 58456 | 12 | 3892 | 59017 | 11 | 3942 | 59572 | 11 | 3992 | 60119 | 11 |
| 3793 | 57898 | 11 | 3843 | 58467 | 11 | 8393 | 59028 | 11 | 3943 | 59583 | 11 | 3993 | 60130 | 11 |
| 3794 | 57910 | 12 | 3844 | 58478 | 11 | 3894 | 59040 | 12 | 3944 | 59594 | 11 | 3994 | 60141 | 11 |
| 3795 | 57921 | 11 | 3845 | 58490 | 12 | 3895 | 59051 | 11 | 3945 | 59605 | 11 | 3995 | 60152 | 11 |
| | | 12 | | | 11 | | | 11 | | | 11 | | | 11 |
| 3796 | 57933 | | 3846 | 58501 | | 3896 | 59062 | | 3946 | 59616 | | 3996 | 60163 | |
| 3797 | 57944 | 11 | 3847 | 85512 | 11 | 3897 | 59073 | 11 | 3947 | 59627 | 11 | 3997 | 60173 | 10 |
| 3798 | 57955 | 11 | 3848 | 58524 | 12 | 3898 | 59084 | 11 | 3948 | 59638 | 11 | 3998 | 60184 | 11 |
| 3799 | 57967 | 12 | 3849 | 58535 | 11 | 3899 | 59095 | 11 | 3949 | 59649 | 11 | 3999 | 60195 | 11 |
| 3800 | 57978 | 11 | 3850 | 58546 | 11 | 3900 | 59106 | 11 | 3950 | 59660 | 11 | 4000 | 60206 | 11 |

| N. | Log. | D | N. | Log. | D | N. | Log. | D | N. | Log. | D | N. | Log. | D |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4001 | 60217 | 11 | 4051 | 60756 | 10 | 4101 | 61289 | 11 | 4151 | 61815 | 10 | 4201 | 62335 | 10 |
| 4002 | 60228 | 11 | 4052 | 60767 | 11 | 4102 | 61300 | 11 | 4152 | 61826 | 11 | 4202 | 62346 | 11 |
| 4003 | 60239 | 11 | 4053 | 60778 | 11 | 4103 | 61310 | 10 | 4153 | 61836 | 10 | 4203 | 62356 | 10 |
| 4004 | 60249 | 10 | 4054 | 60788 | 10 | 4104 | 61321 | 11 | 4154 | 61847 | 11 | 4204 | 62366 | 10 |
| 4005 | 60260 | 11 | 4055 | 60799 | 11 | 4105 | 61331 | 10 | 4155 | 61857 | 10 | 4205 | 62377 | 11 |
| | | 11 | | | 11 | | | 11 | | | | | | 10 |
| 4006 | 60271 | | 4056 | 60810 | | 4106 | 61342 | | 4156 | 61868 | 11 | 4206 | 62387 | |
| 4007 | 60282 | 11 | 4057 | 60821 | 11 | 4107 | 61352 | 10 | 4157 | 61878 | 10 | 4207 | 62397 | 10 |
| 4008 | 60293 | 11 | 4058 | 60831 | 10 | 4108 | 61363 | 11 | 4158 | 61888 | 10 | 4208 | 62408 | 11 |
| 4009 | 60304 | 11 | 4059 | 60842 | 11 | 4109 | 61374 | 11 | 4159 | 61899 | 11 | 4209 | 62418 | 10 |
| 4010 | 60314 | 10 | 4060 | 60853 | 11 | 4110 | 61384 | 10 | 4160 | 61909 | 10 | 4210 | 62428 | 10 |
| | | 11 | | | 10 | | | 11 | | | | | | 11 |
| 4011 | 60325 | | 4061 | 60863 | | 4111 | 61395 | | 4161 | 61920 | 11 | 4211 | 62439 | |
| 4012 | 60336 | 11 | 4062 | 60874 | 11 | 4112 | 61405 | 10 | 4162 | 61930 | 10 | 4212 | 62449 | 10 |
| 4013 | 60347 | 11 | 4063 | 60885 | 11 | 4113 | 61416 | 11 | 4163 | 61941 | 11 | 4213 | 62459 | 10 |
| 4014 | 60358 | 11 | 4064 | 60895 | 10 | 4114 | 61426 | 10 | 4164 | 61951 | 10 | 4214 | 62469 | 10 |
| 4015 | 60369 | 11 | 4065 | 60906 | 11 | 4115 | 61437 | 11 | 4165 | 61962 | 11 | 4215 | 62480 | 11 |
| | | 10 | | | 11 | | | 11 | | | | | | 10 |
| 4016 | 60379 | | 4066 | 60917 | | 4116 | 61448 | | 4166 | 61972 | 10 | 4216 | 62490 | |
| 4017 | 60390 | 11 | 4067 | 60927 | 10 | 4117 | 61458 | 10 | 4167 | 61982 | 10 | 4217 | 62500 | 10 |
| 4018 | 60401 | 11 | 4068 | 60938 | 11 | 4118 | 61469 | 11 | 4168 | 61993 | 11 | 4218 | 62511 | 11 |
| 4019 | 60412 | 11 | 4069 | 60949 | 11 | 4119 | 61479 | 10 | 4169 | 62003 | 10 | 4219 | 62521 | 10 |
| 4020 | 60423 | 11 | 4070 | 60959 | 10 | 4120 | 61490 | 11 | 4170 | 62014 | 11 | 4220 | 62531 | 10 |
| | | 10 | | | 11 | | | 10 | | | 10 | | | 11 |
| 4021 | 60433 | | 4071 | 60970 | | 4121 | 61500 | | 4171 | 62024 | | 4221 | 62542 | |
| 4022 | 60444 | 11 | 4072 | 60981 | 11 | 4122 | 61511 | 11 | 4172 | 62034 | 10 | 4222 | 62552 | 10 |
| 4023 | 60455 | 11 | 4073 | 60991 | 10 | 4123 | 61521 | 10 | 4173 | 62045 | 11 | 4223 | 62562 | 10 |
| 4024 | 60466 | 11 | 4074 | 61002 | 11 | 4124 | 61532 | 11 | 4174 | 62055 | 10 | 4224 | 62572 | 10 |
| 4025 | 60477 | 11 | 4075 | 61013 | 11 | 4125 | 61542 | 10 | 4175 | 62066 | 11 | 4225 | 62583 | 11 |
| | | 10 | | | 10 | | | 11 | | | 10 | | | 10 |
| 4026 | 60487 | | 4076 | 61023 | | 4126 | 61553 | | 4176 | 62076 | | 4226 | 62593 | |
| 4027 | 60498 | 11 | 4077 | 61034 | 11 | 4127 | 61563 | 10 | 4177 | 62086 | 10 | 4227 | 62603 | 10 |
| 4028 | 60509 | 11 | 4078 | 61045 | 11 | 4128 | 61574 | 11 | 4178 | 62097 | 11 | 4228 | 62613 | 10 |
| 4029 | 60520 | 11 | 4079 | 61055 | 10 | 4129 | 61584 | 10 | 4179 | 62107 | 10 | 4229 | 62624 | 11 |
| 4030 | 60531 | 11 | 4080 | 61066 | 11 | 4130 | 61595 | 11 | 4180 | 62118 | 11 | 4230 | 62634 | 10 |
| | | 10 | | | 11 | | | 11 | | | | | | 10 |
| 4031 | 60541 | | 4081 | 61077 | | 4131 | 61606 | | 4181 | 62128 | 10 | 4231 | 62644 | |
| 4032 | 60552 | 11 | 4082 | 61087 | 10 | 4132 | 61616 | 10 | 4182 | 62138 | 10 | 4232 | 62655 | 11 |
| 4033 | 60563 | 11 | 4083 | 61098 | 11 | 4133 | 61627 | 11 | 4183 | 62149 | 10 | 4233 | 62665 | 10 |
| 4034 | 60574 | 11 | 4084 | 61109 | 11 | 4134 | 61637 | 10 | 4184 | 62159 | 10 | 4234 | 62675 | 10 |
| 4035 | 60584 | 10 | 4085 | 61119 | 10 | 4135 | 61648 | 11 | 4185 | 62170 | 11 | 4235 | 62685 | 11 |
| | | 11 | | | 11 | | | 10 | | | 10 | | | |
| 4036 | 60595 | | 4086 | 61130 | | 4136 | 61658 | | 4186 | 62180 | | 4236 | 62696 | 10 |
| 4037 | 60606 | 11 | 4087 | 61140 | 10 | 4137 | 61669 | 11 | 4187 | 62190 | 10 | 4237 | 62706 | 10 |
| 4038 | 60617 | 11 | 4088 | 61151 | 11 | 4138 | 61679 | 10 | 4188 | 62201 | 11 | 4238 | 62716 | 10 |
| 4039 | 60627 | 10 | 4089 | 61162 | 11 | 4139 | 61690 | 10 | 4189 | 62211 | 10 | 4239 | 62726 | 11 |
| 4040 | 60638 | 11 | 4090 | 61172 | 10 | 4140 | 61700 | 10 | 4190 | 62221 | 10 | 4240 | 62737 | 10 |
| | | 11 | | | 11 | | | 11 | | | | | | |
| 4041 | 60649 | | 4091 | 61183 | | 4141 | 61711 | | 4191 | 62232 | 11 | 4241 | 62747 | 10 |
| 4042 | 60660 | 11 | 4092 | 61194 | 11 | 4142 | 61721 | 10 | 4192 | 62242 | 10 | 4242 | 62757 | 10 |
| 4043 | 60670 | 10 | 4093 | 61204 | 10 | 4143 | 61731 | 10 | 4193 | 62252 | 10 | 4243 | 62767 | 11 |
| 4044 | 60681 | 11 | 4094 | 61215 | 10 | 4144 | 61742 | 10 | 4194 | 62263 | 11 | 4244 | 62778 | 10 |
| 4045 | 60692 | 11 | 4095 | 61225 | 10 | 4145 | 61752 | 10 | 4195 | 62273 | 10 | 4245 | 62788 | 10 |
| | | 11 | | | 11 | | | 11 | | | | | | 10 |
| 4046 | 60703 | | 4096 | 61236 | | 4146 | 61763 | | 4196 | 62284 | 11 | 4246 | 62798 | |
| 4047 | 60713 | 10 | 4097 | 61247 | 11 | 4147 | 61773 | 10 | 4197 | 62294 | 10 | 4247 | 62808 | 10 |
| 4048 | 60724 | 11 | 4098 | 61257 | 10 | 4148 | 61784 | 11 | 4198 | 62304 | 10 | 4248 | 62818 | 10 |
| 4049 | 60735 | 11 | 4099 | 61268 | 11 | 4149 | 61794 | 10 | 4199 | 62315 | 11 | 4249 | 62829 | 10 |
| 4050 | 60746 | 11 | 4100 | 61278 | 10 | 4150 | 61805 | 11 | 4200 | 62325 | 10 | 4250 | 62839 | 10 |

| N. | Log. | D | N. | Log. | D | N. | Log. | D | N. | Log. | D | N. | Log. | D |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4251 | 62849 | 10 | 4301 | 63357 | 10 | 4351 | 63859 | 10 | 4401 | 64355 | 10 | 4451 | 64846 | 10 |
| 4252 | 62859 | 10 | 4302 | 63367 | 10 | 4352 | 63869 | 10 | 4402 | 64365 | 10 | 4452 | 64856 | 10 |
| 4253 | 62870 | 11 | 4303 | 63377 | 10 | 4353 | 63879 | 10 | 4403 | 64375 | 10 | 4453 | 64865 | 9 |
| 4254 | 62880 | 10 | 4304 | 63387 | 10 | 4354 | 63889 | 10 | 4404 | 64385 | 10 | 4454 | 64875 | 10 |
| 4255 | 62890 | 10 | 4305 | 63397 | 10 | 4355 | 63899 | 10 | 4405 | 64395 | 10 | 4455 | 64885 | 10 |
| 4256 | 62900 | 10 | 4306 | 63407 | 10 | 4356 | 63909 | 10 | 4406 | 64404 | 9 | 4456 | 64895 | 10 |
| 4257 | 62910 | 10 | 4307 | 63417 | 10 | 4357 | 63919 | 10 | 4407 | 64414 | 10 | 4457 | 64904 | 9 |
| 4258 | 62921 | 11 | 4308 | 63428 | 11 | 4358 | 63929 | 10 | 4408 | 64424 | 10 | 4458 | 64914 | 10 |
| 4259 | 62931 | 10 | 4309 | 63438 | 10 | 4359 | 63939 | 10 | 4409 | 64434 | 10 | 4459 | 64924 | 10 |
| 4260 | 62941 | 10 | 4310 | 63448 | 10 | 4360 | 63949 | 10 | 4410 | 64444 | 10 | 4460 | 64933 | 9 |
| 4261 | 62951 | 10 | 4311 | 63458 | 10 | 4361 | 63959 | 10 | 4411 | 64454 | 10 | 4461 | 64943 | 10 |
| 4262 | 62961 | 10 | 4312 | 63468 | 10 | 4362 | 63969 | 10 | 4412 | 64464 | 10 | 4462 | 64953 | 10 |
| 4263 | 62972 | 11 | 4313 | 63478 | 10 | 4363 | 63979 | 10 | 4413 | 64473 | 9 | 4463 | 64963 | 10 |
| 4264 | 62982 | 10 | 4314 | 63488 | 10 | 4364 | 63988 | 9 | 4414 | 64483 | 10 | 4464 | 64972 | 9 |
| 4265 | 62992 | 10 | 4315 | 63498 | 10 | 4365 | 63998 | 10 | 4415 | 64493 | 10 | 4465 | 64982 | 10 |
| 4266 | 63002 | 10 | 4316 | 63508 | 10 | 4366 | 64008 | 10 | 4416 | 64503 | 10 | 4466 | 64992 | 10 |
| 4267 | 63012 | 10 | 4317 | 63518 | 10 | 4367 | 64018 | 10 | 4417 | 64513 | 10 | 4467 | 65002 | 10 |
| 4268 | 63022 | 11 | 4318 | 63528 | 10 | 4368 | 64028 | 10 | 4418 | 64523 | 10 | 4468 | 65011 | 9 |
| 4269 | 63033 | 10 | 4319 | 63538 | 10 | 4369 | 64038 | 10 | 4419 | 64532 | 9 | 4469 | 65021 | 10 |
| 4270 | 63043 | 10 | 4320 | 63548 | 10 | 4370 | 64048 | 10 | 4420 | 64542 | 10 | 4470 | 65031 | 10 |
| 4271 | 63053 | 10 | 4321 | 63558 | 10 | 4371 | 64058 | 10 | 4421 | 64552 | 10 | 4471 | 65040 | 9 |
| 4272 | 63063 | 10 | 4322 | 63568 | 10 | 4372 | 64068 | 10 | 4422 | 64562 | 10 | 4472 | 65050 | 10 |
| 4273 | 63073 | 10 | 4323 | 63579 | 11 | 4373 | 64078 | 10 | 4423 | 64572 | 10 | 4473 | 65060 | 10 |
| 4274 | 63083 | 10 | 4324 | 63589 | 10 | 4374 | 64088 | 10 | 4424 | 64582 | 10 | 4474 | 65070 | 10 |
| 4275 | 63094 | 11 | 4325 | 63599 | 10 | 4375 | 64098 | 10 | 4425 | 64591 | 9 | 4475 | 65079 | 9 |
| 4276 | 63104 | 10 | 4326 | 63609 | 10 | 4376 | 64108 | 10 | 4426 | 64601 | 10 | 4476 | 65089 | 10 |
| 4277 | 63114 | 10 | 4327 | 63619 | 10 | 4377 | 64118 | 10 | 4427 | 64611 | 10 | 4477 | 65099 | 10 |
| 4278 | 63124 | 10 | 4328 | 63629 | 10 | 4378 | 64128 | 10 | 4428 | 64621 | 10 | 4478 | 65108 | 9 |
| 4279 | 63134 | 10 | 4329 | 63639 | 10 | 4379 | 64137 | 9 | 4429 | 64631 | 10 | 4479 | 65118 | 10 |
| 4280 | 63144 | 10 | 4330 | 63649 | 10 | 4380 | 64147 | 10 | 4430 | 64640 | 9 | 4480 | 65128 | 10 |
| 4281 | 63155 | 11 | 4331 | 63659 | 10 | 4381 | 64157 | 10 | 4431 | 64650 | 10 | 4481 | 65137 | 9 |
| 4282 | 63165 | 10 | 4332 | 63669 | 10 | 4382 | 64167 | 10 | 4432 | 64660 | 10 | 4482 | 65147 | 10 |
| 4283 | 63175 | 10 | 4333 | 63679 | 10 | 4383 | 64177 | 10 | 4433 | 64670 | 10 | 4483 | 65157 | 10 |
| 4284 | 63185 | 10 | 4334 | 63689 | 10 | 4384 | 64187 | 10 | 4434 | 64680 | 10 | 4484 | 65167 | 10 |
| 4285 | 63195 | 10 | 4335 | 63699 | 10 | 4385 | 64197 | 10 | 4435 | 64689 | 9 | 4485 | 65176 | 9 |
| 4286 | 63205 | 10 | 4336 | 63709 | 10 | 4386 | 64207 | 10 | 4436 | 64699 | 10 | 4486 | 65186 | 10 |
| 4287 | 63215 | 10 | 4337 | 63719 | 10 | 4387 | 64217 | 10 | 4437 | 64709 | 10 | 4487 | 65196 | 10 |
| 4288 | 63225 | 11 | 4338 | 63729 | 10 | 4388 | 64227 | 10 | 4438 | 64719 | 10 | 4488 | 65206 | 9 |
| 4289 | 63236 | 10 | 4339 | 63739 | 10 | 4389 | 64237 | 10 | 4439 | 64729 | 10 | 4489 | 65215 | 10 |
| 4290 | 63246 | 10 | 4340 | 63749 | 10 | 4390 | 64246 | 9 | 4440 | 64738 | 9 | 4490 | 65225 | 10 |
| 4291 | 63256 | 10 | 4341 | 63759 | 10 | 4391 | 64256 | 10 | 4441 | 64748 | 10 | 4491 | 65234 | 9 |
| 4292 | 63266 | 10 | 4342 | 63769 | 10 | 4392 | 64266 | 10 | 4442 | 64758 | 10 | 4492 | 65244 | 10 |
| 4293 | 63276 | 10 | 4343 | 63779 | 10 | 4393 | 64276 | 10 | 4443 | 64768 | 10 | 4493 | 65254 | 10 |
| 4294 | 63286 | 10 | 4344 | 63789 | 10 | 4394 | 64286 | 10 | 4444 | 64777 | 9 | 4494 | 65263 | 9 |
| 4295 | 63296 | 10 | 4345 | 63799 | 10 | 4395 | 64296 | 10 | 4445 | 64787 | 10 | 4495 | 65273 | 10 |
| 4296 | 63306 | 11 | 4346 | 63809 | 10 | 4396 | 64306 | 10 | 4446 | 64797 | 10 | 4496 | 65283 | 10 |
| 4297 | 63317 | 10 | 4347 | 63819 | 10 | 4397 | 64316 | 10 | 4447 | 64807 | 10 | 4497 | 65292 | 9 |
| 4298 | 63327 | 10 | 4348 | 63829 | 10 | 4398 | 64326 | 10 | 4448 | 64816 | 9 | 4498 | 65302 | 10 |
| 4299 | 63337 | 10 | 4349 | 63839 | 10 | 4399 | 64335 | 9 | 4449 | 64826 | 10 | 4499 | 65312 | 10 |
| 4300 | 63347 | 10 | 4350 | 63849 | 10 | 4400 | 64345 | 10 | 4450 | 64836 | 10 | 4500 | 65321 | 9 |

| N. | Log. | D | N. | Log. | D | N. | Log. | D | N. | Log. | D | N. | Log. | D |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4501 | 65331 | 10 | 4551 | 65811 | 10 | 4601 | 66285 | 9 | 4651 | 66755 | 10 | 4701 | 67219 | 9 |
| 4502 | 65341 | 10 | 4552 | 65820 | 9 | 4602 | 66295 | 10 | 4652 | 66764 | 9 | 4702 | 67228 | 9 |
| 4503 | 65350 | 9 | 4553 | 65830 | 10 | 4603 | 66304 | 9 | 4653 | 66773 | 9 | 4703 | 67237 | 9 |
| 4504 | 65360 | 10 | 4554 | 65839 | 9 | 4604 | 66314 | 10 | 4654 | 66783 | 10 | 4704 | 67247 | 10 |
| 4505 | 65369 | 9 | 4555 | 65849 | 10 | 4605 | 66323 | 9 | 4655 | 66792 | 9 | 4705 | 67256 | 9 |
| 4506 | 65379 | 10 | 4556 | 65858 | 9 | 4606 | 66332 | 9 | 4656 | 66801 | 9 | 4706 | 67265 | 9 |
| 4507 | 65389 | 10 | 4557 | 65868 | 10 | 4607 | 66342 | 10 | 4657 | 66811 | 10 | 4707 | 67274 | 9 |
| 4508 | 65398 | 9 | 4558 | 65877 | 9 | 4608 | 66351 | 9 | 4658 | 66820 | 9 | 4708 | 67284 | 10 |
| 4509 | 65408 | 10 | 4559 | 65887 | 10 | 4609 | 66361 | 10 | 4659 | 66829 | 9 | 4709 | 67293 | 9 |
| 4510 | 65418 | 10 | 4560 | 65896 | 9 | 4610 | 66370 | 9 | 4660 | 66839 | 10 | 4710 | 67302 | 9 |
| 4511 | 65427 | 9 | 4561 | 65906 | 10 | 4611 | 66380 | 10 | 4661 | 66848 | 9 | 4711 | 67311 | 9 |
| 4512 | 65437 | 10 | 4562 | 65916 | 10 | 4612 | 66389 | 9 | 4662 | 66857 | 9 | 4712 | 67321 | 10 |
| 4513 | 65447 | 10 | 4563 | 65925 | 9 | 4613 | 66398 | 9 | 4663 | 66867 | 10 | 4713 | 67330 | 9 |
| 4514 | 65456 | 9 | 4564 | 65935 | 10 | 4614 | 66408 | 10 | 4664 | 668-6 | 9 | 4714 | 67339 | 9 |
| 4515 | 65466 | 10 | 4565 | 65944 | 9 | 4615 | 66417 | 9 | 4665 | 66885 | 9 | 4715 | 67348 | 9 |
| 4516 | 65475 | 9 | 4566 | 65954 | 10 | 4616 | 66427 | 10 | 4666 | 66894 | 9 | 4716 | 67357 | 9 |
| 4517 | 65485 | 10 | 4567 | 65963 | 9 | 4617 | 66436 | 9 | 4667 | 66904 | 10 | 4717 | 67367 | 10 |
| 4518 | 65495 | 10 | 4568 | 65973 | 10 | 4618 | 66445 | 9 | 4668 | 66913 | 9 | 4718 | 67376 | 9 |
| 4519 | 65504 | 9 | 4569 | 65982 | 9 | 4619 | 66455 | 10 | 4669 | 66922 | 9 | 4719 | 67385 | 9 |
| 4520 | 65514 | 10 | 4570 | 65992 | 10 | 4620 | 66464 | 9 | 4670 | 66932 | 10 | 4720 | 67394 | 9 |
| 4521 | 65523 | 9 | 4571 | 66001 | 9 | 4621 | 66474 | 10 | 4671 | 66941 | 9 | 4721 | 67403 | 9 |
| 4522 | 65533 | 10 | 4572 | 66011 | 10 | 4622 | 66483 | 9 | 4672 | 66950 | 9 | 4722 | 67413 | 10 |
| 4523 | 65543 | 10 | 4573 | 66020 | 9 | 4623 | 66492 | 9 | 4673 | 66960 | 10 | 4723 | 67422 | 9 |
| 4524 | 65552 | 9 | 4574 | 66030 | 10 | 4624 | 66502 | 10 | 4674 | 66969 | 9 | 4724 | 67431 | 9 |
| 4525 | 65562 | 10 | 4575 | 66039 | 9 | 4625 | 66511 | 9 | 4675 | 66978 | 9 | 4725 | 67440 | 9 |
| 4526 | 65571 | 9 | 4576 | 66049 | 10 | 4626 | 66521 | 10 | 4676 | 66987 | 9 | 4726 | 67449 | 9 |
| 4527 | 65581 | 10 | 4577 | 66058 | 9 | 4627 | 66530 | 9 | 4677 | 66997 | 10 | 4727 | 67459 | 10 |
| 4528 | 65591 | 10 | 4578 | 66068 | 10 | 4628 | 66539 | 9 | 4678 | 67006 | 9 | 4728 | 67468 | 9 |
| 4529 | 65600 | 9 | 4579 | 66077 | 9 | 4629 | 66549 | 10 | 4679 | 67015 | 9 | 4729 | 67477 | 9 |
| 4530 | 65610 | 10 | 4580 | 66087 | 10 | 4630 | 66558 | 9 | 4680 | 67025 | 10 | 4730 | 67486 | 9 |
| 4531 | 65619 | 9 | 4581 | 66096 | 9 | 4631 | 66567 | 9 | 4681 | 67034 | 9 | 4731 | 67495 | 9 |
| 4532 | 65629 | 10 | 4582 | 66106 | 10 | 4632 | 66577 | 10 | 4682 | 67043 | 9 | 4732 | 67504 | 9 |
| 4533 | 65639 | 10 | 4583 | 66115 | 9 | 4633 | 66586 | 9 | 4683 | 67052 | 9 | 4733 | 67514 | 10 |
| 4534 | 65648 | 9 | 4584 | 66124 | 9 | 4634 | 66596 | 10 | 4684 | 67062 | 10 | 4734 | 67523 | 9 |
| 4535 | 65658 | 10 | 4585 | 66134 | 10 | 4635 | 66605 | 9 | 4685 | 67071 | 9 | 4735 | 67532 | 9 |
| 4536 | 65667 | 9 | 4586 | 66143 | 9 | 4636 | 66614 | 9 | 4686 | 67080 | 9 | 4736 | 67541 | 9 |
| 4537 | 65677 | 10 | 4587 | 66153 | 10 | 4637 | 66624 | 10 | 4687 | 67089 | 9 | 4737 | 67550 | 9 |
| 4538 | 65686 | 9 | 4588 | 66162 | 9 | 4638 | 66633 | 9 | 4688 | 67099 | 10 | 4738 | 67560 | 10 |
| 4539 | 65696 | 10 | 4589 | 66172 | 10 | 4639 | 66642 | 9 | 4689 | 67108 | 9 | 4739 | 67569 | 9 |
| 4540 | 65706 | 10 | 4590 | 66181 | 9 | 4640 | 66652 | 10 | 4690 | 67117 | 9 | 4740 | 67578 | 9 |
| 4541 | 65715 | 9 | 4591 | 66191 | 10 | 4641 | 66661 | 9 | 4691 | 67127 | 10 | 4741 | 67587 | 9 |
| 4542 | 65725 | 10 | 4592 | 66200 | 9 | 4642 | 66671 | 10 | 4692 | 67136 | 9 | 4742 | 67596 | 9 |
| 4543 | 65734 | 9 | 4593 | 66210 | 10 | 4643 | 66680 | 9 | 4693 | 67145 | 9 | 4743 | 67605 | 9 |
| 4544 | 65744 | 10 | 4594 | 66219 | 9 | 4644 | 66689 | 9 | 4694 | 67154 | 9 | 4744 | 67614 | 9 |
| 4545 | 65753 | 9 | 4595 | 66229 | 10 | 4645 | 66699 | 10 | 4695 | 67164 | 10 | 4745 | 67624 | 10 |
| 4546 | 65763 | 10 | 4596 | 66238 | 9 | 4646 | 66708 | 9 | 4696 | 67173 | 9 | 4746 | 67633 | 9 |
| 4547 | 65772 | 9 | 4597 | 66247 | 9 | 4647 | 66717 | 9 | 4697 | 67182 | 9 | 4747 | 67642 | 9 |
| 4548 | 65782 | 10 | 4598 | 66257 | 10 | 4648 | 66727 | 10 | 4698 | 67191 | 9 | 4748 | 67651 | 9 |
| 4549 | 65792 | 10 | 4599 | 66266 | 9 | 4649 | 66736 | 9 | 4699 | 67201 | 10 | 4749 | 67660 | 9 |
| 4550 | 65801 | 9 | 4600 | 66276 | 10 | 4650 | 66745 | 9 | 4700 | 67210 | 9 | 4750 | 67669 | 9 |

| N. | Log. | D | N. | Log. | D | N. | Log. | D | N. | Log. | D | N. | Log. | D |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4751 | 67679 | 10 | 4801 | 68133 | 9 | 4851 | 68583 | 9 | 4901 | 69028 | 8 | 4951 | 69469 | 8 |
| 4752 | 67688 | 9 | 4802 | 68142 | 9 | 4852 | 68592 | 9 | 4902 | 69037 | 9 | 4952 | 69478 | 9 |
| 4753 | 67697 | 9 | 4803 | 68151 | 9 | 4853 | 68601 | 9 | 4903 | 69046 | 9 | 4953 | 6948- | 9 |
| 4754 | 67706 | 9 | 4804 | 68160 | 9 | 4854 | 68610 | 9 | 4904 | 69055 | 9 | 4954 | 69496 | 8 |
| 4755 | 67715 | 9 | 4805 | 68169 | 9 | 4855 | 68619 | 9 | 4905 | 69064 | 9 | 4955 | 69504 | 9 |
| 4756 | 67724 | 9 | 4806 | 68178 | 9 | 4856 | 68628 | 9 | 4906 | 69073 | 9 | 4956 | 69513 | 9 |
| 4757 | 67733 | 9 | 4807 | 68187 | 9 | 4857 | 68637 | 9 | 4907 | 69082 | 8 | 4957 | 69522 | 9 |
| 4758 | 67742 | 9 | 4808 | 68196 | 9 | 4858 | 68646 | 9 | 4908 | 69 90 | 9 | 4958 | 69531 | 8 |
| 4759 | 67752 | 10 | 4809 | 68205 | 9 | 4859 | 68655 | 9 | 4909 | 69099 | 9 | 4959 | 69539 | 9 |
| 4760 | 67761 | 9 | 4810 | 68215 | 10 | 4860 | 68664 | 9 | 4910 | 69108 | 9 | 4960 | 69548 | 9 |
| 4761 | 67770 | 9 | 4811 | 68224 | 9 | 4861 | 68673 | 9 | 4911 | 69117 | 9 | 4961 | 69557 | 9 |
| 4762 | 67779 | 9 | 4812 | 68233 | 9 | 4862 | 68681 | 8 | 4912 | 69126 | 9 | 4962 | 69566 | 9 |
| 4763 | 67788 | 9 | 4813 | 68242 | 9 | 4863 | 68690 | 9 | 4913 | 69135 | 9 | 4963 | 69574 | 8 |
| 4764 | 67797 | 9 | 4814 | 68251 | 9 | 4864 | 68699 | 9 | 4914 | 69144 | 9 | 4964 | 69583 | 9 |
| 4765 | 67806 | 9 | 4815 | 68260 | 9 | 4865 | 68708 | 9 | 4915 | 69152 | 8 | 4965 | 69592 | 9 |
| 4766 | 67815 | 9 | 4816 | 68269 | 9 | 4866 | 68717 | 9 | 4916 | 69161 | 9 | 4966 | 69601 | 9 |
| 4767 | 67825 | 10 | 4817 | 68278 | 9 | 4867 | 68726 | 9 | 4917 | 69170 | 9 | 4967 | 69609 | 8 |
| 4768 | 67834 | 9 | 4818 | 68287 | 9 | 4868 | 68735 | 9 | 4918 | 69179 | 9 | 4968 | 69618 | 9 |
| 4769 | 67843 | 9 | 4819 | 68296 | 9 | 4869 | 68744 | 9 | 4919 | 69188 | 9 | 4969 | 69627 | 9 |
| 4770 | 67852 | 9 | 4820 | 68305 | 9 | 4870 | 68753 | 9 | 4920 | 69197 | 9 | 4970 | 69636 | 9 |
| 4771 | 67861 | 9 | 4821 | 68314 | 9 | 4871 | 68762 | 9 | 4921 | 69205 | 8 | 4971 | 69644 | 8 |
| 4772 | 67870 | 9 | 4822 | 68323 | 9 | 4872 | 68771 | 9 | 4922 | 69214 | 9 | 4972 | 69653 | 9 |
| 4773 | 67879 | 9 | 4823 | 68332 | 9 | 4873 | 68780 | 9 | 4923 | 69223 | 9 | 4973 | 69662 | 9 |
| 4774 | 67888 | 9 | 4824 | 68341 | 9 | 4874 | 68789 | 9 | 4924 | 69232 | 9 | 4974 | 69671 | 9 |
| 4775 | 67897 | 9 | 4825 | 68350 | 9 | 4875 | 68797 | 8 | 4925 | 69241 | 9 | 4975 | 69679 | 8 |
| 4776 | 67906 | 9 | 4826 | 68359 | 9 | 4876 | 68806 | 9 | 4926 | 69249 | 8 | 4976 | 69688 | 9 |
| 4777 | 67916 | 10 | 4827 | 68368 | 9 | 4877 | 68815 | 9 | 4927 | 69258 | 9 | 4977 | 69697 | 9 |
| 4778 | 67925 | 9 | 4828 | 68377 | 9 | 4878 | 68824 | 9 | 4928 | 69267 | 9 | 4978 | 69705 | 8 |
| 4779 | 67934 | 9 | 4829 | 68386 | 9 | 4879 | 68833 | 9 | 4929 | 69276 | 9 | 4979 | 69714 | 9 |
| 4780 | 67943 | 9 | 4830 | 68395 | 9 | 4880 | 68842 | 9 | 4930 | 69285 | 9 | 4980 | 69723 | 9 |
| 4781 | 67952 | 9 | 4831 | 68404 | 9 | 4881 | 68851 | 9 | 4931 | 69294 | 9 | 4981 | 69732 | 9 |
| 4782 | 67961 | 9 | 4832 | 68413 | 9 | 4882 | 68860 | 9 | 4932 | 69302 | 8 | 4982 | 69740 | 8 |
| 4783 | 67970 | 9 | 4833 | 68422 | 9 | 4883 | 68869 | 9 | 4933 | 69311 | 9 | 4983 | 69749 | 9 |
| 4784 | 67979 | 9 | 4834 | 68431 | 9 | 4884 | 68878 | 9 | 4934 | 69320 | 9 | 4984 | 69758 | 9 |
| 4785 | 67988 | 9 | 4835 | 68440 | 9 | 4885 | 68886 | 8 | 4935 | 69329 | 9 | 4985 | 69767 | 9 |
| 4786 | 67997 | 9 | 4836 | 68449 | 9 | 4886 | 68895 | 9 | 4936 | 69338 | 9 | 4986 | 69775 | 8 |
| 4787 | 68006 | 9 | 4837 | 68458 | 9 | 4887 | 68904 | 9 | 4937 | 69346 | 8 | 4987 | 69784 | 9 |
| 4788 | 68015 | 9 | 4838 | 68467 | 9 | 4888 | 68913 | 9 | 4938 | 69355 | 9 | 4988 | 69793 | 9 |
| 4789 | 68024 | 9 | 4839 | 68476 | 9 | 4889 | 68922 | 9 | 4939 | 69364 | 9 | 4989 | 69801 | 8 |
| 4790 | 68034 | 10 | 4840 | 68485 | 9 | 4890 | 68931 | 9 | 4940 | 69373 | 9 | 4990 | 69810 | 9 |
| 4791 | 68043 | 9 | 4841 | 68494 | 8 | 4891 | 68940 | 9 | 4941 | 69381 | 8 | 4991 | 69819 | 9 |
| 4792 | 68052 | 9 | 4842 | 68502 | 9 | 4892 | 68949 | 9 | 4942 | 69390 | 9 | 4992 | 69827 | 8 |
| 4793 | 68061 | 9 | 4843 | 68511 | 9 | 4893 | 68958 | 9 | 4943 | 69399 | 9 | 4993 | 69836 | 9 |
| 4794 | 68070 | 9 | 4844 | 68520 | 9 | 4894 | 68966 | 8 | 4944 | 69408 | 9 | 4994 | 69845 | 9 |
| 4795 | 68079 | 9 | 4845 | 68529 | 9 | 4895 | 68975 | 9 | 4945 | 69417 | 9 | 4995 | 69854 | 9 |
| 4796 | 68088 | 9 | 4846 | 68538 | 9 | 4896 | 68984 | 9 | 4946 | 69425 | 8 | 4996 | 69862 | 8 |
| 4797 | 68097 | 9 | 4847 | 68547 | 9 | 4897 | 68993 | 9 | 4947 | 69434 | 9 | 4997 | 69871 | 9 |
| 4798 | 68106 | 9 | 4848 | 68556 | 9 | 4898 | 69002 | 9 | 4948 | 69443 | 9 | 4998 | 69880 | 9 |
| 4799 | 68115 | 9 | 4849 | 68565 | 9 | 4899 | 69011 | 9 | 4949 | 69452 | 9 | 4999 | 69888 | 8 |
| 4800 | 68124 | 9 | 4850 | 68574 | 9 | 4900 | 69020 | 9 | 4950 | 69461 | 9 | 5000 | 69897 | 9 |

| N. | Log. | D | N. | Log. | D | N. | Log. | D | N. | Log. | D | N. | Log. | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5001 | 69906 | 9 | 5051 | 70338 | 9 | 5101 | 70766 | 9 | 5151 | 71189 | 8 | 5201 | 71609 | 8 |
| 5002 | 69914 | 8 | 5052 | 70346 | 8 | 5102 | 70774 | 8 | 5152 | 71198 | 9 | 5202 | 71617 | 8 |
| 5003 | 69923 | 9 | 5053 | 70355 | 9 | 5103 | 70783 | 9 | 5153 | 71206 | 8 | 5203 | 71625 | 9 |
| 5004 | 69932 | 9 | 5054 | 70364 | 9 | 5104 | 70791 | 8 | 5154 | 71214 | 9 | 5204 | 71634 | 8 |
| 5005 | 69940 | 8 | 5055 | 70372 | 8 | 5105 | 70800 | 9 | 5155 | 71223 | 8 | 5205 | 71642 | 8 |
| 5006 | 69949 | 9 | 5056 | 70381 | 9 | 5106 | 70808 | 8 | 5156 | 71231 | 9 | 5206 | 71650 | 9 |
| 5007 | 69958 | 9 | 5057 | 70389 | 8 | 5107 | 70817 | 9 | 5157 | 71240 | 9 | 5207 | 71659 | 8 |
| 5008 | 69966 | 8 | 5058 | 70398 | 9 | 5108 | 70825 | 8 | 5158 | 71248 | 8 | 5208 | 71667 | 9 |
| 5009 | 69975 | 9 | 5059 | 70406 | 9 | 5109 | 70834 | 9 | 5159 | 71257 | 8 | 5209 | 71675 | 9 |
| 5010 | 69984 | 9 | 5060 | 70415 | 9 | 5110 | 70842 | 8 | 5160 | 71265 | 8 | 5210 | 71684 | 8 |
| 5011 | 69992 | 8 | 5061 | 70424 | 9 | 5111 | 70851 | 9 | 5161 | 71273 | 8 | 5211 | 71692 | 8 |
| 5012 | 70001 | 9 | 5062 | 70432 | 8 | 5112 | 70859 | 8 | 5162 | 71282 | 9 | 5212 | 71700 | 8 |
| 5013 | 70010 | 9 | 5063 | 70441 | 9 | 5113 | 70868 | 9 | 5163 | 71290 | 8 | 5213 | 71709 | 8 |
| 5014 | 70018 | 8 | 5064 | 70449 | 8 | 5114 | 70876 | 8 | 5164 | 71299 | 9 | 5214 | 71717 | 8 |
| 5015 | 70027 | 9 | 5065 | 70458 | 9 | 5115 | 70885 | 9 | 5165 | 71307 | 8 | 5215 | 71725 | 9 |
| 5016 | 70036 | 9 | 5066 | 70467 | 9 | 5116 | 70893 | 8 | 5166 | 71315 | 8 | 5216 | 71734 | 8 |
| 5017 | 70044 | 8 | 5067 | 70475 | 8 | 5117 | 70902 | 9 | 5167 | 71324 | 9 | 5217 | 71742 | 8 |
| 5018 | 70053 | 9 | 5068 | 70484 | 9 | 5118 | 70910 | 8 | 5168 | 71332 | 8 | 5218 | 71750 | 9 |
| 5019 | 70062 | 9 | 5069 | 70492 | 8 | 5119 | 70919 | 9 | 5169 | 71341 | 9 | 5219 | 71759 | 8 |
| 5020 | 70070 | 8 | 5070 | 70501 | 9 | 5120 | 70927 | 8 | 5170 | 71349 | 8 | 5220 | 71767 | 8 |
| 5021 | 70079 | 9 | 5071 | 70509 | 9 | 5121 | 70935 | 8 | 5171 | 71357 | 9 | 5221 | 71775 | 9 |
| 5022 | 70088 | 9 | 5072 | 70518 | 8 | 5122 | 70944 | 9 | 5172 | 71366 | 8 | 5222 | 71784 | 8 |
| 5023 | 70096 | 8 | 5073 | 70526 | 8 | 5123 | 70952 | 8 | 5173 | 71374 | 9 | 5223 | 71792 | 8 |
| 5024 | 70105 | 9 | 5074 | 70535 | 9 | 5124 | 70961 | 9 | 5174 | 71383 | 8 | 5224 | 71800 | 9 |
| 5025 | 70114 | 9 | 5075 | 70544 | 9 | 5125 | 70969 | 8 | 5175 | 71391 | 8 | 5225 | 71809 | 8 |
| 5026 | 70122 | 8 | 5076 | 70552 | 8 | 5126 | 70978 | 9 | 5176 | 71399 | 9 | 5226 | 71817 | 8 |
| 5027 | 70131 | 9 | 5077 | 70561 | 9 | 5127 | 70986 | 8 | 5177 | 71408 | 8 | 5227 | 71825 | 9 |
| 5028 | 70140 | 9 | 5078 | 70569 | 8 | 5128 | 70995 | 9 | 5178 | 71416 | 8 | 5228 | 71834 | 8 |
| 5029 | 70148 | 8 | 5079 | 70578 | 9 | 5129 | 71003 | 8 | 5179 | 71425 | 9 | 5229 | 71842 | 8 |
| 5030 | 70157 | 9 | 5080 | 70586 | 8 | 5130 | 71012 | 9 | 5180 | 71433 | 8 | 5230 | 71850 | 8 |
| 5031 | 70165 | 9 | 5081 | 70595 | 9 | 5131 | 71020 | 8 | 5181 | 71441 | 8 | 5231 | 71858 | 9 |
| 5032 | 70174 | 9 | 5082 | 70603 | 8 | 5132 | 71029 | 9 | 5182 | 71450 | 9 | 5232 | 71867 | 8 |
| 5033 | 70183 | 9 | 5083 | 70612 | 9 | 5133 | 71037 | 8 | 5183 | 71458 | 8 | 5233 | 71875 | 8 |
| 5034 | 70191 | 8 | 5084 | 70621 | 9 | 5134 | 71046 | 9 | 5184 | 71466 | 9 | 5234 | 71883 | 9 |
| 5035 | 70200 | 9 | 5085 | 70629 | 8 | 5135 | 71054 | 8 | 5185 | 71475 | 8 | 5235 | 71892 | 8 |
| 5036 | 70209 | 9 | 5086 | 70638 | 9 | 5136 | 71063 | 9 | 5186 | 71483 | 8 | 5236 | 71900 | 8 |
| 5037 | 70217 | 8 | 5087 | 70646 | 8 | 5137 | 71071 | 8 | 5187 | 71492 | 9 | 5237 | 71908 | 9 |
| 5038 | 70226 | 9 | 5088 | 70655 | 9 | 5138 | 71079 | 8 | 5188 | 71500 | 8 | 5238 | 71917 | 8 |
| 5039 | 70234 | 8 | 5089 | 70663 | 9 | 5139 | 71088 | 9 | 5189 | 71508 | 8 | 5239 | 71925 | 8 |
| 5040 | 70243 | 9 | 5090 | 70672 | 8 | 5140 | 71096 | 8 | 5190 | 71517 | 9 | 5240 | 71933 | 8 |
| 5041 | 70252 | 8 | 5091 | 70680 | 9 | 5141 | 71105 | 9 | 5191 | 71525 | 8 | 5241 | 71941 | 8 |
| 5042 | 70260 | 9 | 5092 | 70689 | 8 | 5142 | 71113 | 8 | 5192 | 71533 | 9 | 5242 | 71950 | 9 |
| 5043 | 70269 | 9 | 5093 | 70697 | 8 | 5143 | 71122 | 8 | 5193 | 71542 | 8 | 5243 | 71958 | 8 |
| 5044 | 70278 | 8 | 5094 | 70706 | 9 | 5144 | 71130 | 9 | 5194 | 71550 | 9 | 5244 | 71966 | 9 |
| 5045 | 70286 | 9 | 5095 | 70714 | 8 | 5145 | 71139 | 8 | 5195 | 71559 | 8 | 5245 | 71975 | 8 |
| 5046 | 70295 | 8 | 5096 | 70723 | 9 | 5146 | 71147 | 8 | 5196 | 71567 | 8 | 5246 | 71983 | 8 |
| 5047 | 70303 | 9 | 5097 | 70731 | 9 | 5147 | 71155 | 8 | 5197 | 71575 | 9 | 5247 | 71991 | 8 |
| 5048 | 70312 | 9 | 5098 | 70740 | 9 | 5148 | 71164 | 9 | 5198 | 71584 | 8 | 5248 | 71999 | 8 |
| 5049 | 70321 | 8 | 5099 | 70749 | 8 | 5149 | 71172 | 8 | 5199 | 71592 | 8 | 5249 | 72008 | 8 |
| 5050 | 70329 | 9 | 5100 | 70757 | 9 | 5150 | 71181 | 9 | 5200 | 71600 | 9 | 5250 | 72016 | 9 |

| N. | Log. | D | N. | Log. | D | N. | Log. | D | N. | Log. | D | N. | Log. | D |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5251 | 72024 | 8 | 5301 | 72436 | 8 | 5351 | 72843 | 8 | 5401 | 73247 | 8 | 5451 | 73648 | 8 |
| 5252 | 72032 | 8 | 5302 | 72444 | 8 | 5352 | 72852 | 9 | 5402 | 73255 | 8 | 5452 | 73656 | 8 |
| 5253 | 72041 | 9 | 5303 | 72452 | 8 | 5353 | 72860 | 8 | 5403 | 73263 | 8 | 5453 | 73664 | 8 |
| 5254 | 72049 | 8 | 5304 | 72460 | 8 | 5354 | 72868 | 8 | 5404 | 73272 | 9 | 5454 | 73672 | 8 |
| 5255 | 72057 | 8 | 5305 | 72469 | 9 | 5355 | 72876 | 8 | 5405 | 73280 | 8 | 5455 | 73679 | 7 |
| 5256 | 72066 | 9 | 5306 | 72477 | 8 | 5356 | 72884 | 8 | 5406 | 73288 | 8 | 5456 | 73687 | 8 |
| 5257 | 72074 | 8 | 5307 | 72485 | 8 | 5357 | 72892 | 8 | 5407 | 73296 | 8 | 5457 | 73695 | 8 |
| 5258 | 72082 | 8 | 5308 | 72493 | 8 | 5358 | 72900 | 8 | 5408 | 73304 | 8 | 5458 | 73703 | 8 |
| 5259 | 72090 | 9 | 5309 | 72501 | 8 | 5359 | 72908 | 8 | 5409 | 73312 | 8 | 5459 | 73711 | 8 |
| 5260 | 72099 | 8 | 5310 | 72509 | 9 | 5360 | 72916 | 8 | 5410 | 73320 | 8 | 5460 | 73719 | 8 |
| 5261 | 72107 | 8 | 5311 | 72518 | 8 | 5361 | 72925 | 8 | 5411 | 73328 | 8 | 5461 | 73727 | 8 |
| 5262 | 72115 | 8 | 5312 | 72526 | 8 | 5362 | 72933 | 8 | 5412 | 73336 | 8 | 5462 | 73735 | 8 |
| 5263 | 72123 | 8 | 5313 | 72534 | 8 | 5363 | 72941 | 8 | 5413 | 73344 | 8 | 5463 | 73743 | 8 |
| 5264 | 72132 | 9 | 5314 | 72542 | 8 | 5364 | 72949 | 8 | 5414 | 73352 | 8 | 5464 | 73751 | 8 |
| 5265 | 72140 | 8 | 5315 | 72550 | 8 | 5365 | 72957 | 8 | 5415 | 73360 | 8 | 5465 | 73759 | 8 |
| 5266 | 72148 | 8 | 5316 | 72558 | 9 | 5366 | 72965 | 8 | 5416 | 73368 | 8 | 5466 | 73767 | 8 |
| 5267 | 72156 | 9 | 5317 | 72567 | 8 | 5367 | 72973 | 8 | 5417 | 73376 | 8 | 5467 | 73775 | 8 |
| 5268 | 72165 | 8 | 5318 | 72575 | 8 | 5368 | 72981 | 8 | 5418 | 73384 | 8 | 5468 | 73783 | 8 |
| 5269 | 72173 | 8 | 5319 | 72583 | 8 | 5369 | 72989 | 8 | 5419 | 73392 | 8 | 5469 | 73791 | 8 |
| 5270 | 72181 | 8 | 5320 | 72591 | 8 | 5370 | 72997 | 9 | 5420 | 73400 | 8 | 5470 | 73799 | 8 |
| 5271 | 72189 | 9 | 5321 | 72599 | 8 | 5371 | 73006 | 8 | 5421 | 73408 | 8 | 5471 | 73807 | 8 |
| 5272 | 72198 | 8 | 5322 | 72607 | 8 | 5372 | 73014 | 8 | 5422 | 73416 | 8 | 5472 | 73815 | 8 |
| 5273 | 72206 | 8 | 5323 | 72616 | 9 | 5373 | 73022 | 8 | 5423 | 73424 | 8 | 5473 | 73823 | 8 |
| 5274 | 72214 | 8 | 5324 | 72624 | 8 | 5374 | 73030 | 8 | 5424 | 73432 | 8 | 5474 | 73830 | 7 |
| 5275 | 72222 | 8 | 5325 | 72632 | 8 | 5375 | 73038 | 8 | 5425 | 73440 | 8 | 5475 | 73838 | 8 |
| 5276 | 72230 | 9 | 5326 | 72640 | 8 | 5376 | 73046 | 8 | 5426 | 73448 | 8 | 5476 | 73846 | 8 |
| 5277 | 72239 | 8 | 5327 | 72648 | 8 | 5377 | 73054 | 8 | 5427 | 73456 | 8 | 5477 | 73854 | 8 |
| 5278 | 72247 | 8 | 5328 | 72656 | 8 | 5378 | 73062 | 8 | 5428 | 73464 | 8 | 5478 | 73862 | 8 |
| 5279 | 72255 | 8 | 5329 | 72665 | 9 | 5379 | 73070 | 8 | 5429 | 73472 | 8 | 5479 | 73870 | 8 |
| 5280 | 72263 | 9 | 5330 | 72673 | 8 | 5380 | 73078 | 8 | 5430 | 73480 | 8 | 5480 | 73878 | 8 |
| 5281 | 72272 | 8 | 5331 | 72681 | 8 | 5381 | 73086 | 8 | 5431 | 73488 | 8 | 5481 | 73886 | 8 |
| 5282 | 72280 | 8 | 5332 | 72689 | 8 | 5382 | 73094 | 8 | 5432 | 73496 | 8 | 5482 | 73894 | 8 |
| 5283 | 72288 | 8 | 5333 | 72697 | 8 | 5383 | 73102 | 9 | 5433 | 73504 | 8 | 5483 | 73902 | 8 |
| 5284 | 72296 | 8 | 5334 | 72705 | 8 | 5384 | 73111 | 8 | 5434 | 73512 | 8 | 5484 | 73910 | 8 |
| 5285 | 72304 | 9 | 5335 | 72713 | 9 | 5385 | 73119 | 8 | 5435 | 73520 | 8 | 5485 | 73918 | 8 |
| 5286 | 72313 | 8 | 5336 | 72722 | 8 | 5386 | 73127 | 8 | 5436 | 73528 | 8 | 5486 | 73926 | 7 |
| 5287 | 72321 | 8 | 5337 | 72730 | 8 | 5387 | 73135 | 8 | 5437 | 73536 | 8 | 5487 | 73933 | 8 |
| 5288 | 72329 | 8 | 5338 | 72738 | 8 | 5388 | 73143 | 8 | 5438 | 73544 | 8 | 5488 | 73941 | 8 |
| 5289 | 72337 | 9 | 5339 | 72746 | 8 | 5389 | 73151 | 8 | 5439 | 73552 | 8 | 5489 | 73949 | 8 |
| 5290 | 72346 | 8 | 5340 | 72754 | 8 | 5390 | 73159 | 8 | 5440 | 73560 | 8 | 5490 | 73957 | 8 |
| 5291 | 72354 | 8 | 5341 | 72762 | 8 | 5391 | 73167 | 8 | 5441 | 73568 | 8 | 5491 | 73965 | 8 |
| 5292 | 72362 | 8 | 5342 | 72770 | 8 | 5392 | 73175 | 8 | 5442 | 73576 | 8 | 5492 | 73973 | 8 |
| 5293 | 72370 | 8 | 5343 | 72779 | 9 | 5393 | 73183 | 8 | 5443 | 73584 | 8 | 5493 | 73981 | 8 |
| 5294 | 72378 | 9 | 5344 | 72787 | 8 | 5394 | 73191 | 8 | 5444 | 73592 | 8 | 5494 | 73989 | 8 |
| 5295 | 72387 | 8 | 5345 | 72795 | 8 | 5395 | 73199 | 8 | 5445 | 73600 | 8 | 5495 | 73997 | 8 |
| 5296 | 72395 | 8 | 5346 | 72803 | 8 | 5396 | 73207 | 8 | 5446 | 73608 | 8 | 5496 | 74005 | 8 |
| 5297 | 72403 | 8 | 5347 | 72811 | 8 | 5397 | 73215 | 8 | 5447 | 73616 | 8 | 5497 | 74013 | 7 |
| 5298 | 72411 | 8 | 5348 | 72819 | 8 | 5398 | 73223 | 8 | 5448 | 73624 | 8 | 5498 | 74020 | 8 |
| 5299 | 72419 | 9 | 5349 | 72827 | 8 | 5399 | 73231 | 8 | 5449 | 73632 | 8 | 5499 | 74028 | 8 |
| 5300 | 72428 | 9 | 5350 | 72835 | 8 | 5400 | 73239 | 8 | 5450 | 73640 | 8 | 5500 | 74036 | 8 |

| N. | Log. | D | N. | Log. | D | N. | Log. | D | N. | Log. | D | N. | Log. | D |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5501 | 74044 | 8 | 5551 | 74437 | 8 | 5601 | 74827 | 8 | 5651 | 75213 | 8 | 5701 | 75595 | 8 |
| 5502 | 74052 | 8 | 5552 | 74445 | 8 | 5602 | 74834 | 8 | 5652 | 75220 | 7 | 5702 | 75603 | 8 |
| 5503 | 74060 | 8 | 5553 | 74453 | 8 | 5603 | 74842 | 8 | 5653 | 75228 | 8 | 5703 | 75610 | 7 |
| 5504 | 74068 | 8 | 5554 | 74461 | 8 | 5604 | 74850 | 8 | 5654 | 75236 | 8 | 5704 | 75618 | 8 |
| 5505 | 74076 | 8 | 5555 | 74468 | 7 | 5605 | 74858 | 8 | 5655 | 75243 | 7 | 5705 | 75626 | 8 |
| | | 8 | | | 8 | | | 7 | | | 8 | | | |
| 5506 | 74084 | 8 | 5556 | 74476 | 8 | 5606 | 74865 | 8 | 5656 | 75251 | 8 | 5706 | 75633 | 7 |
| 5507 | 74092 | 8 | 5557 | 74484 | 8 | 5607 | 74873 | 8 | 5657 | 75259 | 8 | 5707 | 75641 | 8 |
| 5508 | 74099 | 7 | 5558 | 74492 | 8 | 5608 | 74881 | 8 | 5658 | 75266 | 7 | 5708 | 75648 | 7 |
| 5509 | 74107 | 8 | 5559 | 74500 | 8 | 5609 | 74889 | 8 | 5659 | 75274 | 8 | 5709 | 75656 | 8 |
| 5510 | 74115 | 8 | 5560 | 74507 | 7 | 5610 | 74896 | 7 | 5660 | 75282 | 8 | 5710 | 75664 | 8 |
| | | 8 | | | 8 | | | 8 | | | 7 | | | 7 |
| 5511 | 74123 | 8 | 5561 | 74515 | 8 | 5611 | 74904 | 8 | 5661 | 75289 | 8 | 5711 | 75671 | 8 |
| 5512 | 74131 | 8 | 5562 | 74523 | 8 | 5612 | 74912 | 8 | 5662 | 75297 | 8 | 5712 | 75679 | 7 |
| 5513 | 74139 | 8 | 5563 | 74531 | 8 | 5613 | 74920 | 8 | 5663 | 75305 | 8 | 5713 | 75686 | 8 |
| 5514 | 74147 | 8 | 5564 | 74539 | 8 | 5614 | 74927 | 7 | 5664 | 75312 | 7 | 5714 | 75694 | 8 |
| 5515 | 74155 | 8 | 5565 | 74547 | 8 | 5615 | 74935 | 8 | 5665 | 75320 | 8 | 5715 | 75702 | 8 |
| | | 7 | | | 7 | | | 8 | | | 8 | | | 7 |
| 5516 | 74162 | 8 | 5566 | 74554 | 8 | 5616 | 74943 | 7 | 5666 | 75328 | 7 | 5716 | 75709 | 8 |
| 5517 | 74170 | 8 | 5567 | 74562 | 8 | 5617 | 74950 | 8 | 5667 | 75335 | 8 | 5717 | 75717 | 7 |
| 5518 | 74178 | 8 | 5568 | 74570 | 8 | 5618 | 74958 | 8 | 5668 | 75343 | 8 | 5718 | 75724 | 8 |
| 5519 | 74186 | 8 | 5569 | 74578 | 8 | 5619 | 74966 | 8 | 5669 | 75351 | 8 | 5719 | 75732 | 8 |
| 5520 | 74194 | 8 | 5570 | 74586 | 8 | 5620 | 74974 | 7 | 5670 | 75358 | 7 | 5720 | 75740 | 8 |
| | | 8 | | | 7 | | | 8 | | | 8 | | | 7 |
| 5521 | 74202 | 8 | 5571 | 74593 | 8 | 5621 | 74981 | 8 | 5671 | 75366 | 8 | 5721 | 75747 | 8 |
| 5522 | 74210 | 8 | 5572 | 74601 | 8 | 5622 | 74989 | 8 | 5672 | 75374 | 8 | 5722 | 75755 | 8 |
| 5523 | 74218 | 8 | 5573 | 74609 | 8 | 5623 | 74997 | 8 | 5673 | 75381 | 7 | 5723 | 75762 | 7 |
| 5524 | 74225 | 7 | 5574 | 74617 | 8 | 5624 | 75005 | 8 | 5674 | 75389 | 8 | 5724 | 75770 | 8 |
| 5525 | 74233 | 8 | 5575 | 74624 | 7 | 5625 | 75012 | 7 | 5675 | 75397 | 8 | 5725 | 75778 | 8 |
| | | 8 | | | 8 | | | 8 | | | 7 | | | 7 |
| 5526 | 74241 | 8 | 5576 | 74632 | 8 | 5626 | 75020 | 8 | 5676 | 75404 | 8 | 5726 | 75785 | 8 |
| 5527 | 74249 | 8 | 5577 | 74640 | 8 | 5627 | 75028 | 8 | 5677 | 75412 | 8 | 5727 | 75793 | 8 |
| 5528 | 74257 | 8 | 5578 | 74648 | 8 | 5628 | 75035 | 7 | 5678 | 75420 | 8 | 5728 | 75800 | 7 |
| 5529 | 74265 | 8 | 5579 | 74656 | 8 | 5629 | 75043 | 8 | 5679 | 75427 | 7 | 5729 | 75808 | 8 |
| 5530 | 74273 | 8 | 5580 | 74663 | 7 | 5630 | 75051 | 8 | 5680 | 75435 | 8 | 5730 | 75815 | 7 |
| | | 7 | | | 8 | | | 8 | | | 7 | | | 8 |
| 5531 | 74280 | 8 | 5581 | 74671 | 8 | 5631 | 75059 | 8 | 5681 | 75442 | 8 | 5731 | 75823 | 8 |
| 5532 | 74288 | 8 | 5582 | 74679 | 8 | 5632 | 75066 | 7 | 5682 | 75450 | 8 | 5732 | 75831 | 7 |
| 5533 | 74296 | 8 | 5583 | 74687 | 8 | 5633 | 75074 | 8 | 5683 | 75458 | 8 | 5733 | 75838 | 8 |
| 5534 | 74304 | 8 | 5584 | 74695 | 8 | 5634 | 75082 | 8 | 5684 | 75465 | 7 | 5734 | 75846 | 7 |
| 5535 | 74312 | 8 | 5585 | 74702 | 7 | 5635 | 75089 | 7 | 5685 | 75473 | 8 | 5735 | 75853 | 8 |
| | | 8 | | | 8 | | | 8 | | | 8 | | | |
| 5536 | 74320 | 7 | 5586 | 74710 | 8 | 5636 | 75097 | 8 | 5686 | 75481 | 8 | 5736 | 75861 | 7 |
| 5537 | 74327 | 8 | 5587 | 74718 | 8 | 5637 | 75105 | 8 | 5687 | 75488 | 7 | 5737 | 75868 | 8 |
| 5538 | 74335 | 8 | 5588 | 74726 | 8 | 5638 | 75113 | 7 | 5688 | 75496 | 8 | 5738 | 75876 | 8 |
| 5539 | 74343 | 8 | 5589 | 74733 | 7 | 5639 | 75120 | 8 | 5689 | 75504 | 8 | 5739 | 75884 | 7 |
| 5540 | 74351 | 8 | 5590 | 74741 | 8 | 5640 | 75128 | 8 | 5690 | 75511 | 7 | 5740 | 75891 | 8 |
| | | 8 | | | 8 | | | 8 | | | 8 | | | |
| 5541 | 74359 | 8 | 5591 | 74749 | 8 | 5641 | 75136 | 7 | 5691 | 75519 | 8 | 5741 | 75899 | 7 |
| 5542 | 74367 | 7 | 5592 | 74757 | 7 | 5642 | 75143 | 8 | 5692 | 75526 | 8 | 5742 | 75906 | 8 |
| 5543 | 74374 | 8 | 5593 | 74764 | 8 | 5643 | 75151 | 8 | 5693 | 75534 | 8 | 5743 | 75914 | 7 |
| 5544 | 74382 | 8 | 5594 | 74772 | 8 | 5644 | 75159 | 8 | 5694 | 75542 | 7 | 5744 | 75921 | 8 |
| 5545 | 74390 | 8 | 5595 | 74780 | 8 | 5645 | 75166 | 7 | 5695 | 75549 | 8 | 5745 | 75929 | 8 |
| | | 8 | | | 8 | | | 8 | | | 8 | | | |
| 5546 | 74398 | 8 | 5596 | 74788 | 8 | 5646 | 75174 | 8 | 5696 | 75557 | 8 | 5746 | 75937 | 7 |
| 5547 | 74406 | 8 | 5597 | 74796 | 7 | 5647 | 75182 | 8 | 5697 | 75565 | 8 | 5747 | 75944 | 8 |
| 5548 | 74414 | 7 | 5598 | 74803 | 8 | 5648 | 75189 | 7 | 5698 | 75572 | 8 | 5748 | 75952 | 7 |
| 5549 | 74421 | 8 | 5599 | 74811 | 8 | 5649 | 75197 | 8 | 5699 | 75580 | 8 | 5749 | 75959 | 8 |
| 5550 | 74429 | 8 | 5600 | 74819 | 8 | 5650 | 75205 | 8 | 5700 | 75587 | 7 | 5750 | 75967 | |

| N. | Log. | D | N. | Log. | D | N. | Log. | D | N. | Log. | D | N. | Log. | D |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5751 | 75974 | 7 | 5801 | 76350 | 7 | 5851 | 76723 | 7 | 5901 | 77093 | 8 | 5951 | 77459 | 7 |
| 5752 | 75982 | 8 | 5802 | 76358 | 8 | 5852 | 76730 | 7 | 5902 | 77100 | 7 | 5952 | 77466 | 8 |
| 5753 | 75989 | 7 | 5803 | 76365 | 7 | 5853 | 76738 | 8 | 5903 | 77107 | 8 | 5953 | 77474 | 7 |
| 5754 | 75997 | 8 | 5804 | 76373 | 7 | 5854 | 76745 | 7 | 5904 | 77115 | 7 | 5954 | 77481 | 7 |
| 5755 | 76005 | 8 | 5805 | 76380 | 7 | 5855 | 76753 | 8 | 5905 | 77122 | 7 | 5955 | 77488 | 7 |
| | | | | | 8 | | | | | | | | | |
| 5756 | 76012 | 7 | 5806 | 76388 | 7 | 5856 | 76760 | 8 | 5906 | 77129 | 8 | 5956 | 77495 | 7 |
| 5757 | 76020 | 8 | 5807 | 76395 | 8 | 5857 | 76768 | 7 | 5907 | 77137 | 7 | 5957 | 77503 | 8 |
| 5758 | 76027 | 7 | 5808 | 76403 | 7 | 5858 | 76775 | 7 | 5908 | 77144 | 7 | 5958 | 77510 | 7 |
| 5759 | 76035 | 8 | 5809 | 76410 | 8 | 5859 | 76782 | 8 | 5909 | 77151 | 8 | 5959 | 77517 | 8 |
| 5760 | 76042 | 7 | 5810 | 76418 | 8 | 5860 | 76790 | 7 | 5910 | 77159 | 7 | 5960 | 77525 | 7 |
| | | 8 | | | | | | | | | | | | |
| 5761 | 76050 | 7 | 5811 | 76425 | 7 | 5861 | 76797 | 8 | 5911 | 77166 | 7 | 5961 | 77532 | 7 |
| 5762 | 76057 | 8 | 5812 | 76433 | 8 | 5862 | 76805 | 7 | 5912 | 77173 | 8 | 5962 | 77539 | 8 |
| 5763 | 76065 | 7 | 5813 | 76440 | 7 | 5863 | 76812 | 7 | 5913 | 77181 | 7 | 5963 | 77546 | 7 |
| 5764 | 76072 | 8 | 5814 | 76448 | 8 | 5864 | 76819 | 8 | 5914 | 77188 | 7 | 5964 | 77554 | 7 |
| 5765 | 76080 | 8 | 5815 | 76455 | 7 | 5865 | 76827 | 8 | 5915 | 77195 | 8 | 5965 | 77561 | 7 |
| | | | | | 7 | | | | | | 8 | | | |
| 5766 | 76087 | 8 | 5816 | 76462 | 8 | 5866 | 76834 | 8 | 5916 | 77203 | 7 | 5966 | 77568 | 8 |
| 5767 | 76095 | 8 | 5817 | 76470 | 7 | 5867 | 76842 | 7 | 5917 | 77210 | 7 | 5967 | 77576 | 7 |
| 5768 | 76103 | 7 | 5818 | 76477 | 8 | 5868 | 76849 | 7 | 5918 | 77217 | 8 | 5968 | 77583 | 7 |
| 5769 | 76110 | 8 | 5819 | 76485 | 7 | 5869 | 76856 | 8 | 5919 | 77225 | 7 | 5969 | 77590 | 7 |
| 5770 | 76118 | 8 | 5820 | 76492 | 8 | 5870 | 76864 | 8 | 5920 | 77232 | 7 | 5970 | 77597 | 7 |
| | | 7 | | | | | | | | | 8 | | | 8 |
| 5771 | 76125 | 8 | 5821 | 76500 | 7 | 5871 | 76871 | 7 | 5921 | 77240 | 7 | 5971 | 77605 | 7 |
| 5772 | 76133 | 8 | 5822 | 76507 | 8 | 5872 | 76879 | 8 | 5922 | 77247 | 7 | 5972 | 77612 | 7 |
| 5773 | 76140 | 8 | 5823 | 76515 | 8 | 5873 | 76886 | 7 | 5923 | 77254 | 8 | 5973 | 77619 | 8 |
| 5774 | 76148 | 8 | 5824 | 76522 | 8 | 5874 | 76893 | 8 | 5924 | 77262 | 7 | 5974 | 77627 | 7 |
| 5775 | 76155 | 7 | 5825 | 76530 | 7 | 5875 | 76901 | 8 | 5925 | 77269 | 7 | 5975 | 77634 | 7 |
| | | 8 | | | 7 | | | | | | | | | |
| 5776 | 76163 | 7 | 5826 | 76537 | 8 | 5876 | 76908 | 8 | 5926 | 77276 | 7 | 5976 | 77641 | 7 |
| 5777 | 76170 | 8 | 5827 | 76545 | 7 | 5877 | 76916 | 7 | 5927 | 77283 | 8 | 5977 | 77648 | 8 |
| 5778 | 76178 | 8 | 5828 | 76552 | 8 | 5878 | 76923 | 7 | 5928 | 77291 | 7 | 5978 | 77656 | 7 |
| 5779 | 76185 | 7 | 5829 | 76559 | 8 | 5879 | 76930 | 8 | 5929 | 77298 | 7 | 5979 | 77663 | 7 |
| 5780 | 76193 | 8 | 5830 | 76567 | 8 | 5880 | 76938 | 8 | 5930 | 77305 | 8 | 5980 | 77670 | 7 |
| | | | | | 7 | | | | | | | | | |
| 5781 | 76200 | 8 | 5831 | 76574 | 8 | 5881 | 76945 | 8 | 5931 | 77313 | 7 | 5981 | 77677 | 8 |
| 5782 | 76208 | 8 | 5832 | 76582 | 8 | 5882 | 76953 | 7 | 5932 | 77320 | 7 | 5982 | 77685 | 7 |
| 5783 | 76215 | 8 | 5833 | 76589 | 8 | 5883 | 76960 | 7 | 5933 | 77327 | 8 | 5983 | 77692 | 7 |
| 5784 | 76223 | 7 | 5834 | 76597 | 7 | 5884 | 76967 | 8 | 5934 | 77335 | 7 | 5984 | 77699 | 7 |
| 5785 | 76230 | 7 | 5835 | 76604 | 7 | 5885 | 76975 | 8 | 5935 | 77342 | 7 | 5985 | 77706 | 7 |
| | | 8 | | | 8 | | | | | | | | | 8 |
| 5786 | 76238 | 7 | 5836 | 76612 | 7 | 5886 | 76982 | 7 | 5936 | 77349 | 7 | 5986 | 77714 | 7 |
| 5787 | 76245 | 8 | 5837 | 76619 | 8 | 5887 | 76989 | 8 | 5937 | 77357 | 8 | 5987 | 77721 | 7 |
| 5788 | 76253 | 8 | 5838 | 76626 | 8 | 5888 | 76997 | 8 | 5938 | 77364 | 7 | 5988 | 77728 | 7 |
| 5789 | 76260 | 7 | 5839 | 76634 | 7 | 5889 | 77004 | 7 | 5939 | 77371 | 8 | 5989 | 77735 | 8 |
| 5790 | 76268 | 8 | 5840 | 76641 | 7 | 5890 | 77012 | 8 | 5940 | 77379 | 7 | 5990 | 77743 | 7 |
| | | | | | 8 | | | | | | | | | |
| 5791 | 76275 | 8 | 5841 | 76649 | 7 | 5891 | 77019 | 7 | 5941 | 77386 | 7 | 5991 | 77750 | 7 |
| 5792 | 76283 | 7 | 5842 | 76656 | 8 | 5892 | 77026 | 7 | 5942 | 77393 | 8 | 5992 | 77757 | 7 |
| 5793 | 76290 | 8 | 5843 | 76664 | 8 | 5893 | 77034 | 7 | 5943 | 77401 | 7 | 5993 | 77764 | 8 |
| 5794 | 76298 | 8 | 5844 | 76671 | 7 | 5894 | 77041 | 7 | 5944 | 77408 | 7 | 5994 | 77772 | 7 |
| 5795 | 76305 | 7 | 5845 | 76678 | 7 | 5895 | 77048 | 7 | 5945 | 77415 | 7 | 5995 | 77779 | 7 |
| | | 8 | | | 8 | | | 8 | | | | | | |
| 5796 | 76313 | 7 | 5846 | 76686 | 7 | 5896 | 77056 | 7 | 5946 | 77422 | 8 | 5996 | 77786 | 7 |
| 5797 | 76320 | 8 | 5847 | 76693 | 8 | 5897 | 77063 | 7 | 5947 | 77430 | 7 | 5997 | 77793 | 8 |
| 5798 | 76328 | 8 | 5848 | 76701 | 8 | 5898 | 77070 | 8 | 5948 | 77437 | 7 | 5998 | 77801 | 7 |
| 5799 | 76335 | 7 | 5849 | 76708 | 8 | 5899 | 77078 | 8 | 5949 | 77444 | 8 | 5999 | 77808 | 7 |
| 5800 | 76343 | 8 | 5850 | 76716 | 8 | 5900 | 77085 | 7 | 5950 | 77452 | 7 | 6000 | 77815 | 7 |

| N. | Log. | D | N. | Log. | D | N. | Log. | D | N. | Log. | D | N. | Log. | D |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 6001 | 77822 | 7 | 6051 | 78183 | 7 | 6101 | 78540 | 7 | 6151 | 78895 | 7 | 6201 | 79246 | 7 |
| 6002 | 77830 | 8 | 6052 | 78190 | 7 | 6102 | 78547 | 7 | 6152 | 78902 | 7 | 6202 | 79253 | 7 |
| 6003 | 77837 | 7 | 6053 | 78197 | 7 | 6103 | 78554 | 7 | 6153 | 78909 | 7 | 6203 | 79260 | 7 |
| 6004 | 77844 | 7 | 6054 | 78204 | 7 | 6104 | 78561 | 7 | 6154 | 78916 | 8 | 6204 | 79267 | 7 |
| 6005 | 77851 | 7 | 6055 | 78211 | 7 | 6105 | 78569 | 8 | 6155 | 78923 | 7 | 6205 | 79274 | 7 |
| | | 8 | | | 8 | | | 7 | | | 7 | | | |
| 6006 | 77859 | 7 | 6056 | 78219 | 7 | 6106 | 78576 | 7 | 6156 | 78930 | 7 | 6206 | 79281 | 7 |
| 6007 | 77866 | 7 | 6057 | 78226 | 7 | 6107 | 78583 | 7 | 6157 | 78937 | 7 | 6207 | 79288 | 7 |
| 6008 | 77873 | 7 | 6058 | 78233 | 7 | 6108 | 78590 | 7 | 6158 | 78944 | 7 | 6208 | 79295 | 7 |
| 6009 | 77880 | 7 | 6059 | 78240 | 7 | 6109 | 78597 | 7 | 6159 | 78951 | 7 | 6209 | 79302 | 7 |
| 6010 | 77887 | 7 | 6060 | 78247 | 7 | 6110 | 78604 | 7 | 6160 | 78958 | 7 | 6210 | 79309 | 7 |
| | | 8 | | | 7 | | | 7 | | | 7 | | | |
| 6011 | 77895 | 7 | 6061 | 78254 | 8 | 6111 | 78611 | 7 | 6161 | 78965 | 7 | 6211 | 79316 | 7 |
| 6012 | 77902 | 7 | 6062 | 78262 | 8 | 6112 | 78618 | 7 | 6162 | 78972 | 7 | 6212 | 79323 | 7 |
| 6013 | 77909 | 7 | 6063 | 78269 | 7 | 6113 | 78625 | 7 | 6163 | 78979 | 7 | 6213 | 79330 | 7 |
| 6014 | 77916 | 8 | 6064 | 78276 | 7 | 6114 | 78633 | 8 | 6164 | 78986 | 7 | 6214 | 79337 | 7 |
| 6015 | 77924 | 7 | 6065 | 78283 | 7 | 6115 | 78640 | 7 | 6165 | 78993 | 7 | 6215 | 79344 | 7 |
| | | 7 | | | 7 | | | 7 | | | 7 | | | |
| 6016 | 77931 | 7 | 6066 | 78290 | 7 | 6116 | 78647 | 7 | 6166 | 79000 | 7 | 6216 | 79351 | 7 |
| 6017 | 77938 | 7 | 6067 | 78297 | 7 | 6117 | 78654 | 7 | 6167 | 79007 | 7 | 6217 | 79358 | 7 |
| 6018 | 77945 | 7 | 6068 | 78305 | 8 | 6118 | 78661 | 7 | 6168 | 79014 | 7 | 6218 | 79365 | 7 |
| 6019 | 77952 | 8 | 6069 | 78312 | 7 | 6119 | 78668 | 7 | 6169 | 79021 | 8 | 6219 | 79372 | 7 |
| 6020 | 77960 | 7 | 6070 | 78319 | 7 | 6120 | 78675 | 7 | 6170 | 79029 | 7 | 6220 | 79379 | 7 |
| | | 7 | | | 7 | | | 7 | | | 7 | | | |
| 6021 | 77967 | 7 | 6071 | 78326 | 7 | 6121 | 78682 | 7 | 6171 | 79036 | 7 | 6221 | 79386 | 7 |
| 6022 | 77974 | 7 | 6072 | 78333 | 7 | 6122 | 78689 | 7 | 6172 | 79043 | 7 | 6222 | 79393 | 7 |
| 6023 | 77981 | 7 | 6073 | 78340 | 7 | 6123 | 78696 | 7 | 6173 | 79050 | 7 | 6223 | 79400 | 7 |
| 6024 | 77988 | 8 | 6074 | 78347 | 7 | 6124 | 78704 | 8 | 6174 | 79057 | 7 | 6224 | 79407 | 7 |
| 6025 | 77996 | 7 | 6075 | 78355 | 8 | 6125 | 78711 | 7 | 6175 | 79064 | 7 | 6225 | 79414 | 7 |
| | | 7 | | | 7 | | | 7 | | | 7 | | | |
| 6026 | 78003 | 7 | 6076 | 78362 | 7 | 6126 | 78718 | 7 | 6176 | 79071 | 7 | 6226 | 79421 | 7 |
| 6027 | 78010 | 7 | 6077 | 78369 | 7 | 6127 | 78725 | 7 | 6177 | 79078 | 7 | 6227 | 79428 | 7 |
| 6028 | 78017 | 8 | 6078 | 78376 | 7 | 6128 | 78732 | 7 | 6178 | 79085 | 7 | 6228 | 79435 | 7 |
| 6029 | 78025 | 7 | 6079 | 78383 | 7 | 6129 | 78739 | 7 | 6179 | 79092 | 7 | 6229 | 79442 | 7 |
| 6030 | 78032 | 7 | 6080 | 78390 | 7 | 6130 | 78746 | 7 | 6180 | 79099 | 7 | 6230 | 79449 | 7 |
| | | 7 | | | 8 | | | 7 | | | 7 | | | |
| 6031 | 78039 | 7 | 6081 | 78398 | 7 | 6131 | 78753 | 7 | 6181 | 79106 | 7 | 6231 | 79456 | 7 |
| 6032 | 78046 | 7 | 6082 | 78405 | 7 | 6132 | 78760 | 7 | 6182 | 79113 | 7 | 6232 | 79463 | 7 |
| 6033 | 78053 | 8 | 6083 | 78412 | 7 | 6133 | 78767 | 7 | 6183 | 79120 | 7 | 6233 | 79470 | 7 |
| 6034 | 78061 | 7 | 6084 | 78419 | 7 | 6134 | 78774 | 7 | 6184 | 79127 | 7 | 6234 | 79477 | 7 |
| 6035 | 78068 | 7 | 6085 | 78426 | 7 | 6135 | 78781 | 7 | 6185 | 79134 | 7 | 6235 | 79484 | 7 |
| | | 7 | | | 7 | | | 8 | | | 7 | | | |
| 6036 | 78075 | 7 | 6086 | 78433 | 7 | 6136 | 78789 | 7 | 6186 | 79141 | 7 | 6236 | 79491 | 7 |
| 6037 | 78082 | 7 | 6087 | 78440 | 7 | 6137 | 78796 | 7 | 6187 | 79148 | 7 | 6237 | 79498 | 7 |
| 6038 | 78089 | 8 | 6088 | 78447 | 7 | 6138 | 78803 | 7 | 6188 | 79155 | 7 | 6238 | 79505 | 7 |
| 6039 | 78097 | 7 | 6089 | 78455 | 8 | 6139 | 78810 | 7 | 6189 | 79162 | 7 | 6239 | 79511 | 6 |
| 6040 | 78104 | 7 | 6090 | 78462 | 7 | 6140 | 78817 | 7 | 6190 | 79169 | 7 | 6240 | 79518 | 7 |
| | | 7 | | | 7 | | | 7 | | | 7 | | | |
| 6041 | 78111 | 7 | 6091 | 78469 | 7 | 6141 | 78824 | 7 | 6191 | 79176 | 7 | 6241 | 79525 | 7 |
| 6042 | 78118 | 7 | 6092 | 78476 | 7 | 6142 | 78831 | 7 | 6192 | 79183 | 7 | 6242 | 79532 | 7 |
| 6043 | 78125 | 7 | 6093 | 78483 | 7 | 6143 | 78838 | 7 | 6193 | 79190 | 7 | 6243 | 79539 | 7 |
| 6044 | 78132 | 8 | 6094 | 78490 | 7 | 6144 | 78845 | 7 | 6194 | 79197 | 7 | 6244 | 79546 | 7 |
| 6045 | 78140 | 7 | 6095 | 78497 | 7 | 6145 | 78852 | 7 | 6195 | 79204 | 7 | 6245 | 79553 | 7 |
| | | 7 | | | 7 | | | 7 | | | 7 | | | |
| 6046 | 78147 | 7 | 6096 | 78504 | 7 | 6146 | 78859 | 7 | 6196 | 79211 | 7 | 6246 | 79560 | 7 |
| 6047 | 78154 | 7 | 6097 | 78512 | 8 | 6147 | 78866 | 7 | 6197 | 79218 | 7 | 6247 | 79567 | 7 |
| 6048 | 78161 | 7 | 6098 | 78519 | 7 | 6148 | 78873 | 7 | 6198 | 79225 | 7 | 6248 | 79574 | 7 |
| 6049 | 78168 | 7 | 6099 | 78526 | 7 | 6149 | 78880 | 7 | 6199 | 79232 | 7 | 6249 | 79581 | 7 |
| 6050 | 78176 | 8 | 6100 | 78533 | 7 | 6150 | 78888 | 8 | 6200 | 79239 | 7 | 6250 | 79588 | 7 |

| N. | Log. | D | N. | Log. | D | N. | Log. | D | N. | Log. | D | N. | Log. | D |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 6251 | 79595 | 7 | 6301 | 79941 | 7 | 6351 | 80284 | 7 | 6401 | 80625 | 7 | 6451 | 80963 | 7 |
| 6252 | 79602 | 7 | 6302 | 79948 | 7 | 6352 | 80291 | 7 | 6402 | 80632 | 7 | 6452 | 80969 | 6 |
| 6253 | 79609 | 7 | 6303 | 79955 | 7 | 6353 | 80298 | 7 | 6403 | 80638 | 6 | 6453 | 80976 | 7 |
| 6254 | 79616 | 7 | 6304 | 79962 | 7 | 6354 | 80305 | 7 | 6404 | 80645 | 7 | 6454 | 80983 | 7 |
| 6255 | 79623 | 7 | 6305 | 79969 | 7 | 6355 | 80312 | 7 | 6405 | 80652 | 7 | 6455 | 80990 | 7 |
| | | 7 | | | 6 | | | 7 | | | 7 | | | 6 |
| 6256 | 79630 | 7 | 6306 | 79975 | 7 | 6356 | 80318 | 7 | 6406 | 80659 | 6 | 6456 | 80996 | 7 |
| 6257 | 79637 | 7 | 6307 | 79982 | 7 | 6357 | 80325 | 7 | 6407 | 80665 | 7 | 6457 | 81003 | 7 |
| 6258 | 79644 | 6 | 6308 | 79989 | 7 | 6358 | 80332 | 7 | 6408 | 80672 | 7 | 6458 | 81010 | 7 |
| 6259 | 79650 | 7 | 6309 | 79996 | 7 | 6359 | 80339 | 7 | 6409 | 80679 | 7 | 6459 | 81017 | 6 |
| 6260 | 79657 | 7 | 6310 | 80003 | 7 | 6360 | 80346 | 7 | 6410 | 80686 | 7 | 6460 | 81023 | 7 |
| | | 7 | | | 7 | | | 6 | | | 7 | | | 7 |
| 6261 | 79664 | 7 | 6311 | 80010 | 7 | 6361 | 80353 | 7 | 6411 | 80693 | 6 | 6461 | 81030 | 7 |
| 6262 | 79671 | 7 | 6312 | 80017 | 7 | 6362 | 80359 | 7 | 6412 | 80699 | 7 | 6462 | 81037 | 7 |
| 6263 | 79678 | 7 | 6313 | 80024 | 7 | 6363 | 80366 | 7 | 6413 | 80706 | 7 | 6463 | 81043 | 6 |
| 6264 | 79685 | 7 | 6314 | 80030 | 6 | 6364 | 80373 | 7 | 6414 | 80713 | 7 | 6464 | 81050 | 7 |
| 6265 | 79692 | 7 | 6315 | 80037 | 7 | 6365 | 80380 | 7 | 6415 | 80720 | 7 | 6465 | 81057 | 7 |
| | | 7 | | | 7 | | | 7 | | | 6 | | | 7 |
| 6266 | 79699 | 7 | 6316 | 80044 | 7 | 6366 | 80387 | 6 | 6416 | 80726 | 7 | 6466 | 81064 | 6 |
| 6267 | 79706 | 7 | 6317 | 80051 | 7 | 6367 | 80393 | 7 | 6417 | 80733 | 7 | 6467 | 81070 | 6 |
| 6268 | 79713 | 7 | 6318 | 80058 | 7 | 6368 | 80400 | 7 | 6418 | 80740 | 7 | 6468 | 81077 | 7 |
| 6269 | 79720 | 7 | 6319 | 80065 | 7 | 6369 | 80407 | 7 | 6419 | 80747 | 7 | 6469 | 81084 | 7 |
| 6270 | 79727 | 7 | 6320 | 80072 | 7 | 6370 | 80414 | 7 | 6420 | 80754 | 7 | 6470 | 81090 | 6 |
| | | 7 | | | 7 | | | 7 | | | 6 | | | 7 |
| 6271 | 79734 | 7 | 6321 | 80079 | 6 | 6371 | 80421 | 7 | 6421 | 80760 | 7 | 6471 | 81097 | 7 |
| 6272 | 79741 | 7 | 6322 | 80085 | 7 | 6372 | 80428 | 6 | 6422 | 80767 | 7 | 6472 | 81104 | 7 |
| 6273 | 79748 | 6 | 6323 | 80092 | 7 | 6373 | 80434 | 7 | 6423 | 80774 | 7 | 6473 | 81111 | 6 |
| 6274 | 79754 | 7 | 6324 | 80099 | 7 | 6374 | 80441 | 7 | 6424 | 80781 | 6 | 6474 | 81117 | 7 |
| 6275 | 79761 | 7 | 6325 | 80106 | 7 | 6375 | 80448 | 7 | 6425 | 80787 | 7 | 6475 | 81124 | 7 |
| | | 7 | | | 7 | | | 7 | | | 7 | | | 7 |
| 6276 | 79768 | 7 | 6326 | 80113 | 7 | 6376 | 80455 | 7 | 6426 | 80794 | 7 | 6476 | 81131 | 6 |
| 6277 | 79775 | 7 | 6327 | 80120 | 7 | 6377 | 80462 | 6 | 6427 | 80801 | 7 | 6477 | 81137 | 7 |
| 6278 | 79782 | 7 | 6328 | 80127 | 7 | 6378 | 80468 | 7 | 6428 | 80808 | 6 | 6478 | 81144 | 7 |
| 6279 | 79789 | 7 | 6329 | 80134 | 7 | 6379 | 80475 | 7 | 6429 | 80814 | 7 | 6479 | 81151 | 7 |
| 6280 | 79796 | 7 | 6330 | 80140 | 6 | 6380 | 80482 | 7 | 6430 | 80821 | 7 | 6480 | 81158 | 7 |
| | | 7 | | | 7 | | | 7 | | | 7 | | | 6 |
| 6281 | 79803 | 7 | 6331 | 80147 | 7 | 6381 | 80489 | 7 | 6431 | 80828 | 7 | 6481 | 81164 | 7 |
| 6282 | 79810 | 7 | 6332 | 80154 | 7 | 6382 | 80496 | 7 | 6432 | 80835 | 6 | 6482 | 81171 | 7 |
| 6283 | 79817 | 7 | 6333 | 80161 | 7 | 6383 | 80502 | 6 | 6433 | 80841 | 7 | 6483 | 81178 | 6 |
| 6284 | 79824 | 7 | 6334 | 80168 | 7 | 6384 | 80509 | 7 | 6434 | 80848 | 7 | 6484 | 81184 | 7 |
| 6285 | 79831 | 7 | 6335 | 80175 | 7 | 6385 | 80516 | 7 | 6435 | 80855 | 7 | 6485 | 81191 | 7 |
| | | 6 | | | 7 | | | 7 | | | 7 | | | 7 |
| 6286 | 79837 | 7 | 6336 | 80182 | 6 | 6386 | 80523 | 7 | 6436 | 80862 | 6 | 6486 | 81198 | 6 |
| 6287 | 79844 | 7 | 6337 | 80188 | 7 | 6387 | 80530 | 6 | 6437 | 80868 | 7 | 6487 | 81204 | 7 |
| 6288 | 79851 | 7 | 6338 | 80195 | 7 | 6388 | 80536 | 7 | 6438 | 80875 | 7 | 6488 | 81211 | 7 |
| 6289 | 79858 | 7 | 6339 | 80202 | 7 | 6389 | 80543 | 7 | 6439 | 80882 | 7 | 6489 | 81218 | 6 |
| 6290 | 79865 | 7 | 6340 | 80209 | 7 | 6390 | 80550 | 7 | 6440 | 80889 | 7 | 6490 | 81224 | 7 |
| | | 7 | | | 7 | | | 7 | | | 6 | | | 7 |
| 6291 | 79872 | 7 | 6341 | 80216 | 7 | 6391 | 80557 | 7 | 6441 | 80895 | 7 | 6491 | 81231 | 7 |
| 6292 | 79879 | 7 | 6342 | 80223 | 7 | 6392 | 80564 | 6 | 6442 | 80902 | 7 | 6492 | 81238 | 7 |
| 6293 | 79886 | 7 | 6343 | 80229 | 6 | 6393 | 80570 | 7 | 6443 | 80909 | 7 | 6493 | 81245 | 6 |
| 6294 | 79893 | 7 | 6344 | 80236 | 7 | 6394 | 80577 | 7 | 6444 | 80916 | 6 | 6494 | 81251 | 7 |
| 6295 | 79900 | 6 | 6345 | 80243 | 7 | 6395 | 80584 | 7 | 6445 | 80922 | 7 | 6495 | 81258 | 7 |
| | | 7 | | | 7 | | | 7 | | | 7 | | | 7 |
| 6296 | 79906 | 7 | 6346 | 80250 | 7 | 6396 | 80591 | 7 | 6446 | 80929 | 7 | 6496 | 81265 | 6 |
| 6297 | 79913 | 7 | 6347 | 80257 | 7 | 6397 | 80598 | 6 | 6447 | 80936 | 7 | 6497 | 81271 | 7 |
| 6298 | 79920 | 7 | 6348 | 80264 | 7 | 6398 | 80604 | 7 | 6448 | 80943 | 7 | 6498 | 81278 | 7 |
| 6299 | 79927 | 7 | 6349 | 80271 | 7 | 6399 | 80611 | 7 | 6449 | 80949 | 6 | 6499 | 81285 | 6 |
| 6300 | 79934 | 7 | 6350 | 80277 | 6 | 6400 | 80618 | 7 | 6450 | 80956 | 7 | 6500 | 81291 | 7 |

| N. | Log. | D | N. | Log. | D | N. | Log. | D | N. | Log. | D | N. | Log. | D |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 6501 | 81298 | 7 | 6551 | 81631 | 7 | 6601 | 81961 | 7 | 6651 | 82289 | 7 | 6701 | 82614 | 7 |
| 6502 | 81305 | 7 | 6552 | 81637 | 6 | 6602 | 81968 | 7 | 6652 | 82295 | 6 | 6702 | 82620 | 6 |
| 6503 | 81311 | 6 | 6553 | 81644 | 7 | 6603 | 81974 | 6 | 6653 | 82302 | 7 | 6703 | 82627 | 7 |
| 6504 | 81318 | 7 | 6554 | 81651 | 7 | 6604 | 81981 | 7 | 6654 | 82308 | 6 | 6704 | 82633 | 6 |
| 6505 | 81325 | 7 | 6555 | 81657 | 6 | 6605 | 81987 | 6 | 6655 | 82315 | 7 | 6705 | 82640 | 7 |
| | | 6 | | | 7 | | | 7 | | | 6 | | | 6 |
| 6506 | 81331 | 7 | 6556 | 81664 | 7 | 6606 | 81994 | 7 | 6656 | 82321 | 6 | 6706 | 82646 | 7 |
| 6507 | 81338 | 7 | 6557 | 81671 | 7 | 6607 | 82000 | 6 | 6657 | 82328 | 7 | 6707 | 82653 | 6 |
| 6508 | 81345 | 6 | 6558 | 81677 | 6 | 6608 | 82007 | 7 | 6658 | 82334 | 6 | 6708 | 82659 | 7 |
| 6509 | 81351 | 7 | 6559 | 81684 | 7 | 6609 | 82014 | 7 | 6659 | 82341 | 7 | 6709 | 82666 | 6 |
| 6510 | 81358 | 7 | 6560 | 81690 | 6 | 6610 | 82020 | 6 | 6660 | 82347 | 6 | 6710 | 82672 | 7 |
| | | 7 | | | 7 | | | 7 | | | 7 | | | 7 |
| 6511 | 81365 | 6 | 6561 | 81697 | 7 | 6611 | 82027 | 6 | 6661 | 82354 | 6 | 6711 | 82679 | 6 |
| 6512 | 81371 | 7 | 6562 | 81704 | 7 | 6612 | 82033 | 7 | 6662 | 82360 | 7 | 6712 | 82685 | 7 |
| 6513 | 81378 | 7 | 6563 | 81710 | 6 | 6613 | 82040 | 7 | 6663 | 82367 | 6 | 6713 | 82692 | 6 |
| 6514 | 81385 | 7 | 6564 | 81717 | 7 | 6614 | 82046 | 6 | 6664 | 82373 | 7 | 6714 | 82698 | 7 |
| 6515 | 81391 | 6 | 6565 | 81723 | 6 | 6615 | 82053 | 7 | 6665 | 82380 | 7 | 6715 | 82705 | 7 |
| | | 7 | | | 7 | | | 7 | | | 7 | | | 6 |
| 6516 | 81398 | 7 | 6566 | 81730 | 7 | 6616 | 82060 | 6 | 6666 | 82387 | 6 | 6716 | 82711 | 7 |
| 6517 | 81405 | 7 | 6567 | 81737 | 6 | 6617 | 82066 | 7 | 6667 | 82393 | 7 | 6717 | 82718 | 6 |
| 6518 | 81411 | 6 | 6568 | 81743 | 7 | 6618 | 82073 | 6 | 6668 | 82400 | 7 | 6718 | 82724 | 6 |
| 6519 | 81418 | 7 | 6569 | 81750 | 7 | 6619 | 82079 | 7 | 6669 | 82406 | 6 | 6719 | 82730 | 6 |
| 6520 | 81425 | 7 | 6570 | 81757 | 7 | 6620 | 82086 | 6 | 6670 | 82413 | 7 | 6720 | 82737 | 7 |
| | | 6 | | | 6 | | | 6 | | | 7 | | | 6 |
| 6521 | 81431 | 7 | 6571 | 81763 | 7 | 6621 | 82092 | 7 | 6671 | 82419 | 7 | 6721 | 82743 | 7 |
| 6522 | 81438 | 7 | 6572 | 81770 | 7 | 6622 | 82099 | 6 | 6672 | 82426 | 6 | 6722 | 82750 | 6 |
| 6523 | 81445 | 6 | 6573 | 81776 | 6 | 6623 | 82105 | 7 | 6673 | 82432 | 7 | 6723 | 82756 | 6 |
| 6524 | 81451 | 7 | 6574 | 81783 | 7 | 6624 | 82112 | 7 | 6674 | 82439 | 7 | 6724 | 82763 | 6 |
| 6525 | 81458 | 7 | 6575 | 81790 | 7 | 6625 | 82119 | 7 | 6675 | 82445 | 6 | 6725 | 82769 | 7 |
| | | 6 | | | 6 | | | 6 | | | 7 | | | 6 |
| 6526 | 81465 | 7 | 6576 | 81796 | 7 | 6626 | 82125 | 7 | 6676 | 82452 | 6 | 6726 | 82776 | 6 |
| 6527 | 81471 | 6 | 6577 | 81803 | 6 | 6627 | 82132 | 6 | 6677 | 82458 | 7 | 6727 | 82782 | 7 |
| 6528 | 81478 | 7 | 6578 | 81809 | 7 | 6628 | 82138 | 7 | 6678 | 82465 | 6 | 6728 | 82789 | 6 |
| 6529 | 81485 | 6 | 6579 | 81816 | 7 | 6629 | 82145 | 6 | 6679 | 82471 | 7 | 6729 | 82795 | 7 |
| 6530 | 81491 | 7 | 6580 | 81823 | 7 | 6630 | 82151 | 7 | 6680 | 82478 | 7 | 6730 | 82802 | 7 |
| | | 7 | | | 6 | | | 6 | | | 6 | | | 6 |
| 6531 | 81498 | 7 | 6581 | 81829 | 7 | 6631 | 82158 | 7 | 6681 | 82484 | 7 | 6731 | 82808 | 6 |
| 6532 | 81505 | 6 | 6582 | 81836 | 7 | 6632 | 82164 | 6 | 6682 | 82491 | 6 | 6732 | 82814 | 7 |
| 6533 | 81511 | 6 | 6583 | 81842 | 6 | 6633 | 82171 | 7 | 6683 | 82497 | 7 | 6733 | 82821 | 6 |
| 6534 | 81518 | 7 | 6584 | 81849 | 7 | 6634 | 82178 | 7 | 6684 | 82504 | 6 | 6734 | 82827 | 7 |
| 6535 | 81525 | 7 | 6585 | 81856 | 7 | 6635 | 82184 | 6 | 6685 | 82510 | 7 | 6735 | 82834 | 7 |
| | | 6 | | | 6 | | | 7 | | | 7 | | | 6 |
| 6536 | 81531 | 7 | 6586 | 81862 | 7 | 6636 | 82191 | 6 | 6686 | 82517 | 6 | 6736 | 82840 | 7 |
| 6537 | 81538 | 6 | 6587 | 81869 | 6 | 6637 | 82197 | 7 | 6687 | 82523 | 7 | 6737 | 82847 | 6 |
| 6538 | 81544 | 7 | 6588 | 81875 | 7 | 6638 | 82204 | 6 | 6688 | 82530 | 6 | 6738 | 82853 | 7 |
| 6539 | 81551 | 7 | 6589 | 81882 | 7 | 6639 | 82210 | 7 | 6689 | 82536 | 6 | 6739 | 82860 | 6 |
| 6540 | 81558 | 7 | 6590 | 81889 | 6 | 6640 | 82217 | 7 | 6690 | 82543 | 7 | 6740 | 82866 | 6 |
| | | 6 | | | 6 | | | 6 | | | 6 | | | 6 |
| 6541 | 81564 | 7 | 6591 | 81895 | 7 | 6641 | 82223 | 7 | 6691 | 82549 | 7 | 6741 | 82872 | 7 |
| 6542 | 81571 | 7 | 6592 | 81902 | 6 | 6642 | 82230 | 6 | 6692 | 82556 | 6 | 6742 | 82879 | 6 |
| 6543 | 81578 | 7 | 6593 | 81908 | 6 | 6643 | 82236 | 7 | 6693 | 82562 | 7 | 6743 | 82885 | 7 |
| 6544 | 81584 | 6 | 6594 | 81915 | 7 | 6644 | 82243 | 6 | 6694 | 82569 | 6 | 6744 | 82892 | 6 |
| 6545 | 81591 | 7 | 6595 | 81921 | 6 | 6645 | 82249 | 7 | 6695 | 82575 | 6 | 6745 | 82898 | 6 |
| | | 7 | | | 7 | | | 7 | | | 7 | | | 7 |
| 6546 | 81598 | 6 | 6596 | 81928 | 7 | 6646 | 82256 | 7 | 6696 | 82582 | 7 | 6746 | 82905 | 6 |
| 6547 | 81604 | 7 | 6597 | 81935 | 6 | 6647 | 82263 | 6 | 6697 | 82588 | 6 | 6747 | 82911 | 6 |
| 6548 | 81611 | 6 | 6598 | 81941 | 7 | 6648 | 82269 | 7 | 6698 | 82595 | 7 | 6748 | 82918 | 6 |
| 6549 | 81617 | 7 | 6599 | 81948 | 6 | 6649 | 82276 | 6 | 6699 | 82601 | 6 | 6749 | 82924 | 6 |
| 6550 | 81624 | 7 | 6600 | 81954 | 6 | 6650 | 82282 | 6 | 6700 | 82607 | 6 | 6750 | 82930 | 6 |

| N. | Log. | D | N. | Log. | D | N. | Log. | D | N. | Log. | D | N. | Log. | D |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 6751 | 82937 | 7 | 6801 | 83257 | 6 | 6851 | 83575 | 6 | 6901 | 83891 | 6 | 6951 | 84205 | 7 |
| 6752 | 82943 | 6 | 6802 | 83264 | 7 | 6852 | 83582 | 7 | 6902 | 83897 | 6 | 6952 | 84211 | 6 |
| 6753 | 82950 | 7 | 6803 | 83270 | 6 | 6853 | 83588 | 6 | 6903 | 83904 | 7 | 6953 | 84217 | 6 |
| 6754 | 82956 | 6 | 6804 | 83276 | 6 | 6854 | 83594 | 7 | 6904 | 83910 | 6 | 6954 | 84223 | 6 |
| 6755 | 82963 | 7 | 6805 | 83283 | 7 | 6855 | 83601 | 7 | 6905 | 83916 | 6 | 6955 | 84230 | 7 |
| | | 6 | | | | | | | | | | | | 6 |
| 6756 | 82969 | 6 | 6806 | 83289 | 6 | 6856 | 83607 | 6 | 6906 | 83923 | 7 | 6956 | 84236 | 6 |
| 6757 | 82975 | 6 | 6807 | 83296 | 7 | 6857 | 83613 | 6 | 6907 | 83929 | 6 | 6957 | 84242 | 6 |
| 6758 | 82983 | 7 | 6808 | 83302 | 6 | 6858 | 83620 | 7 | 6908 | 83935 | 6 | 6958 | 84248 | 7 |
| 6759 | 82988 | 6 | 6809 | 83308 | 6 | 6859 | 83626 | 6 | 6909 | 83942 | 7 | 6959 | 84255 | 6 |
| 6760 | 82995 | 7 | 6810 | 83315 | 7 | 6860 | 83632 | 6 | 6910 | 83948 | 6 | 6960 | 84261 | 6 |
| | | 6 | | | | | | | | | | | | 6 |
| 7661 | 83001 | 7 | 6811 | 83321 | 6 | 6861 | 83639 | 6 | 6911 | 83954 | 6 | 6961 | 84267 | 6 |
| 6762 | 83008 | 6 | 6812 | 83327 | 6 | 6862 | 83645 | 6 | 6912 | 83960 | 7 | 6962 | 84273 | 6 |
| 7663 | 83014 | 6 | 6813 | 83334 | 7 | 6863 | 83651 | 6 | 6913 | 83967 | 6 | 6963 | 84280 | 7 |
| 6764 | 83020 | 6 | 6814 | 83340 | 6 | 6864 | 83658 | 7 | 6914 | 83973 | 6 | 6964 | 84286 | 6 |
| 6765 | 83027 | 7 | 6815 | 83347 | 7 | 6865 | 83664 | 6 | 6915 | 83979 | 6 | 6965 | 84292 | 6 |
| | | 6 | | | | | | | | | | | | 6 |
| 6766 | 83033 | 7 | 6816 | 83353 | 6 | 6866 | 83670 | 7 | 6916 | 83985 | 7 | 6966 | 84298 | 7 |
| 6767 | 83040 | 6 | 6817 | 83359 | 6 | 6867 | 83677 | 6 | 6917 | 83992 | 6 | 6967 | 84305 | 6 |
| 6768 | 83046 | 6 | 6818 | 83366 | 7 | 6868 | 83683 | 6 | 6918 | 83998 | 6 | 6968 | 84311 | 6 |
| 6769 | 83052 | 7 | 6819 | 83372 | 6 | 6869 | 83689 | 7 | 6919 | 84004 | 6 | 6969 | 84317 | 6 |
| 6770 | 83059 | 6 | 6820 | 83378 | 6 | 6870 | 83696 | 7 | 6920 | 84011 | 7 | 6970 | 84323 | 7 |
| | | 6 | | | | | | | | | 6 | | | 6 |
| 6771 | 83065 | 7 | 6821 | 83385 | 7 | 6871 | 83702 | 6 | 6921 | 84017 | 6 | 6971 | 84330 | 6 |
| 6772 | 83072 | 6 | 6822 | 83391 | 6 | 6872 | 83708 | 6 | 6922 | 84023 | 6 | 6972 | 84336 | 6 |
| 6773 | 83078 | 7 | 6823 | 83398 | 7 | 6873 | 83715 | 7 | 6923 | 84029 | 7 | 6973 | 84342 | 6 |
| 6774 | 83085 | 6 | 6824 | 83404 | 6 | 6874 | 83721 | 6 | 6924 | 84036 | 6 | 6974 | 84348 | 6 |
| 6775 | 83091 | 6 | 6825 | 83410 | 6 | 6875 | 83727 | 6 | 6925 | 84042 | 6 | 6975 | 84354 | 6 |
| | | 6 | | | | | | | | | | | | 7 |
| 6776 | 83097 | 7 | 6826 | 83417 | 7 | 6876 | 83734 | 6 | 6926 | 84048 | 7 | 6976 | 84361 | 6 |
| 6777 | 83104 | 6 | 6827 | 83423 | 6 | 6877 | 83740 | 6 | 6927 | 84055 | 6 | 6977 | 84367 | 6 |
| 6778 | 83110 | 7 | 6828 | 83429 | 6 | 6878 | 83746 | 6 | 6928 | 84061 | 6 | 6978 | 84373 | 6 |
| 6779 | 83117 | 6 | 6829 | 83436 | 7 | 6879 | 83753 | 7 | 6929 | 84067 | 6 | 6979 | 84379 | 6 |
| 6780 | 83123 | 6 | 6830 | 83442 | 6 | 6880 | 83759 | 6 | 6930 | 84073 | 6 | 6980 | 84386 | 7 |
| | | 6 | | | | | | | | | | | | 6 |
| 6781 | 83129 | 7 | 6831 | 83448 | 7 | 6881 | 83765 | 6 | 6931 | 84080 | 7 | 6981 | 84392 | 6 |
| 6782 | 83136 | 6 | 6832 | 83455 | 7 | 6882 | 83771 | 6 | 6932 | 84086 | 6 | 6982 | 84398 | 6 |
| 6783 | 83142 | 6 | 6833 | 83461 | 6 | 6883 | 83778 | 7 | 6933 | 84092 | 6 | 6983 | 84404 | 6 |
| 6784 | 83149 | 6 | 6834 | 83467 | 6 | 6884 | 83784 | 6 | 6934 | 84098 | 6 | 6984 | 84410 | 7 |
| 6785 | 83155 | 6 | 6835 | 83474 | 7 | 6885 | 83790 | 6 | 6935 | 84105 | 7 | 6985 | 84417 | 6 |
| | | 6 | | | | | | | | | 6 | | | |
| 6786 | 83161 | 7 | 6836 | 83480 | 7 | 6886 | 83797 | 7 | 6936 | 84111 | 6 | 6986 | 84423 | 6 |
| 6787 | 83168 | 6 | 6837 | 83487 | 7 | 6887 | 83803 | 6 | 6937 | 84117 | 6 | 6987 | 84429 | 6 |
| 6788 | 83174 | 7 | 6838 | 83493 | 6 | 6888 | 83809 | 6 | 6938 | 84123 | 6 | 6988 | 84435 | 6 |
| 6789 | 83181 | 6 | 6839 | 83499 | 6 | 6889 | 83816 | 7 | 6939 | 84130 | 7 | 6989 | 84442 | 7 |
| 6790 | 83187 | 6 | 6840 | 83506 | 7 | 6890 | 83822 | 6 | 6940 | 84136 | 6 | 6990 | 84448 | 6 |
| | | 6 | | | | | | | | | 6 | | | |
| 6791 | 83193 | 7 | 6841 | 83512 | 6 | 6891 | 83828 | 6 | 6941 | 84142 | 6 | 6991 | 84454 | 6 |
| 6792 | 83200 | 6 | 6842 | 83518 | 7 | 6892 | 83835 | 7 | 6942 | 84148 | 7 | 6992 | 84460 | 6 |
| 6793 | 83206 | 6 | 6843 | 83525 | 6 | 6893 | 83841 | 6 | 6943 | 84155 | 6 | 6993 | 84466 | 7 |
| 6794 | 83213 | 7 | 6844 | 83531 | 6 | 6894 | 83847 | 6 | 6944 | 84161 | 6 | 6994 | 84473 | 6 |
| 6795 | 83219 | 6 | 6845 | 83537 | 6 | 6895 | 83853 | 6 | 6945 | 84167 | 6 | 6995 | 84479 | 6 |
| | | 6 | | | | | | | | | 6 | | | |
| 6796 | 83225 | 7 | 6846 | 83544 | 7 | 6896 | 83860 | 7 | 6946 | 84173 | 7 | 6996 | 84485 | 6 |
| 6797 | 83232 | 6 | 6847 | 83550 | 6 | 6897 | 83866 | 6 | 6947 | 84180 | 6 | 6997 | 84491 | 6 |
| 6798 | 83238 | 7 | 6848 | 83556 | 7 | 6898 | 83872 | 7 | 6948 | 84186 | 6 | 6998 | 84497 | 7 |
| 6799 | 83245 | 6 | 6849 | 83563 | 6 | 6899 | 83879 | 6 | 6949 | 84192 | 6 | 6999 | 84504 | 6 |
| 6800 | 83251 | | 6850 | 83569 | | 6900 | 83885 | | 6950 | 84198 | | 7000 | 84510 | |

| N. | Log. | D | N. | Log. | D | N. | Log. | D | N. | Log. | D | N. | Log. | D |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 7001 | 84516 | 6 | 7051 | 84825 | 6 | 7101 | 85132 | 6 | 7151 | 85437 | 6 | 7201 | 85739 | 6 |
| 7002 | 84522 | 6 | 7052 | 84831 | 6 | 7102 | 85138 | 6 | 7152 | 85443 | 6 | 7202 | 85745 | 6 |
| 7003 | 84528 | 6 | 7053 | 84837 | 7 | 7103 | 85144 | 6 | 7153 | 85449 | 6 | 7203 | 85751 | 6 |
| 7004 | 84535 | 7 | 7054 | 84844 | 6 | 7104 | 85150 | 6 | 7154 | 85455 | 6 | 7204 | 85757 | 6 |
| 7005 | 84541 | 6 | 7055 | 84850 | 6 | 7105 | 85156 | 6 | 7155 | 85461 | 6 | 7205 | 85763 | 6 |
| | | 6 | | | 6 | | | 7 | | | 6 | | | 6 |
| 7006 | 84547 | 6 | 7056 | 84856 | 6 | 7106 | 85163 | 6 | 7156 | 85467 | 6 | 7206 | 85769 | 6 |
| 7007 | 84553 | 6 | 7057 | 84862 | 6 | 7107 | 85169 | 6 | 7157 | 85473 | 6 | 7207 | 85775 | 6 |
| 7008 | 84559 | 7 | 7058 | 84868 | 6 | 7108 | 85175 | 6 | 7158 | 85479 | 6 | 7208 | 85781 | 7 |
| 7009 | 84566 | 6 | 7059 | 84874 | 6 | 7109 | 85181 | 6 | 7159 | 85485 | 6 | 7209 | 85788 | 6 |
| 7010 | 84572 | 6 | 7060 | 84880 | 6 | 7110 | 85187 | 6 | 7160 | 85491 | 6 | 7210 | 85794 | 6 |
| | | 6 | | | 7 | | | 6 | | | 6 | | | 6 |
| 7011 | 84578 | 6 | 7061 | 84887 | 6 | 7111 | 85193 | 6 | 7161 | 85497 | 6 | 7211 | 85800 | 6 |
| 7012 | 84584 | 6 | 7062 | 84893 | 6 | 7112 | 85199 | 6 | 7162 | 85503 | 6 | 7212 | 85806 | 6 |
| 7013 | 84590 | 7 | 7063 | 84899 | 6 | 7113 | 85205 | 6 | 7163 | 85509 | 6 | 7213 | 85812 | 6 |
| 7014 | 84597 | 6 | 7064 | 84905 | 6 | 7114 | 85211 | 6 | 7154 | 85516 | 7 | 7214 | 85818 | 6 |
| 7015 | 84603 | 6 | 7065 | 84911 | 6 | 7115 | 85217 | 6 | 7165 | 85522 | 6 | 7215 | 85824 | 6 |
| | | 6 | | | 6 | | | 7 | | | 6 | | | 6 |
| 7016 | 84609 | 6 | 7066 | 84917 | 6 | 7116 | 85224 | 6 | 7166 | 85528 | 6 | 7216 | 85830 | 6 |
| 7017 | 84615 | 6 | 7067 | 84924 | 7 | 7117 | 85230 | 6 | 7167 | 85534 | 6 | 7217 | 85836 | 6 |
| 7018 | 84621 | 7 | 7068 | 84930 | 6 | 7118 | 85236 | 6 | 7168 | 85540 | 6 | 7218 | 85842 | 6 |
| 7019 | 84628 | 6 | 7069 | 84936 | 6 | 7119 | 85242 | 6 | 7169 | 85546 | 6 | 7219 | 85848 | 6 |
| 7020 | 84634 | 6 | 7070 | 84942 | 6 | 7120 | 85248 | 6 | 7170 | 85552 | 6 | 7220 | 85854 | 6 |
| | | 6 | | | 6 | | | 6 | | | 6 | | | 6 |
| 7021 | 84640 | 6 | 7071 | 84948 | 6 | 7121 | 85254 | 6 | 7171 | 85558 | 6 | 7221 | 85860 | 6 |
| 7022 | 84646 | 6 | 7072 | 84954 | 6 | 7122 | 85260 | 6 | 7172 | 85564 | 6 | 7222 | 85866 | 6 |
| 7023 | 84652 | 6 | 7073 | 84960 | 7 | 7123 | 85266 | 6 | 7173 | 85570 | 6 | 7223 | 85872 | 6 |
| 7024 | 84658 | 7 | 7074 | 84967 | 6 | 7124 | 85272 | 6 | 7174 | 85576 | 6 | 7224 | 85878 | 6 |
| 7025 | 84665 | 6 | 7075 | 84973 | 6 | 7125 | 85278 | 6 | 7175 | 85582 | 6 | 7225 | 85884 | 6 |
| | | 6 | | | 6 | | | 7 | | | 6 | | | 6 |
| 7026 | 84671 | 6 | 7076 | 84979 | 6 | 7126 | 85285 | 6 | 7176 | 85588 | 6 | 7226 | 85890 | 6 |
| 7027 | 84677 | 6 | 7077 | 84985 | 6 | 7127 | 85291 | 6 | 7177 | 85594 | 6 | 7227 | 85896 | 6 |
| 7028 | 84683 | 6 | 7078 | 84991 | 6 | 7128 | 85297 | 6 | 7178 | 85600 | 6 | 7228 | 85902 | 6 |
| 7029 | 84689 | 7 | 7079 | 84997 | 6 | 7129 | 85303 | 6 | 7179 | 85606 | 6 | 7229 | 85908 | 6 |
| 7030 | 84696 | 6 | 7080 | 85003 | 6 | 7130 | 85309 | 6 | 7180 | 85612 | 6 | 7230 | 85914 | 6 |
| | | 6 | | | 7 | | | 6 | | | 6 | | | 6 |
| 7031 | 84702 | 6 | 7081 | 85009 | 6 | 7131 | 85315 | 6 | 7181 | 85618 | 6 | 7231 | 85920 | 6 |
| 7032 | 84708 | 6 | 7082 | 85016 | 6 | 7132 | 85321 | 6 | 7182 | 85625 | 7 | 7232 | 85926 | 6 |
| 7033 | 84714 | 6 | 7083 | 85022 | 6 | 7133 | 85327 | 6 | 7183 | 85631 | 6 | 7233 | 85932 | 6 |
| 7034 | 84720 | 6 | 7084 | 85028 | 6 | 7134 | 85333 | 6 | 7184 | 85637 | 6 | 7234 | 85938 | 6 |
| 7035 | 84726 | 6 | 7085 | 85034 | 6 | 7135 | 85339 | 6 | 7185 | 85643 | 6 | 7235 | 85944 | 6 |
| | | 7 | | | 6 | | | 6 | | | 6 | | | 6 |
| 7036 | 84733 | 6 | 7086 | 85040 | 6 | 7136 | 85345 | 7 | 7186 | 85649 | 6 | 7236 | 85950 | 6 |
| 7037 | 84739 | 6 | 7087 | 85046 | 6 | 7137 | 85352 | 6 | 7187 | 85655 | 6 | 7237 | 85956 | 6 |
| 7038 | 84745 | 6 | 7088 | 85052 | 6 | 7138 | 85358 | 6 | 7188 | 85661 | 6 | 7238 | 85962 | 6 |
| 7039 | 84751 | 6 | 7089 | 85058 | 7 | 7139 | 85364 | 6 | 7189 | 85667 | 6 | 7239 | 85968 | 6 |
| 7040 | 84757 | 6 | 7090 | 85065 | 6 | 7140 | 85370 | 6 | 7190 | 85673 | 6 | 7240 | 85974 | 6 |
| | | 6 | | | 6 | | | 6 | | | 6 | | | 6 |
| 7041 | 84763 | 7 | 7091 | 85071 | 6 | 7141 | 85376 | 6 | 7191 | 85679 | 6 | 7241 | 85980 | 6 |
| 7042 | 84770 | 6 | 7092 | 85077 | 6 | 7142 | 85382 | 6 | 7192 | 85685 | 6 | 7242 | 85986 | 6 |
| 7043 | 84776 | 6 | 7093 | 85083 | 6 | 7143 | 85388 | 6 | 7193 | 85691 | 6 | 7243 | 85992 | 6 |
| 7044 | 84782 | 6 | 7094 | 85089 | 6 | 7144 | 85394 | 6 | 7194 | 85697 | 6 | 7244 | 85998 | 6 |
| 7045 | 84788 | 6 | 7095 | 85095 | 6 | 7145 | 85400 | 6 | 7195 | 85703 | 6 | 7245 | 86004 | 6 |
| | | 6 | | | 6 | | | 6 | | | 6 | | | 6 |
| 7046 | 84794 | 6 | 7096 | 85101 | 6 | 7146 | 85406 | 6 | 7196 | 85709 | 6 | 7246 | 86010 | 6 |
| 7047 | 84800 | 7 | 7097 | 85107 | 7 | 7147 | 85412 | 6 | 7197 | 85715 | 6 | 7247 | 86016 | 6 |
| 7048 | 84807 | 6 | 7098 | 85114 | 6 | 7148 | 85418 | 7 | 7198 | 85721 | 6 | 7248 | 86022 | 6 |
| 7049 | 84813 | 6 | 7099 | 85120 | 6 | 7149 | 85425 | 6 | 7199 | 85727 | 6 | 7249 | 86028 | 6 |
| 7050 | 84819 | | 7100 | 85126 | | 7150 | 85431 | | 7200 | 85733 | | 7250 | 86034 | |

| N. | Log. | D | N. | Log. | D | N. | Log. | D | N. | Log. | D | N. | Log. | D |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 7251 | 86040 | 6 | 7301 | 86338 | 6 | 7351 | 86635 | 6 | 7401 | 86929 | 6 | 7451 | 87221 | 5 |
| 7252 | 86046 | 6 | 7302 | 86344 | 6 | 7352 | 86641 | 6 | 7402 | 86935 | 6 | 7452 | 87227 | 6 |
| 7253 | 86052 | 6 | 7303 | 86350 | 6 | 7353 | 86646 | 5 | 7403 | 86941 | 6 | 7453 | 87233 | 6 |
| 7254 | 86058 | 6 | 7304 | 86356 | 6 | 7354 | 86652 | 6 | 7404 | 86947 | 6 | 7454 | 87239 | 6 |
| 7255 | 86064 | 6 | 7305 | 86362 | 6 | 7355 | 86658 | 6 | 7405 | 86953 | 5 | 7455 | 87245 | 6 |
| 7256 | 86070 | 6 | 7306 | 86368 | 6 | 7356 | 86664 | 6 | 7406 | 86958 | 6 | 7456 | 87251 | 5 |
| 7257 | 86076 | 6 | 7307 | 86374 | 6 | 7357 | 86670 | 6 | 7407 | 86964 | 6 | 7457 | 87256 | 6 |
| 7258 | 86082 | 6 | 7308 | 86380 | 6 | 7358 | 86676 | 6 | 7408 | 86970 | 6 | 7458 | 87262 | 6 |
| 7259 | 86088 | 6 | 7309 | 86386 | 6 | 7359 | 86682 | 6 | 7409 | 86976 | 6 | 7459 | 87268 | 6 |
| 7260 | 86094 | 6 | 7310 | 86392 | 6 | 7360 | 86688 | 6 | 7410 | 86982 | 6 | 7460 | 87274 | 6 |
| 7261 | 86100 | 6 | 7311 | 86398 | 6 | 7361 | 86694 | 6 | 7411 | 86988 | 6 | 7461 | 87280 | 6 |
| 7262 | 86106 | 6 | 7312 | 86404 | 6 | 7362 | 86700 | 5 | 7412 | 86994 | 5 | 7462 | 87286 | 6 |
| 7263 | 86112 | 6 | 7313 | 86410 | 5 | 7363 | 86705 | 6 | 7413 | 86999 | 6 | 7463 | 87291 | 6 |
| 7264 | 86118 | 6 | 7314 | 86415 | 6 | 7364 | 86711 | 6 | 7414 | 87005 | 6 | 7464 | 87297 | 6 |
| 7265 | 86124 | 6 | 7315 | 86421 | 6 | 7365 | 86717 | 6 | 7415 | 87011 | 6 | 7465 | 87303 | 6 |
| 7266 | 86130 | 6 | 7316 | 86427 | 6 | 7366 | 86723 | 6 | 7416 | 87017 | 6 | 7466 | 87309 | 6 |
| 7267 | 86136 | 5 | 7317 | 86433 | 6 | 7367 | 86729 | 6 | 7417 | 87023 | 6 | 7467 | 87315 | 5 |
| 7268 | 86141 | 6 | 7318 | 86439 | 6 | 7368 | 86735 | 6 | 7418 | 87029 | 6 | 7468 | 87320 | 6 |
| 7269 | 86147 | 6 | 7319 | 86445 | 6 | 7369 | 86741 | 6 | 7419 | 87035 | 5 | 7469 | 87326 | 6 |
| 7270 | 86153 | 6 | 7320 | 86451 | 6 | 7370 | 86747 | 6 | 7420 | 87040 | 6 | 7470 | 87332 | 6 |
| 7271 | 86159 | 6 | 7321 | 86457 | 6 | 7371 | 86753 | 6 | 7421 | 87046 | 6 | 7471 | 87338 | 6 |
| 7272 | 86165 | 6 | 7322 | 86463 | 6 | 7372 | 86759 | 5 | 7422 | 87052 | 6 | 7472 | 87344 | 5 |
| 7273 | 86171 | 6 | 7323 | 86469 | 6 | 7373 | 86764 | 6 | 7423 | 87058 | 6 | 7473 | 87349 | 6 |
| 7274 | 86177 | 6 | 7324 | 86475 | 6 | 7374 | 86770 | 6 | 7424 | 87064 | 6 | 7474 | 87355 | 6 |
| 7275 | 86183 | 6 | 7325 | 86481 | 6 | 7375 | 86776 | 6 | 7425 | 87070 | 5 | 7475 | 87361 | 6 |
| 7276 | 86189 | 6 | 7326 | 86487 | 6 | 7376 | 86782 | 6 | 7426 | 87075 | 6 | 7476 | 87367 | 6 |
| 7277 | 86195 | 6 | 7327 | 86493 | 6 | 7377 | 86788 | 6 | 7427 | 87081 | 6 | 7477 | 87373 | 6 |
| 7278 | 86201 | 6 | 7328 | 86499 | 5 | 7378 | 86794 | 6 | 7428 | 87087 | 6 | 7478 | 87379 | 5 |
| 7279 | 86207 | 6 | 7329 | 86504 | 6 | 7379 | 86800 | 6 | 7429 | 87093 | 6 | 7479 | 87384 | 6 |
| 7280 | 86213 | 6 | 7330 | 86510 | 6 | 7380 | 86806 | 6 | 7430 | 87099 | 6 | 7480 | 87390 | 6 |
| 7281 | 86219 | 6 | 7331 | 86516 | 6 | 7381 | 86812 | 5 | 7431 | 87105 | 6 | 7481 | 87396 | 6 |
| 7282 | 86225 | 6 | 7332 | 86522 | 6 | 7382 | 86817 | 6 | 7432 | 87111 | 5 | 7482 | 87402 | 6 |
| 7283 | 86231 | 6 | 7333 | 86528 | 6 | 7383 | 86823 | 6 | 7433 | 87116 | 6 | 7483 | 87408 | 5 |
| 7284 | 86237 | 6 | 7334 | 86534 | 6 | 7384 | 86829 | 6 | 7434 | 87122 | 6 | 7484 | 87413 | 6 |
| 7285 | 86243 | 6 | 7335 | 86540 | 6 | 7385 | 86835 | 6 | 7435 | 87128 | 6 | 7485 | 87419 | 6 |
| 7286 | 86249 | 6 | 7336 | 86546 | 6 | 7386 | 86841 | 6 | 7436 | 87134 | 6 | 7486 | 87425 | 6 |
| 7287 | 86255 | 6 | 7337 | 86552 | 6 | 7387 | 86847 | 6 | 7437 | 87140 | 6 | 7487 | 87431 | 6 |
| 7288 | 86261 | 6 | 7338 | 86558 | 6 | 7388 | 86853 | 6 | 7438 | 87146 | 6 | 7488 | 87437 | 6 |
| 7289 | 86267 | 6 | 7339 | 86564 | 6 | 7389 | 86859 | 5 | 7439 | 87151 | 6 | 7489 | 87442 | 6 |
| 7290 | 86273 | 6 | 7340 | 86570 | 6 | 7390 | 86864 | 6 | 7440 | 87157 | 6 | 7490 | 87448 | 6 |
| 7291 | 86279 | 6 | 7341 | 86576 | 5 | 7391 | 86870 | 6 | 7441 | 87163 | 6 | 7491 | 87454 | 6 |
| 7292 | 86285 | 6 | 7342 | 86581 | 6 | 7392 | 86876 | 6 | 7442 | 87169 | 6 | 7492 | 87460 | 6 |
| 7293 | 86291 | 6 | 7343 | 86587 | 6 | 7393 | 86882 | 6 | 7443 | 87175 | 6 | 7493 | 87466 | 5 |
| 7294 | 86297 | 6 | 7344 | 86593 | 6 | 7394 | 86888 | 6 | 7444 | 87181 | 5 | 7494 | 87471 | 6 |
| 7295 | 86303 | 5 | 7345 | 86599 | 6 | 7395 | 86894 | 6 | 7445 | 87186 | 6 | 7495 | 87477 | 6 |
| 7296 | 86308 | 6 | 7346 | 86605 | 6 | 7396 | 86900 | 6 | 7446 | 87192 | 6 | 7496 | 87483 | 6 |
| 7297 | 86314 | 6 | 7347 | 86611 | 6 | 7397 | 86906 | 5 | 7447 | 87198 | 6 | 7497 | 87489 | 6 |
| 7298 | 86320 | 6 | 7348 | 86617 | 6 | 7398 | 86911 | 6 | 7448 | 87204 | 6 | 7498 | 87495 | 5 |
| 7299 | 86326 | 6 | 7349 | 86623 | 6 | 7399 | 86917 | 6 | 7449 | 87210 | 6 | 7499 | 87500 | 6 |
| 7300 | 86332 | 6 | 7350 | 86629 | 6 | 7400 | 86923 | 6 | 7450 | 87216 | 6 | 7500 | 87506 | 6 |

| N. | Log. | D | N. | Log. | D | N. | Log. | D | N. | Log. | D | N. | Log. | D |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 7501 | 87512 | 6 | 7551 | 87800 | 5 | 7601 | 88087 | 6 | 7651 | 88372 | 6 | 7701 | 88655 | 6 |
| 7502 | 87518 | 6 | 7552 | 87806 | 6 | 7602 | 88093 | 6 | 7652 | 88377 | 5 | 7702 | 88660 | 5 |
| 7503 | 87523 | 5 | 7553 | 87811 | 6 | 7603 | 88098 | 5 | 7653 | 88383 | 6 | 7703 | 88666 | 6 |
| 7504 | 87529 | 6 | 7554 | 87818 | 6 | 7604 | 88104 | 6 | 7654 | 88389 | 6 | 7704 | 88672 | 6 |
| 7505 | 87535 | 6 | 7555 | 87823 | 5 | 7605 | 88110 | 6 | 7655 | 88395 | 6 | 7705 | 88677 | 5 |
| | | 6 | | | 6 | | | 6 | | | 5 | | | 6 |
| 7506 | 87541 | 6 | 7556 | 87829 | 6 | 7606 | 88116 | 5 | 7656 | 88400 | 6 | 7706 | 88683 | 6 |
| 7507 | 87547 | 6 | 7557 | 87835 | 6 | 7607 | 88121 | 6 | 7657 | 88406 | 6 | 7707 | 88689 | 6 |
| 7508 | 87552 | 5 | 7558 | 87841 | 6 | 7608 | 88127 | 6 | 7658 | 88412 | 6 | 7708 | 88694 | 5 |
| 7509 | 87558 | 6 | 7559 | 87846 | 5 | 7609 | 88133 | 6 | 7659 | 88417 | 5 | 7709 | 88700 | 6 |
| 7510 | 87564 | 6 | 7560 | 87852 | 6 | 7610 | 88138 | 5 | 7660 | 88423 | 6 | 7710 | 88705 | 5 |
| | | 6 | | | 6 | | | 6 | | | 6 | | | 6 |
| 7511 | 87570 | 6 | 7561 | 87858 | 6 | 7611 | 88144 | 6 | 7661 | 88429 | 5 | 7711 | 88711 | 6 |
| 7512 | 87576 | 5 | 7562 | 87864 | 5 | 7612 | 88150 | 6 | 7662 | 88434 | 6 | 7712 | 88717 | 5 |
| 7513 | 87581 | 6 | 7563 | 87869 | 6 | 7613 | 88156 | 5 | 7663 | 88440 | 6 | 7713 | 88722 | 6 |
| 7514 | 87587 | 6 | 7564 | 87875 | 6 | 7614 | 88161 | 6 | 7664 | 88446 | 5 | 7714 | 88728 | 6 |
| 7515 | 87593 | 6 | 7565 | 87881 | 6 | 7615 | 88167 | 6 | 7665 | 88451 | 6 | 7715 | 88734 | 6 |
| | | 6 | | | 6 | | | 6 | | | 6 | | | 5 |
| 7516 | 87599 | 5 | 7566 | 87887 | 5 | 7616 | 88173 | 5 | 7666 | 88457 | 6 | 7716 | 88739 | 6 |
| 7517 | 87604 | 6 | 7567 | 87892 | 6 | 7617 | 88178 | 6 | 7667 | 88463 | 5 | 7717 | 88745 | 5 |
| 7518 | 87610 | 6 | 7568 | 87898 | 6 | 7618 | 88184 | 6 | 7668 | 88468 | 6 | 7718 | 88750 | 6 |
| 7519 | 87616 | 6 | 7569 | 87904 | 6 | 7619 | 88190 | 5 | 7669 | 88474 | 6 | 7719 | 88756 | 6 |
| 7520 | 87622 | 6 | 7570 | 87910 | 6 | 7620 | 88195 | 6 | 7670 | 88480 | 5 | 7720 | 88762 | 6 |
| | | 6 | | | 5 | | | 6 | | | 6 | | | 5 |
| 7521 | 87628 | 5 | 7571 | 87915 | 6 | 7621 | 88201 | 6 | 7671 | 88485 | 6 | 7721 | 88767 | 6 |
| 7522 | 87633 | 6 | 7572 | 87921 | 6 | 7622 | 88207 | 6 | 7672 | 88491 | 6 | 7722 | 88773 | 6 |
| 7523 | 87639 | 6 | 7573 | 87927 | 6 | 7623 | 88213 | 5 | 7673 | 88497 | 5 | 7723 | 88779 | 5 |
| 7524 | 87645 | 6 | 7574 | 87933 | 5 | 7624 | 88218 | 6 | 7974 | 88502 | 6 | 7724 | 88784 | 6 |
| 7525 | 87651 | 5 | 7575 | 87938 | 6 | 7625 | 88224 | 6 | 7675 | 88508 | 6 | 7725 | 88790 | 5 |
| | | 6 | | | 6 | | | 6 | | | 5 | | | 6 |
| 7526 | 87656 | 6 | 7576 | 87944 | 6 | 7626 | 88230 | 5 | 7676 | 88513 | 6 | 7726 | 88795 | 6 |
| 7527 | 87662 | 6 | 7577 | 87950 | 5 | 7627 | 88235 | 6 | 7677 | 88519 | 6 | 7727 | 88801 | 6 |
| 7528 | 87668 | 6 | 7578 | 87955 | 6 | 7628 | 88241 | 6 | 7678 | 88525 | 5 | 7728 | 88807 | 5 |
| 7529 | 87674 | 5 | 7579 | 87961 | 6 | 7629 | 88247 | 6 | 7679 | 88530 | 6 | 7729 | 88812 | 6 |
| 7530 | 87679 | 6 | 7580 | 87967 | 6 | 7630 | 88252 | 6 | 7680 | 88536 | 6 | 7730 | 88818 | 6 |
| | | 6 | | | 6 | | | 6 | | | 6 | | | 6 |
| 7531 | 87685 | 6 | 7581 | 87973 | 5 | 7631 | 88258 | 6 | 7681 | 88542 | 5 | 7731 | 88824 | 5 |
| 7532 | 87691 | 6 | 7582 | 87978 | 6 | 7632 | 88264 | 6 | 7682 | 88547 | 6 | 7732 | 88829 | 6 |
| 7533 | 87697 | 6 | 7583 | 87984 | 6 | 7633 | 88270 | 6 | 7683 | 88553 | 6 | 7733 | 88835 | 5 |
| 7534 | 87703 | 5 | 7584 | 87990 | 6 | 7634 | 88275 | 5 | 7684 | 88559 | 5 | 7734 | 88840 | 6 |
| 7535 | 87708 | 6 | 7585 | 87996 | 5 | 7635 | 88281 | 6 | 7685 | 88564 | 6 | 7735 | 88846 | 6 |
| | | 6 | | | 6 | | | 6 | | | 6 | | | 6 |
| 7536 | 87714 | 6 | 7586 | 88001 | 6 | 7636 | 88287 | 5 | 7686 | 88570 | 6 | 7736 | 88852 | 5 |
| 7537 | 87720 | 6 | 7587 | 88007 | 6 | 7637 | 88292 | 6 | 7687 | 88576 | 5 | 7737 | 88857 | 6 |
| 7538 | 87726 | 5 | 7588 | 88013 | 5 | 7638 | 88298 | 6 | 7688 | 88581 | 6 | 7738 | 88863 | 5 |
| 7539 | 87731 | 6 | 7589 | 88018 | 6 | 7639 | 88304 | 6 | 7689 | 88587 | 6 | 7739 | 88868 | 6 |
| 7540 | 87737 | 6 | 7590 | 88024 | 6 | 7640 | 88309 | 5 | 7690 | 88593 | 5 | 7740 | 88874 | 6 |
| | | 6 | | | 6 | | | 6 | | | 6 | | | 6 |
| 7541 | 87743 | 6 | 7591 | 88030 | 6 | 7641 | 88315 | 6 | 7691 | 88598 | 6 | 7741 | 88880 | 5 |
| 7542 | 87749 | 5 | 7592 | 88036 | 5 | 7642 | 88321 | 6 | 7692 | 88604 | 6 | 7742 | 88885 | 6 |
| 7543 | 87754 | 6 | 7593 | 88041 | 6 | 7643 | 88326 | 6 | 7693 | 88610 | 5 | 7743 | 88891 | 6 |
| 7544 | 87760 | 6 | 7594 | 88047 | 6 | 7644 | 88332 | 6 | 7694 | 88615 | 6 | 7744 | 88897 | 5 |
| 7545 | 87766 | 6 | 7595 | 88053 | 5 | 7645 | 88338 | 6 | 7695 | 88621 | 6 | 7745 | 88902 | 6 |
| | | 6 | | | 6 | | | 5 | | | 6 | | | 6 |
| 7546 | 87772 | 5 | 7596 | 88058 | 6 | 7646 | 88343 | 6 | 7696 | 88627 | 5 | 7746 | 88908 | 5 |
| 7547 | 87777 | 6 | 7597 | 88064 | 6 | 7647 | 88349 | 6 | 7697 | 88632 | 6 | 7747 | 88913 | 6 |
| 7548 | 87783 | 6 | 7598 | 88070 | 6 | 7648 | 88355 | 5 | 7698 | 88638 | 5 | 7748 | 88919 | 6 |
| 7549 | 87789 | 6 | 7599 | 88076 | 6 | 7649 | 88360 | 6 | 7699 | 88643 | 6 | 7749 | 88925 | 5 |
| 7550 | 87795 | | 7600 | 88081 | | 7650 | 88366 | | 7700 | 88649 | | 7750 | 88930 | |

| N. | Log. | D | N. | Log. | D | N. | Log. | D | N. | Log. | D | N. | Log. | D |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 7751 | 88936 | 6 | 7801 | 89215 | 6 | 7851 | 89492 | 5 | 7901 | 89768 | 5 | 7951 | 90042 | 5 |
| 7752 | 88941 | 5 | 7802 | 89221 | 5 | 7852 | 89498 | 6 | 7902 | 89774 | 6 | 7952 | 90048 | 6 |
| 7753 | 88947 | 6 | 7003 | 89226 | 6 | 7853 | 89504 | 6 | 7903 | 89779 | 5 | 7953 | 90053 | 5 |
| 7754 | 88953 | 5 | 7804 | 89232 | 6 | 7854 | 89509 | 5 | 7904 | 89785 | 6 | 7954 | 90059 | 6 |
| 7755 | 88958 | 6 | 7805 | 89237 | 5 | 7855 | 89515 | 6 | 7905 | 89790 | 5 | 7955 | 90064 | 5 |
| 7756 | 88964 | 5 | 7806 | 89243 | 6 | 7856 | 89520 | 5 | 7906 | 89796 | 6 | 7956 | 90069 | 5 |
| 7757 | 88969 | 6 | 7807 | 89248 | 5 | 7857 | 89526 | 6 | 7907 | 89801 | 5 | 7957 | 90075 | 6 |
| 7758 | 88975 | 6 | 7808 | 89254 | 6 | 7858 | 89531 | 5 | 7908 | 89807 | 6 | 7958 | 90080 | 5 |
| 7759 | 88981 | 5 | 7809 | 89260 | 6 | 7859 | 89537 | 6 | 7909 | 89812 | 5 | 7959 | 90086 | 6 |
| 7760 | 88986 | 6 | 7810 | 89265 | 5 | 7860 | 89542 | 5 | 7910 | 89818 | 6 | 7960 | 90091 | 5 |
| 7761 | 88992 | 5 | 7811 | 89271 | 6 | 7861 | 89548 | 6 | 7911 | 89823 | 5 | 7961 | 90097 | 6 |
| 7762 | 88997 | 6 | 7812 | 89276 | 5 | 7862 | 89553 | 5 | 7912 | 89829 | 6 | 7962 | 90102 | 5 |
| 7763 | 89003 | 6 | 7813 | 89282 | 6 | 7863 | 89559 | 6 | 7913 | 89834 | 5 | 7963 | 90108 | 6 |
| 7764 | 89009 | 5 | 7814 | 89287 | 5 | 7864 | 89564 | 5 | 7914 | 89840 | 6 | 7964 | 90113 | 5 |
| 7765 | 89014 | 6 | 7815 | 89293 | 6 | 7865 | 89570 | 6 | 7915 | 89845 | 5 | 7965 | 90119 | 6 |
| 7766 | 89020 | 5 | 7816 | 89298 | 5 | 7866 | 89575 | 5 | 7916 | 89851 | 6 | 7966 | 90124 | 5 |
| 7767 | 89025 | 6 | 7817 | 89304 | 6 | 7867 | 89581 | 6 | 7917 | 89856 | 5 | 7967 | 90129 | 6 |
| 7768 | 89031 | 6 | 7818 | 89310 | 5 | 7868 | 89586 | 5 | 7918 | 89862 | 6 | 7968 | 90135 | 5 |
| 7769 | 89037 | 5 | 7819 | 89315 | 6 | 7869 | 89592 | 6 | 7919 | 89867 | 5 | 7969 | 90140 | 6 |
| 7770 | 89042 | 6 | 7820 | 89321 | 5 | 7870 | 89597 | 5 | 7920 | 89873 | 6 | 7970 | 90146 | 5 |
| 7771 | 89048 | 5 | 7821 | 89326 | 6 | 7871 | 89603 | 6 | 7921 | 89878 | 5 | 7971 | 90151 | 6 |
| 7772 | 89053 | 6 | 7822 | 89332 | 6 | 7872 | 89609 | 5 | 7922 | 89883 | 6 | 7972 | 90157 | 5 |
| 7773 | 89059 | 5 | 7823 | 89337 | 5 | 7873 | 89614 | 6 | 7923 | 89889 | 5 | 7973 | 90162 | 6 |
| 7774 | 89064 | 6 | 7824 | 89343 | 6 | 7874 | 89620 | 5 | 7924 | 89894 | 6 | 7974 | 90168 | 5 |
| 7775 | 89070 | 6 | 7825 | 89348 | 5 | 7875 | 89625 | 6 | 7925 | 89900 | 5 | 7975 | 90173 | 6 |
| 7776 | 89076 | 5 | 7826 | 89354 | 6 | 7876 | 89631 | 6 | 7926 | 89905 | 5 | 7976 | 90179 | 5 |
| 7777 | 89081 | 6 | 7827 | 89360 | 5 | 7877 | 89636 | 5 | 7927 | 89911 | 6 | 7977 | 90184 | 5 |
| 7778 | 89087 | 5 | 7828 | 89365 | 6 | 7878 | 89642 | 6 | 7928 | 89916 | 5 | 7978 | 90189 | 6 |
| 7779 | 89092 | 6 | 7829 | 89371 | 5 | 7879 | 89647 | 5 | 7929 | 89922 | 6 | 7979 | 90195 | 5 |
| 7780 | 89098 | 6 | 7830 | 89376 | 6 | 7880 | 89653 | 6 | 7930 | 89927 | 5 | 7980 | 90200 | 6 |
| 7781 | 89104 | 5 | 7831 | 89382 | 5 | 7881 | 89658 | 6 | 7931 | 89933 | 5 | 7981 | 90206 | 5 |
| 7782 | 89109 | 6 | 7832 | 89387 | 6 | 7882 | 89664 | 5 | 7932 | 89938 | 6 | 7982 | 90211 | 6 |
| 7783 | 89115 | 5 | 7833 | 89393 | 5 | 7883 | 89669 | 6 | 7933 | 89944 | 5 | 7983 | 90217 | 5 |
| 7784 | 89120 | 6 | 7834 | 89398 | 6 | 7884 | 89675 | 5 | 7934 | 89949 | 6 | 7984 | 90222 | 5 |
| 7785 | 89126 | 5 | 7835 | 89404 | 5 | 7885 | 89680 | 6 | 7935 | 89955 | 5 | 7985 | 90227 | 6 |
| 7786 | 89131 | 6 | 7836 | 89409 | 6 | 7886 | 89686 | 5 | 7936 | 89960 | 6 | 7986 | 90233 | 5 |
| 7787 | 89137 | 6 | 7837 | 89415 | 6 | 7887 | 89691 | 6 | 7937 | 89966 | 5 | 7987 | 90238 | 6 |
| 7788 | 89143 | 5 | 7838 | 89421 | 5 | 7888 | 89697 | 5 | 7938 | 89971 | 6 | 7988 | 90244 | 5 |
| 7789 | 89148 | 6 | 7839 | 89426 | 6 | 7889 | 89702 | 6 | 7939 | 89977 | 5 | 7989 | 90249 | 6 |
| 7790 | 89154 | 5 | 7840 | 89432 | 5 | 7890 | 89708 | 5 | 7940 | 89982 | 6 | 7990 | 90255 | 5 |
| 7791 | 89159 | 6 | 7841 | 89437 | 6 | 7891 | 89713 | 6 | 7941 | 89988 | 5 | 7991 | 90260 | 6 |
| 7792 | 89165 | 5 | 7842 | 89443 | 5 | 7892 | 89719 | 5 | 7942 | 89993 | 5 | 7992 | 90266 | 6 |
| 7793 | 89170 | 6 | 7843 | 89448 | 6 | 7893 | 89724 | 6 | 7943 | 89998 | 6 | 7993 | 90271 | 5 |
| 7794 | 89176 | 6 | 7844 | 89454 | 5 | 7894 | 89730 | 5 | 7944 | 90004 | 5 | 7994 | 90276 | 5 |
| 7795 | 89182 | 5 | 7845 | 89459 | 6 | 7895 | 89735 | 6 | 7945 | 90009 | 6 | 7995 | 90282 | 6 |
| 7796 | 89187 | 6 | 7846 | 89465 | 5 | 7896 | 89741 | 5 | 7946 | 90015 | 5 | 7996 | 90287 | 5 |
| 7797 | 89193 | 5 | 7847 | 89470 | 6 | 7897 | 89746 | 6 | 7947 | 90020 | 6 | 7997 | 90293 | 6 |
| 7798 | 89198 | 6 | 7848 | 89476 | 5 | 7898 | 89752 | 5 | 7948 | 90026 | 5 | 7998 | 90298 | 5 |
| 7799 | 89204 | 5 | 7846 | 89481 | 6 | 7899 | 89757 | 6 | 7949 | 90031 | 6 | 7999 | 90304 | 6 |
| 7800 | 89209 | 5 | 7850 | 89487 | 5 | 7900 | 89763 | 6 | 7950 | 90037 | 6 | 8000 | 90309 | 5 |

| N. | Log. | D | N. | Log. | D | N. | Log. | D | N. | Log. | D | N. | Log. | D |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 8001 | 90314 | 5 | 8051 | 90585 | 5 | 8101 | 90854 | 5 | 8151 | 91121 | 5 | 8201 | 91387 | 6 |
| 8002 | 90320 | 6 | 8052 | 90590 | 5 | 8102 | 90859 | 5 | 8152 | 91126 | 5 | 8202 | 91392 | 5 |
| 8003 | 90325 | 5 | 8053 | 90596 | 6 | 8103 | 90865 | 6 | 8153 | 91132 | 6 | 8203 | 91397 | 5 |
| 8004 | 90331 | 6 | 8054 | 90601 | 5 | 8104 | 90870 | 5 | 8154 | 91137 | 5 | 8204 | 91403 | 6 |
| 8005 | 90336 | 5 | 8055 | 90607 | 6 | 8105 | 90875 | 5 | 8155 | 91142 | 5 | 8205 | 91408 | 5 |
| | | 6 | | | 5 | | | 6 | | | 6 | | | 5 |
| 8006 | 90342 | 5 | 8056 | 90612 | 5 | 8106 | 90881 | 5 | 8156 | 91148 | 5 | 8206 | 91413 | 5 |
| 8007 | 90347 | 5 | 8057 | 90617 | 5 | 8107 | 90886 | 5 | 8157 | 91153 | 5 | 8207 | 91418 | 5 |
| 8008 | 90352 | 6 | 8058 | 90623 | 6 | 8108 | 90891 | 5 | 8158 | 91158 | 5 | 8208 | 91424 | 6 |
| 8009 | 90358 | 6 | 8059 | 90628 | 5 | 8109 | 90897 | 6 | 8159 | 91163 | 5 | 8209 | 91429 | 5 |
| 8010 | 90363 | 5 | 8060 | 90634 | 6 | 8110 | 90902 | 5 | 8160 | 91169 | 6 | 8210 | 91434 | 5 |
| | | 6 | | | 5 | | | 5 | | | 5 | | | 6 |
| 8011 | 90369 | 5 | 8061 | 90639 | 5 | 8111 | 90907 | 5 | 8161 | 91174 | 6 | 8211 | 91440 | 5 |
| 8012 | 90374 | 6 | 8062 | 90644 | 5 | 8112 | 90913 | 6 | 8162 | 91180 | 5 | 8212 | 91445 | 5 |
| 8013 | 90380 | 5 | 8063 | 90650 | 6 | 8113 | 90918 | 5 | 8163 | 91185 | 5 | 8213 | 91450 | 5 |
| 8014 | 90385 | 5 | 8064 | 90655 | 5 | 8114 | 90924 | 6 | 8164 | 91190 | 5 | 8214 | 91455 | 6 |
| 8015 | 90390 | 5 | 8065 | 90660 | 5 | 8115 | 90929 | 5 | 8165 | 91196 | 6 | 8215 | 91461 | 5 |
| | | 6 | | | 5 | | | 5 | | | 5 | | | 5 |
| 8016 | 90396 | 5 | 8066 | 90666 | 5 | 8116 | 90934 | 5 | 8166 | 91201 | 5 | 8216 | 91466 | 5 |
| 8017 | 90401 | 6 | 8067 | 90671 | 5 | 8117 | 90940 | 6 | 8167 | 91206 | 5 | 8217 | 91471 | 6 |
| 8018 | 90407 | 5 | 8068 | 90677 | 6 | 8118 | 90945 | 5 | 8168 | 91212 | 6 | 8218 | 91477 | 5 |
| 8019 | 90412 | 5 | 8069 | 90682 | 5 | 8119 | 90950 | 5 | 8169 | 91217 | 5 | 8219 | 91482 | 5 |
| 8020 | 90417 | 5 | 8070 | 90687 | 5 | 8120 | 90956 | 6 | 8170 | 91222 | 5 | 8220 | 91487 | 5 |
| | | 6 | | | 6 | | | 5 | | | 6 | | | 5 |
| 8021 | 90423 | 5 | 8071 | 90693 | 5 | 8121 | 90961 | 5 | 8171 | 91228 | 5 | 8221 | 91492 | 6 |
| 8022 | 90428 | 6 | 8072 | 90698 | 5 | 8122 | 90966 | 5 | 8172 | 91233 | 5 | 8222 | 91498 | 5 |
| 8023 | 90434 | 5 | 8073 | 90703 | 6 | 8123 | 90972 | 6 | 8173 | 91238 | 5 | 8223 | 91503 | 5 |
| 8024 | 90439 | 6 | 8074 | 90709 | 5 | 8124 | 90977 | 5 | 8174 | 91243 | 5 | 8224 | 91508 | 6 |
| 8025 | 90445 | 5 | 8075 | 90714 | 5 | 8125 | 90982 | 5 | 8175 | 91249 | 6 | 8225 | 91514 | 5 |
| | | 6 | | | 6 | | | 6 | | | 5 | | | 5 |
| 8026 | 90450 | 5 | 8076 | 90720 | 5 | 8126 | 90988 | 5 | 8176 | 91254 | 5 | 8226 | 91519 | 5 |
| 8027 | 90455 | 6 | 8077 | 90725 | 5 | 8127 | 90993 | 5 | 8177 | 91259 | 6 | 8227 | 91524 | 5 |
| 8028 | 90461 | 5 | 8078 | 90730 | 6 | 8128 | 90998 | 6 | 8178 | 91265 | 5 | 8228 | 91529 | 6 |
| 8029 | 90466 | 6 | 8079 | 90736 | 5 | 8129 | 91004 | 5 | 8179 | 91270 | 5 | 8229 | 91535 | 5 |
| 8030 | 90472 | 5 | 8080 | 90741 | 5 | 8130 | 91009 | 5 | 8180 | 91275 | 6 | 8230 | 91540 | 5 |
| | | 6 | | | 6 | | | 5 | | | 5 | | | 5 |
| 8031 | 90477 | 5 | 8081 | 90747 | 5 | 8131 | 91014 | 6 | 8181 | 91281 | 5 | 8231 | 91545 | 6 |
| 8032 | 90482 | 6 | 8082 | 90752 | 5 | 8132 | 91020 | 5 | 8182 | 91286 | 5 | 8232 | 91551 | 5 |
| 8033 | 90488 | 5 | 8083 | 90757 | 6 | 8133 | 91025 | 5 | 8183 | 91291 | 6 | 8233 | 91556 | 5 |
| 8034 | 90493 | 6 | 8084 | 90763 | 5 | 8134 | 91030 | 6 | 8184 | 91297 | 5 | 8234 | 91561 | 5 |
| 8035 | 90499 | 5 | 8085 | 90768 | 5 | 8135 | 91036 | 5 | 8185 | 91302 | 5 | 8235 | 91566 | 6 |
| | | 5 | | | 5 | | | 5 | | | 5 | | | 5 |
| 8036 | 90504 | 5 | 8086 | 90773 | 6 | 8136 | 91041 | 5 | 8186 | 91307 | 5 | 8236 | 91572 | 5 |
| 8037 | 90509 | 6 | 8087 | 90779 | 5 | 8137 | 91046 | 6 | 8187 | 91312 | 6 | 8237 | 91577 | 5 |
| 8038 | 90515 | 5 | 8088 | 90784 | 5 | 8138 | 91052 | 5 | 8188 | 91318 | 5 | 8238 | 91582 | 5 |
| 8039 | 90520 | 6 | 8089 | 90789 | 6 | 8139 | 91057 | 5 | 8189 | 91323 | 5 | 8239 | 91587 | 6 |
| 8040 | 90526 | 5 | 8090 | 90795 | 5 | 8140 | 91062 | 5 | 8190 | 91328 | 5 | 8240 | 91593 | 5 |
| | | 5 | | | 5 | | | 6 | | | 6 | | | 5 |
| 8041 | 90531 | 5 | 8091 | 90800 | 6 | 8141 | 91068 | 5 | 8191 | 91334 | 5 | 8241 | 91598 | 5 |
| 8042 | 90536 | 6 | 8092 | 90806 | 5 | 8142 | 91073 | 5 | 8192 | 91339 | 5 | 8242 | 91603 | 6 |
| 8043 | 90542 | 5 | 8093 | 90811 | 5 | 8143 | 91078 | 6 | 8193 | 91344 | 6 | 8243 | 91609 | 5 |
| 8044 | 90547 | 6 | 8094 | 90816 | 6 | 8144 | 91084 | 5 | 8194 | 91350 | 5 | 8244 | 91614 | 5 |
| 8045 | 90553 | 5 | 8095 | 90822 | 5 | 8145 | 91089 | 5 | 8195 | 91355 | 5 | 8245 | 91619 | 5 |
| | | 5 | | | 5 | | | 5 | | | 6 | | | 5 |
| 8046 | 90558 | 5 | 8096 | 90827 | 5 | 8146 | 91094 | 6 | 8196 | 91360 | 5 | 8246 | 91624 | 6 |
| 8047 | 90563 | 6 | 8097 | 90832 | 6 | 8147 | 91100 | 5 | 8197 | 91365 | 6 | 8247 | 91630 | 5 |
| 8048 | 90569 | 5 | 8098 | 90838 | 5 | 8148 | 91105 | 5 | 8198 | 91371 | 5 | 8248 | 91635 | 5 |
| 8049 | 90574 | 6 | 8099 | 90843 | 6 | 8149 | 91110 | 6 | 8199 | 91376 | 5 | 8249 | 91640 | 5 |
| 8050 | 90580 | | 8100 | 90849 | | 8150 | 91116 | | 8200 | 91381 | | 8250 | 91645 | |

| N. | Log. | D | N. | Log. | D | N. | Log. | D | N. | Log. | D | N. | Log. | D |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 8251 | 91651 | 6 | 8301 | 91913 | 5 | 8351 | 92174 | 5 | 8401 | 92433 | 5 | 8451 | 92691 | 5 |
| 8252 | 91656 | 5 | 8302 | 91918 | 5 | 8352 | 92179 | 5 | 8402 | 92438 | 5 | 8452 | 92696 | 5 |
| 8253 | 91661 | 5 | 8303 | 91924 | 6 | 8353 | 92184 | 5 | 8403 | 92443 | 5 | 8453 | 92701 | 5 |
| 8254 | 91666 | 5 | 8304 | 91929 | 5 | 8354 | 92189 | 5 | 8404 | 92449 | 6 | 8454 | 92706 | 5 |
| 8255 | 91672 | 6 | 8305 | 91934 | 5 | 8355 | 92195 | 6 | 8405 | 92454 | 5 | 8455 | 92711 | 5 |
| | | 5 | | | 5 | | | 5 | | | 5 | | | 5 |
| 8256 | 91677 | 5 | 8306 | 91939 | 5 | 8356 | 92200 | 5 | 8406 | 92459 | 5 | 8456 | 92716 | 6 |
| 8257 | 91682 | 5 | 8307 | 91944 | 5 | 8357 | 92205 | 5 | 8407 | 92464 | 5 | 8457 | 92722 | 5 |
| 8258 | 91687 | 6 | 8308 | 91950 | 6 | 8358 | 92210 | 5 | 8408 | 92469 | 5 | 8458 | 92727 | 5 |
| 8259 | 91693 | 5 | 8309 | 91955 | 5 | 8359 | 92215 | 5 | 8409 | 92474 | 5 | 8459 | 92732 | 5 |
| 8260 | 91698 | 5 | 8310 | 91960 | 5 | 8360 | 92221 | 6 | 8410 | 92480 | 6 | 8460 | 92737 | 5 |
| | | 5 | | | 5 | | | 5 | | | 5 | | | 5 |
| 8261 | 91703 | 6 | 8311 | 91965 | 6 | 8361 | 92226 | 5 | 8411 | 92485 | 5 | 8461 | 92742 | 5 |
| 8262 | 91709 | 5 | 8312 | 91971 | 5 | 8362 | 92231 | 5 | 8412 | 92490 | 5 | 8462 | 92747 | 5 |
| 8263 | 91714 | 5 | 8313 | 91976 | 5 | 8363 | 92236 | 5 | 8413 | 92495 | 5 | 8463 | 92752 | 6 |
| 8264 | 91719 | 5 | 8314 | 91981 | 5 | 8364 | 92241 | 6 | 8414 | 92500 | 5 | 8464 | 92758 | 5 |
| 8265 | 91724 | 5 | 8315 | 91986 | 5 | 8365 | 92247 | 5 | 8415 | 92505 | 5 | 8465 | 92763 | 5 |
| | | 6 | | | 5 | | | 5 | | | 6 | | | 5 |
| 8266 | 91730 | 5 | 8316 | 91991 | 6 | 8366 | 92252 | 5 | 8416 | 92511 | 5 | 8466 | 92768 | 5 |
| 8267 | 91735 | 5 | 8317 | 91997 | 5 | 8367 | 92257 | 5 | 8417 | 92516 | 5 | 8467 | 92773 | 5 |
| 8268 | 91740 | 5 | 8318 | 92002 | 5 | 8368 | 92262 | 5 | 8418 | 92521 | 5 | 8468 | 92778 | 5 |
| 8269 | 91745 | 6 | 8319 | 92007 | 5 | 8369 | 92267 | 6 | 8419 | 92526 | 5 | 8469 | 92783 | 5 |
| 8270 | 91751 | 5 | 8320 | 92012 | 5 | 8370 | 92273 | 5 | 8420 | 92531 | 5 | 8470 | 92788 | 5 |
| | | 5 | | | 6 | | | 5 | | | 5 | | | 6 |
| 8271 | 91756 | 5 | 8321 | 92018 | 5 | 8371 | 92278 | 5 | 8421 | 92536 | 6 | 8471 | 92793 | 5 |
| 8272 | 91761 | 5 | 8322 | 92023 | 5 | 8372 | 92283 | 5 | 8422 | 92542 | 5 | 8472 | 92799 | 5 |
| 8273 | 91766 | 6 | 8323 | 92028 | 5 | 8373 | 92288 | 5 | 8423 | 92547 | 5 | 8473 | 92804 | 5 |
| 8274 | 91772 | 5 | 8324 | 92033 | 5 | 8374 | 92293 | 5 | 8424 | 92552 | 5 | 8474 | 92809 | 5 |
| 8275 | 91777 | 5 | 8325 | 92038 | 5 | 8375 | 92298 | 6 | 8425 | 92557 | 5 | 8475 | 92814 | 5 |
| | | 5 | | | 6 | | | 5 | | | 5 | | | 5 |
| 8276 | 91782 | 5 | 8326 | 92044 | 5 | 8376 | 92304 | 5 | 8426 | 92562 | 5 | 8476 | 92819 | 5 |
| 8277 | 91787 | 6 | 8327 | 92049 | 5 | 8377 | 92309 | 5 | 8427 | 92567 | 5 | 8477 | 92824 | 5 |
| 8278 | 91793 | 5 | 8328 | 92054 | 5 | 8378 | 92314 | 5 | 8428 | 92572 | 6 | 8478 | 92829 | 5 |
| 8279 | 91798 | 5 | 8329 | 92059 | 6 | 8379 | 92319 | 5 | 8429 | 92578 | 5 | 8479 | 92834 | 6 |
| 8280 | 91803 | 5 | 8330 | 92065 | 5 | 8380 | 92324 | 5 | 8430 | 92583 | 5 | 8480 | 92840 | 5 |
| | | 5 | | | 5 | | | 6 | | | 5 | | | 5 |
| 8281 | 91808 | 6 | 8331 | 92070 | 5 | 8381 | 92330 | 5 | 8431 | 92588 | 5 | 8481 | 92845 | 5 |
| 8282 | 91814 | 5 | 8332 | 92075 | 5 | 8382 | 92335 | 5 | 8432 | 92593 | 5 | 8482 | 92850 | 5 |
| 8283 | 91819 | 5 | 8333 | 92080 | 5 | 8383 | 92340 | 5 | 8433 | 92598 | 5 | 8483 | 92855 | 5 |
| 8284 | 91824 | 5 | 8334 | 92085 | 6 | 8384 | 92345 | 5 | 8434 | 92603 | 6 | 8484 | 92860 | 5 |
| 8285 | 91829 | 5 | 8335 | 92091 | 5 | 8385 | 92350 | 5 | 8435 | 92609 | 5 | 8485 | 92865 | 5 |
| | | 5 | | | 5 | | | 5 | | | 5 | | | 5 |
| 8286 | 91834 | 6 | 8336 | 92096 | 5 | 8386 | 92355 | 6 | 8436 | 92614 | 5 | 8486 | 92870 | 5 |
| 8287 | 91840 | 5 | 8337 | 92101 | 5 | 8387 | 92361 | 5 | 8437 | 92619 | 5 | 8487 | 92875 | 6 |
| 8288 | 91845 | 5 | 8338 | 92106 | 5 | 8388 | 92366 | 5 | 8438 | 92624 | 5 | 8488 | 92881 | 5 |
| 8289 | 91850 | 5 | 8339 | 92111 | 6 | 8389 | 92371 | 5 | 8439 | 92629 | 5 | 8489 | 92886 | 5 |
| 8290 | 91855 | 6 | 8340 | 92117 | 5 | 8390 | 92376 | 5 | 8440 | 92634 | 5 | 8490 | 92891 | 5 |
| | | 5 | | | 5 | | | 5 | | | 6 | | | 5 |
| 8291 | 91861 | 5 | 8341 | 92122 | 5 | 8391 | 92381 | 6 | 8441 | 92639 | 6 | 8491 | 92896 | 5 |
| 8292 | 91866 | 5 | 8342 | 92127 | 5 | 8392 | 92387 | 5 | 8442 | 92645 | 5 | 8492 | 92901 | 5 |
| 8293 | 91871 | 5 | 8343 | 92132 | 5 | 8393 | 92392 | 5 | 8443 | 92650 | 5 | 8493 | 92906 | 5 |
| 8294 | 91876 | 6 | 8344 | 92137 | 6 | 8394 | 92397 | 5 | 8444 | 92655 | 5 | 8494 | 92911 | 5 |
| 8295 | 91882 | 5 | 8345 | 92143 | 5 | 8395 | 92402 | 5 | 8445 | 92660 | 5 | 8495 | 92916 | 5 |
| | | 5 | | | 5 | | | 5 | | | 5 | | | 5 |
| 8296 | 91887 | 5 | 8346 | 92148 | 5 | 8396 | 92407 | 5 | 8446 | 92665 | 5 | 8496 | 92921 | 6 |
| 8297 | 91892 | 5 | 8347 | 92153 | 5 | 8397 | 92412 | 6 | 8447 | 92670 | 5 | 8497 | 92927 | 5 |
| 8298 | 91897 | 6 | 8348 | 92158 | 5 | 8398 | 92418 | 5 | 8448 | 92675 | 6 | 8498 | 92932 | 5 |
| 8299 | 91903 | 5 | 8349 | 92163 | 6 | 8399 | 92423 | 5 | 8449 | 92681 | 5 | 8499 | 92937 | 5 |
| 8300 | 91908 | 5 | 8350 | 92169 | 5 | 8400 | 92428 | 5 | 8450 | 92686 | 5 | 8500 | 92942 | 5 |

| N. | Log. | D | N. | Log. | D | N. | Log. | D | N. | Log. | D | N. | Log. | D |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 8501 | 92947 | 5 | 8551 | 93202 | 5 | 8601 | 93455 | 5 | 8651 | 93707 | 5 | 8701 | 93957 | 5 |
| 8502 | 92952 | 5 | 8552 | 93207 | 5 | 8602 | 93460 | 5 | 8652 | 93712 | 5 | 8702 | 93962 | 5 |
| 8503 | 92957 | 5 | 8553 | 93212 | 5 | 8603 | 93465 | 5 | 8653 | 93717 | 5 | 8703 | 93967 | 5 |
| 8504 | 92962 | 5 | 8554 | 93217 | 5 | 8604 | 93470 | 5 | 8654 | 93722 | 5 | 8704 | 93972 | 5 |
| 8505 | 92967 | 5 | 8555 | 93222 | 5 | 8605 | 93475 | 5 | 8655 | 93727 | 5 | 8705 | 93977 | 5 |
| | | 6 | | | 5 | | | 5 | | | 5 | | | 5 |
| 8506 | 92973 | 5 | 8556 | 93227 | 5 | 8606 | 93480 | 5 | 8656 | 93732 | 5 | 8706 | 93982 | 5 |
| 8507 | 92978 | 5 | 8557 | 93232 | 5 | 8607 | 93485 | 5 | 8657 | 93737 | 5 | 8707 | 93987 | 5 |
| 8508 | 92983 | 5 | 8558 | 93237 | 5 | 8608 | 93490 | 5 | 8658 | 93742 | 5 | 8708 | 93992 | 5 |
| 8509 | 92988 | 5 | 8559 | 93242 | 5 | 8609 | 93495 | 5 | 8659 | 93747 | 5 | 8709 | 93997 | 5 |
| 8510 | 92993 | 5 | 8560 | 93247 | 5 | 8610 | 93500 | 5 | 8660 | 93752 | 5 | 8710 | 94002 | 5 |
| 8511 | 92998 | 5 | 8561 | 93252 | 6 | 8611 | 93505 | 5 | 8661 | 93757 | 5 | 8711 | 94007 | 5 |
| *8512* | *93003* | 5 | *8562* | *93258* | 5 | 8612 | 93510 | 5 | 8662 | 93762 | 5 | 8712 | 94012 | 5 |
| *8513* | *93008* | 5 | 8563 | 93263 | 5 | 8613 | 93515 | 5 | 8663 | 93767 | 5 | 8713 | 94017 | 5 |
| 8514 | 93013 | 5 | 8564 | 93268 | 5 | 8614 | 93520 | 6 | 8664 | 93772 | 5 | 8714 | 94022 | 5 |
| 8515 | 93018 | 6 | 8565 | 93273 | 5 | 8615 | 93526 | 5 | 8665 | 93777 | 5 | 8715 | 94027 | 5 |
| 8516 | 93024 | 5 | 8566 | 93278 | 5 | 8616 | 93531 | 5 | 8666 | 93782 | 5 | 8716 | 94032 | 5 |
| 8517 | 93029 | 5 | 8567 | 93283 | 5 | 8617 | 93536 | 5 | 8667 | 93787 | 5 | 8717 | 94037 | 5 |
| 8518 | 93034 | 5 | 8568 | 93288 | 5 | 8618 | 93541 | 5 | 8668 | 93792 | 5 | 8718 | 94042 | 5 |
| 8519 | 93039 | 5 | 8569 | 93293 | 5 | 8619 | 93546 | 5 | 8669 | 93797 | 5 | 8719 | 94047 | 5 |
| 8520 | 93044 | 5 | 8570 | 93298 | 5 | 8620 | 93551 | 5 | 8670 | 93802 | 5 | 8720 | 94052 | 5 |
| 8521 | 93049 | 5 | 8571 | 93303 | 5 | 8621 | 93556 | 5 | 8671 | 93807 | 5 | 8721 | 94057 | 5 |
| 8522 | 93054 | 5 | 8572 | 93308 | 5 | 8622 | 93561 | 5 | 8672 | 93812 | 5 | 8722 | 94062 | 5 |
| 8523 | 93059 | 5 | 8573 | 93313 | 5 | 8623 | 93566 | 5 | 8673 | 93817 | 5 | 8723 | 94067 | 5 |
| 8524 | 93064 | 5 | 8574 | 93318 | 5 | 8624 | 93571 | 5 | 8674 | 93822 | 5 | 8724 | 94072 | 5 |
| 8525 | 93069 | 6 | 8575 | 93323 | 5 | 8625 | 93576 | 5 | 8675 | 93827 | 5 | 8725 | 94077 | 5 |
| 8526 | 93075 | 5 | 8576 | 93328 | 6 | 8626 | 93581 | 5 | 8676 | 93832 | 5 | 8726 | 94082 | 4 |
| 8527 | 93080 | 5 | 8577 | 93334 | 5 | 8627 | 93586 | 5 | 8677 | 93837 | 5 | 8727 | 94086 | 5 |
| 8528 | 93085 | 5 | 8578 | 93339 | 5 | 8628 | 93591 | 5 | 8678 | 93842 | 5 | 8728 | 94091 | 5 |
| 8529 | 93090 | 5 | 8579 | 93344 | 5 | 8629 | 93596 | 5 | 8679 | 93847 | 5 | 8729 | 94096 | 5 |
| 8530 | 93095 | 5 | 8580 | 93349 | 5 | 8630 | 93601 | 5 | 8680 | 93852 | 5 | 8730 | 94101 | 5 |
| 8531 | 93100 | 5 | 8581 | 93354 | 5 | 8631 | 93606 | 5 | 8681 | 93857 | 5 | 8731 | 94106 | 5 |
| 8532 | 93105 | 5 | 8582 | 93359 | 5 | 8632 | 93611 | 5 | 8682 | 93862 | 5 | 8732 | 94111 | 5 |
| 8533 | 93110 | 5 | 8583 | 93364 | 5 | 8633 | 93616 | 5 | 8683 | 93867 | 5 | 8733 | 94116 | 5 |
| 8534 | 93115 | 5 | 8584 | 93369 | 5 | 8634 | 93621 | 5 | 8684 | 93872 | 5 | 8734 | 94121 | 5 |
| 8535 | 93120 | 5 | 8585 | 93374 | 5 | 8635 | 93626 | 5 | 8685 | 93877 | 5 | 8735 | 94126 | 5 |
| 8536 | 93125 | 6 | 8586 | 93379 | 5 | 8636 | 93631 | 5 | 8686 | 93882 | 5 | 8736 | 94131 | 5 |
| 8537 | 93131 | 5 | 8587 | 93384 | 5 | 8637 | 93636 | 5 | 8687 | 93887 | 5 | 8737 | 94136 | 5 |
| 8538 | 93136 | 5 | 8588 | 93389 | 5 | 8638 | 93641 | 5 | 8688 | 93892 | 5 | 8738 | 94141 | 5 |
| 8539 | 93141 | 5 | 8589 | 93394 | 5 | 8639 | 93646 | 5 | 8689 | 93897 | 5 | 8739 | 94146 | 5 |
| 8540 | 93146 | 5 | 8590 | 93399 | 5 | 8640 | 93651 | 5 | 8690 | 93902 | 5 | 8740 | 94151 | 5 |
| 8541 | 93151 | 5 | 8591 | 93404 | 5 | 8641 | 93656 | 5 | 8691 | 93907 | 5 | 8741 | 94156 | 5 |
| 8542 | 93156 | 5 | 8592 | 93409 | 5 | 8642 | 93661 | 5 | 8692 | 93912 | 5 | 8742 | 94161 | 5 |
| 8543 | 93161 | 5 | 8593 | 93414 | 6 | 8643 | 93666 | 5 | 8693 | 93917 | 5 | 8743 | 94166 | 5 |
| 8544 | 93166 | 5 | 8594 | 93420 | 5 | 8644 | 93671 | 5 | 8694 | 93922 | 5 | 8744 | 94171 | 5 |
| 8545 | 93171 | 5 | 8595 | 93425 | 5 | 8645 | 93676 | 6 | 8695 | 93927 | 5 | 8745 | 94176 | 5 |
| 8546 | 93176 | 5 | 8596 | 93430 | 5 | 8646 | 93682 | 5 | 8696 | 93932 | 5 | 8746 | 94181 | 5 |
| 8547 | 93181 | 5 | 8597 | 93435 | 5 | 8647 | 93687 | 5 | 8697 | 93937 | 5 | 8747 | 94186 | 5 |
| 8548 | 93186 | 6 | 8598 | 93440 | 5 | 8648 | 93692 | 5 | 8698 | 93942 | 5 | 8748 | 94191 | 5 |
| 8549 | 93192 | 5 | 8599 | 93445 | 5 | 8649 | 93697 | 5 | 8699 | 93947 | 5 | 8749 | 94196 | 5 |
| 8550 | 93197 | | 8600 | 93450 | | 8650 | 93702 | | 8700 | 93952 | | 8750 | 94201 | |

| N. | Log. | D | N. | Log. | D | N. | Log. | D | N. | Log. | D | N. | Log. | D |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 8751 | 94206 | 5 | 8801 | 94453 | 5 | 8851 | 94699 | 5 | 8901 | 94944 | 5 | 8951 | 95187 | 5 |
| 8752 | 94211 | 5 | 8802 | 94458 | 5 | 8852 | 94704 | 5 | 8902 | 94949 | 5 | 8952 | 95192 | 5 |
| 8753 | 94216 | 5 | 8803 | 94463 | 5 | 8853 | 94709 | 5 | 8903 | 94954 | 5 | 8953 | 95197 | 5 |
| 8754 | 94221 | 5 | 8804 | 94468 | 5 | 8854 | 94714 | 5 | 8904 | 94959 | 5 | 8954 | 95202 | 5 |
| 8755 | 94226 | 5 | 8805 | 94473 | 5 | 8855 | 94719 | 5 | 8905 | 94963 | 4 | 8955 | 95207 | 4 |
| 8756 | 94231 | 5 | 8806 | 94478 | 5 | 8856 | 94724 | 5 | 8906 | 94968 | 5 | 8956 | 95211 | 5 |
| 8757 | 94236 | 5 | 8807 | 94483 | 5 | 8857 | 94729 | 5 | 8907 | 94973 | 5 | 8957 | 95216 | 5 |
| 8758 | 94240 | 4 | 8808 | 94488 | 5 | 8858 | 94734 | 5 | 8908 | 94978 | 5 | 8958 | 95221 | 5 |
| 8759 | 94245 | 5 | 8809 | 94493 | 5 | 8859 | 94738 | 4 | 8909 | 94983 | 5 | 8959 | 95226 | 5 |
| 8760 | 94250 | 5 | 8810 | 94498 | 5 | 8860 | 94743 | 5 | 8910 | 94988 | 5 | 8960 | 95231 | 5 |
| 8761 | 94255 | 5 | 8811 | 94503 | 5 | 8861 | 94748 | 5 | 8911 | 94993 | 5 | 8961 | 95236 | 4 |
| 8762 | 94260 | 5 | 8812 | 94507 | 4 | 8862 | 94753 | 5 | 8912 | 94998 | 5 | 8962 | 95240 | 5 |
| 8763 | 94265 | 5 | 8813 | 94512 | 5 | 8863 | 94758 | 5 | 8913 | 95002 | 4 | 8963 | 95245 | 5 |
| 8764 | 94270 | 5 | 8814 | 94517 | 5 | 8864 | 94763 | 5 | 8914 | 95007 | 5 | 8964 | 95250 | 5 |
| 8765 | 94275 | 5 | 8815 | 94522 | 5 | 8865 | 94768 | 5 | 8915 | 95012 | 5 | 8965 | 95255 | 5 |
| 8766 | 94280 | 5 | 8816 | 94527 | 5 | 8866 | 94773 | 5 | 8916 | 95017 | 5 | 8966 | 95260 | 5 |
| 8767 | 94285 | 5 | 8817 | 94532 | 5 | 8867 | 94778 | 5 | 8917 | 95022 | 5 | 8967 | 95265 | 5 |
| 8768 | 94290 | 5 | 8818 | 94537 | 5 | 8868 | 94783 | 4 | 8918 | 95027 | 5 | 8968 | 95270 | 4 |
| 8769 | 94295 | 5 | 8819 | 94542 | 5 | 8869 | 94787 | 5 | 8919 | 95032 | 4 | 8969 | 95274 | 5 |
| 8770 | 94300 | 5 | 8820 | 94547 | 5 | 8870 | 94792 | 5 | 8920 | 95036 | 5 | 8970 | 95279 | 5 |
| 8771 | 94305 | 5 | 8821 | 94552 | 5 | 8871 | 94797 | 5 | 8921 | 95041 | 5 | 8971 | 95284 | 5 |
| 8772 | 94310 | 5 | 8822 | 94557 | 5 | 8872 | 94802 | 5 | 8922 | 95046 | 5 | 8972 | 95289 | 5 |
| 8773 | 94315 | 5 | 8823 | 94562 | 5 | 8873 | 94807 | 5 | 8923 | 95051 | 5 | 8973 | 95294 | 5 |
| 8774 | 94320 | 5 | 8824 | 94567 | 4 | 8874 | 94812 | 5 | 8924 | 95056 | 5 | 8974 | 95299 | 4 |
| 8775 | 94325 | 5 | 8825 | 94571 | 5 | 8875 | 94817 | 5 | 8925 | 95061 | 5 | 8975 | 95303 | 5 |
| 8776 | 94330 | 5 | 8826 | 94576 | 5 | 8876 | 94822 | 5 | 8926 | 95066 | 5 | 8976 | 95308 | 5 |
| 8777 | 94335 | 5 | 8827 | 94581 | 5 | 8877 | 94827 | 5 | 8927 | 95071 | 4 | 8977 | 95313 | 5 |
| 8778 | 94340 | 5 | 8828 | 94586 | 5 | 8878 | 94832 | 4 | 8928 | 95075 | 5 | 8978 | 95318 | 5 |
| 8779 | 94345 | 4 | 8829 | 94591 | 5 | 8879 | 94836 | 5 | 8929 | 95080 | 5 | 8979 | 95323 | 5 |
| 8780 | 94349 | 5 | 8830 | 94596 | 5 | 8880 | 94841 | 5 | 8930 | 95085 | 5 | 8980 | 95328 | 4 |
| 8781 | 94354 | 5 | 8831 | 94601 | 5 | 8881 | 94846 | 5 | 8931 | 95090 | 5 | 8981 | 95332 | 5 |
| 8782 | 94359 | 5 | 8832 | 94606 | 5 | 8882 | 94851 | 5 | 8932 | 95095 | 5 | 8982 | 95337 | 5 |
| 8783 | 94364 | 5 | 8833 | 94611 | 5 | 8883 | 94856 | 5 | 8933 | 95100 | 5 | 8983 | 95342 | 5 |
| 8784 | 94369 | 5 | 8834 | 94616 | 5 | 8884 | 94861 | 5 | 8934 | 95105 | 4 | 8984 | 95347 | 5 |
| 8785 | 94374 | 5 | 8835 | 94621 | 5 | 8885 | 94866 | 5 | 8935 | 95109 | 5 | 8985 | 95352 | 5 |
| 8786 | 94379 | 5 | 8836 | 94626 | 4 | 8886 | 94871 | 5 | 8936 | 95114 | 5 | 8986 | 95357 | 4 |
| 8787 | 94384 | 5 | 8837 | 94630 | 5 | 8887 | 94876 | 5 | 8937 | 95119 | 5 | 8987 | 95361 | 5 |
| 8788 | 94389 | 5 | 8838 | 94635 | 5 | 8888 | 94880 | 4 | 8938 | 95124 | 5 | 8988 | 95366 | 5 |
| 8789 | 94394 | 5 | 8839 | 94640 | 5 | 8889 | 94885 | 5 | 8939 | 95129 | 5 | 8989 | 95371 | 5 |
| 8790 | 94399 | 5 | 8840 | 94645 | 5 | 8890 | 94890 | 5 | 8940 | 95134 | 5 | 8990 | 95376 | 5 |
| 8791 | 94404 | 5 | 8841 | 94650 | 5 | 8891 | 94895 | 5 | 8941 | 95139 | 4 | 8991 | 95381 | 5 |
| 8792 | 94409 | 5 | 8842 | 94655 | 5 | 8892 | 94900 | 5 | 8942 | 95143 | 5 | 8992 | 95386 | 4 |
| 8793 | 94414 | 5 | 8843 | 94660 | 5 | 8893 | 94905 | 5 | 8943 | 95148 | 5 | 8993 | 95390 | 5 |
| 8794 | 94419 | 5 | 8844 | 94665 | 5 | 8894 | 94910 | 5 | 8944 | 95153 | 5 | 8994 | 95395 | 5 |
| 8795 | 94424 | 5 | 8845 | 94670 | 5 | 8895 | 94915 | 4 | 8945 | 95158 | 5 | 8995 | 95400 | 5 |
| 8796 | 94429 | 4 | 8846 | 94675 | 5 | 8896 | 94919 | 5 | 8946 | 95163 | 5 | 8996 | 95405 | 5 |
| 8797 | 94433 | 5 | 8847 | 94680 | 5 | 8897 | 94924 | 5 | 8947 | 95168 | 5 | 8997 | 95410 | 5 |
| 8798 | 94438 | 5 | 8848 | 94685 | 5 | 8898 | 94929 | 5 | 8948 | 95173 | 4 | 8998 | 95415 | 4 |
| 8799 | 94443 | 5 | 8849 | 94689 | 4 | 8899 | 94934 | 5 | 8949 | 95177 | 5 | 8999 | 95419 | 5 |
| 8800 | 94448 | | 8850 | 94694 | | 8900 | 94939 | | 8950 | 95182 | | 9000 | 95424 | |

| N. | Log. | D | N. | Log. | D | N. | Log. | D | N. | Log. | D | N. | Log. | D |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 9001 | 95429 | 5 | 9051 | 95670 | 5 | 9101 | 95909 | 5 | 9151 | 96147 | 5 | 9201 | 96384 | 5 |
| 9002 | 95434 | 5 | 9052 | 95674 | 4 | 9102 | 95914 | 5 | 9152 | 96152 | 5 | 9202 | 96388 | 4 |
| 9003 | 95439 | 5 | 9053 | 95679 | 5 | 9103 | 95918 | 4 | 9153 | 96156 | 4 | 9203 | 96393 | 5 |
| 9004 | 95444 | 5 | 9054 | 95684 | 5 | 9104 | 95923 | 5 | 9154 | 96161 | 5 | 9204 | 96398 | 5 |
| 9005 | 95448 | 4 | 9055 | 95689 | 5 | 9105 | 95928 | 5 | 9155 | 96166 | 5 | 9205 | 96402 | 4 |
| | | 5 | | | 5 | | | 5 | | | 5 | | | 5 |
| 9006 | 95453 | 5 | 9056 | 95694 | 4 | 9106 | 95933 | 5 | 9156 | 96171 | 4 | 9206 | 96407 | 5 |
| 9007 | 95458 | 5 | 9057 | 95698 | 4 | 9107 | 95938 | 5 | 9157 | 96175 | 5 | 9207 | 96412 | 5 |
| 9008 | 95463 | 5 | 9058 | 95703 | 5 | 9108 | 95942 | 4 | 9158 | 96180 | 5 | 9208 | 96417 | 5 |
| 9009 | 95468 | 4 | 9059 | 95708 | 5 | 9109 | 95947 | 5 | 9159 | 96185 | 5 | 9209 | 96421 | 4 |
| 9010 | 95472 | 5 | 9060 | 95713 | 5 | 9110 | 95952 | 5 | 9160 | 96190 | 5 | 9210 | 96426 | 5 |
| | | 5 | | | 5 | | | 5 | | | 4 | | | 5 |
| 9011 | 95477 | 5 | 9061 | 95718 | 4 | 9111 | 95957 | 4 | 9161 | 96194 | 5 | 9211 | 96431 | 4 |
| 9012 | 95482 | 5 | 9062 | 95722 | 5 | 9112 | 95961 | 5 | 9162 | 96199 | 5 | 9212 | 96435 | 5 |
| 9013 | 95487 | 5 | 9063 | 95727 | 5 | 9113 | 95966 | 5 | 9163 | 96204 | 5 | 9213 | 96440 | 5 |
| 9014 | 95492 | 5 | 9064 | 95732 | 5 | 9114 | 95971 | 5 | 9164 | 96209 | 4 | 9214 | 96445 | 5 |
| 9015 | 95497 | 4 | 9065 | 95737 | 5 | 9115 | 95976 | 4 | 9165 | 96213 | 5 | 9215 | 96450 | 4 |
| | | 5 | | | 5 | | | 5 | | | 5 | | | 5 |
| 9016 | 95501 | 5 | 9066 | 95742 | 4 | 9116 | 95980 | 5 | 9166 | 96218 | 5 | 9216 | 96454 | 5 |
| 9017 | 95506 | 5 | 9067 | 95746 | 5 | 9117 | 95985 | 5 | 9167 | 96223 | 4 | 9217 | 96459 | 5 |
| 9018 | 95511 | 5 | 9068 | 95751 | 5 | 9118 | 95990 | 5 | 9168 | 96227 | 5 | 9218 | 96464 | 4 |
| 9019 | 95516 | 5 | 9069 | 95756 | 5 | 9119 | 95995 | 4 | 9169 | 96232 | 5 | 9219 | 96468 | 5 |
| 9020 | 95521 | 4 | 9070 | 95761 | 5 | 9120 | 95999 | 5 | 9170 | 96237 | 5 | 9220 | 96473 | 5 |
| | | 5 | | | 5 | | | 5 | | | 5 | | | 5 |
| 9021 | 95525 | 5 | 9071 | 95766 | 4 | 9121 | 96004 | 5 | 9171 | 96242 | 4 | 9221 | 96478 | 5 |
| 9022 | 95530 | 5 | 9072 | 95770 | 5 | 9122 | 96009 | 5 | 9172 | 96246 | 5 | 9222 | 96483 | 4 |
| 9023 | 95535 | 5 | 9073 | 95775 | 5 | 9123 | 96014 | 5 | 9173 | 96251 | 5 | 9223 | 96487 | 5 |
| 9024 | 95540 | 5 | 9074 | 95780 | 5 | 9124 | 96019 | 4 | 9174 | 96256 | 5 | 9224 | 96492 | 5 |
| 9025 | 95545 | 5 | 9075 | 95785 | 4 | 9125 | 96023 | 5 | 9175 | 96261 | 5 | 9225 | 96497 | 4 |
| | | 5 | | | 5 | | | 5 | | | 4 | | | 5 |
| 9026 | 95550 | 4 | 9076 | 95789 | 5 | 9126 | 96028 | 5 | 9176 | 96265 | 5 | 9226 | 96501 | 5 |
| 9027 | 95554 | 5 | 9077 | 95794 | 5 | 9127 | 96033 | 5 | 9177 | 96270 | 5 | 9227 | 96506 | 5 |
| 9028 | 95559 | 5 | 9078 | 95799 | 5 | 9128 | 96038 | 5 | 9178 | 96275 | 5 | 9228 | 96511 | 4 |
| 9029 | 95564 | 5 | 9079 | 95804 | 5 | 9129 | 96042 | 5 | 9179 | 96280 | 4 | 9229 | 96515 | 5 |
| 9030 | 95569 | 5 | 9080 | 95809 | 4 | 9130 | 96047 | 5 | 9180 | 96284 | 5 | 9230 | 96520 | 5 |
| | | 5 | | | 5 | | | 5 | | | 5 | | | 5 |
| 9031 | 95574 | 4 | 9081 | 95813 | 5 | 9131 | 96052 | 5 | 9181 | 96289 | 5 | 9231 | 96525 | 5 |
| 9032 | 95578 | 5 | 9082 | 95818 | 5 | 9132 | 96057 | 4 | 9182 | 96294 | 4 | 9232 | 96530 | 4 |
| 9033 | 95583 | 5 | 9083 | 95823 | 5 | 9133 | 96061 | 5 | 9183 | 96298 | 5 | 9233 | 96534 | 5 |
| 9034 | 95588 | 5 | 9084 | 95828 | 5 | 9134 | 96066 | 5 | 9184 | 96303 | 5 | 9234 | 96539 | 5 |
| 9035 | 95593 | 5 | 9085 | 95832 | 4 | 9135 | 96071 | 5 | 9185 | 96308 | 5 | 9235 | 96544 | 5 |
| | | 5 | | | 5 | | | 5 | | | 5 | | | 4 |
| 9036 | 95598 | 4 | 9086 | 95837 | 5 | 9136 | 96076 | 4 | 9186 | 96313 | 4 | 9236 | 96548 | 5 |
| 9037 | 95602 | 5 | 9087 | 95842 | 5 | 9137 | 96080 | 5 | 9187 | 96317 | 5 | 9237 | 96553 | 5 |
| 9038 | 95607 | 5 | 9088 | 95847 | 5 | 9138 | 96085 | 5 | 9188 | 96322 | 5 | 9238 | 96558 | 4 |
| 9039 | 95612 | 5 | 9089 | 95852 | 4 | 9139 | 96090 | 5 | 9189 | 96327 | 5 | 9239 | 96562 | 5 |
| 9040 | 95617 | 5 | 9090 | 95856 | 5 | 9140 | 96095 | 5 | 9190 | 96332 | 5 | 9240 | 96567 | 5 |
| | | 5 | | | 5 | | | 4 | | | 4 | | | 5 |
| 9041 | 95622 | 4 | 9091 | 95861 | 5 | 9141 | 96099 | 5 | 9191 | 96336 | 5 | 9241 | 96572 | 5 |
| 9042 | 95626 | 5 | 9092 | 95866 | 5 | 9142 | 96104 | 5 | 9192 | 96341 | 5 | 9242 | 96577 | 4 |
| 9043 | 95631 | 5 | 9093 | 95871 | 4 | 9143 | 96109 | 5 | 9193 | 96346 | 4 | 9243 | 96581 | 5 |
| 9044 | 95636 | 5 | 9094 | 95875 | 5 | 9144 | 96114 | 4 | 9194 | 96350 | 5 | 9244 | 96586 | 5 |
| 9045 | 95641 | 5 | 9095 | 95880 | 5 | 9145 | 96118 | 5 | 9195 | 96355 | 5 | 9245 | 96591 | 5 |
| | | 5 | | | 5 | | | 5 | | | 5 | | | 4 |
| 9046 | 95646 | 4 | 9096 | 95885 | 5 | 9146 | 96123 | 5 | 9196 | 96360 | 5 | 9246 | 96595 | 5 |
| 9047 | 95650 | 5 | 9097 | 95890 | 5 | 9147 | 96128 | 5 | 9197 | 96365 | 4 | 9247 | 96600 | 5 |
| 9048 | 95655 | 5 | 9098 | 95895 | 4 | 9148 | 96133 | 4 | 9198 | 96369 | 5 | 9248 | 96605 | 4 |
| 9049 | 95660 | 5 | 9099 | 95899 | 5 | 9149 | 96137 | 5 | 9199 | 96374 | 5 | 9249 | 96609 | 5 |
| 9050 | 95665 | 5 | 9100 | 95904 | 5 | 9150 | 96142 | 5 | 9200 | 96379 | 5 | 9250 | 96614 | 5 |

| N. | Log. | D | N. | Log. | D | N. | Log. | D | N. | Log. | D | N. | Log. | D |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 9251 | 96619 | 5 | 9301 | 96853 | 5 | 9351 | 97086 | 5 | 9401 | 97317 | 4 | 9451 | 97548 | 5 |
| 9252 | 96624 | 5 | 9302 | 96858 | 5 | 9352 | 97090 | 4 | 9402 | 97322 | 5 | 9452 | 97552 | 4 |
| 9253 | 96628 | 4 | 9303 | 96862 | 4 | 9353 | 97095 | 5 | 9403 | 97327 | 5 | 9453 | 97557 | 5 |
| 9254 | 96633 | 5 | 9304 | 96867 | 5 | 9354 | 97100 | 5 | 9404 | 97331 | 4 | 9454 | 97562 | 5 |
| 9255 | 96638 | 5 | 9305 | 96872 | 5 | 9355 | 97104 | 4 | 9405 | 97336 | 5 | 9455 | 97566 | 4 |
| | | 4 | | | 4 | | | 5 | | | 4 | | | 5 |
| 9256 | 96642 | 5 | 9306 | 96876 | 5 | 9356 | 97109 | 5 | 9406 | 97340 | 5 | 9456 | 97571 | 4 |
| 9257 | 96647 | 5 | 9307 | 96881 | 5 | 9357 | 97114 | 4 | 9407 | 97345 | 5 | 9457 | 97575 | 5 |
| 9258 | 96652 | 4 | 9308 | 96886 | 5 | 9358 | 97118 | 5 | 9408 | 97350 | 4 | 9458 | 97580 | 5 |
| 9259 | 96656 | 5 | 9309 | 96890 | 4 | 9359 | 97123 | 5 | 9409 | 97354 | 5 | 9459 | 97585 | 4 |
| 9260 | 96661 | 5 | 9310 | 96895 | 5 | 9360 | 97128 | 4 | 9410 | 97359 | 5 | 9460 | 97589 | 5 |
| | | 5 | | | 5 | | | 4 | | | 5 | | | 5 |
| 9261 | 96666 | 4 | 9311 | 96900 | 4 | 9361 | 97132 | 5 | 9411 | 97364 | 4 | 9461 | 97594 | 4 |
| 9262 | 96670 | 4 | 9312 | 96904 | 5 | 9362 | 97137 | 5 | 9412 | 97368 | 5 | 9462 | 97598 | 5 |
| 9263 | 96675 | 5 | 9313 | 96909 | 5 | 9363 | 97142 | 4 | 9413 | 97373 | 4 | 9463 | 97603 | 4 |
| 9264 | 96680 | 5 | 9314 | 96914 | 4 | 9364 | 97146 | 5 | 9414 | 97377 | 5 | 9464 | 97607 | 5 |
| 9265 | 96685 | 5 | 9315 | 96918 | 5 | 9365 | 97151 | 4 | 9415 | 97382 | 5 | 9465 | 97612 | 5 |
| | | 4 | | | 5 | | | 4 | | | 5 | | | 5 |
| 9266 | 96689 | 5 | 9316 | 96923 | 5 | 9366 | 97155 | 5 | 9416 | 97387 | 4 | 9466 | 97617 | 4 |
| 9267 | 96694 | 5 | 9317 | 96928 | 4 | 9367 | 97160 | 5 | 9417 | 97391 | 5 | 9467 | 97621 | 5 |
| 9268 | 96699 | 4 | 9318 | 96932 | 5 | 9368 | 97165 | 4 | 9418 | 97396 | 4 | 9468 | 97626 | 4 |
| 9269 | 96703 | 5 | 9319 | 96937 | 5 | 9369 | 97169 | 5 | 9419 | 97400 | 5 | 9469 | 97630 | 5 |
| 9270 | 96708 | 5 | 9320 | 96942 | 4 | 9370 | 97174 | 5 | 9420 | 97405 | 5 | 9470 | 97635 | 5 |
| | | 5 | | | 4 | | | 5 | | | 4 | | | 5 |
| 9271 | 96713 | 4 | 9321 | 96946 | 5 | 9371 | 97179 | 4 | 9421 | 97410 | 4 | 9471 | 97640 | 4 |
| 9272 | 96717 | 5 | 9322 | 96951 | 5 | 9372 | 97183 | 5 | 9422 | 97414 | 5 | 9472 | 97644 | 5 |
| 9273 | 96722 | 5 | 9323 | 96956 | 4 | 9373 | 97188 | 4 | 9423 | 97419 | 5 | 9473 | 97649 | 4 |
| 9274 | 96727 | 4 | 9324 | 96960 | 5 | 9374 | 97192 | 5 | 9424 | 97424 | 4 | 9474 | 97653 | 5 |
| 9275 | 96731 | 5 | 9325 | 96965 | 5 | 9375 | 97197 | 5 | 9425 | 97428 | 5 | 9475 | 97658 | 5 |
| | | 5 | | | 4 | | | 5 | | | 4 | | | 5 |
| 9276 | 96736 | 5 | 9326 | 96970 | 4 | 9376 | 97202 | 4 | 9426 | 97433 | 4 | 9476 | 97663 | 4 |
| 9277 | 96741 | 4 | 9327 | 96974 | 5 | 9377 | 97206 | 5 | 9427 | 97437 | 5 | 9477 | 97667 | 5 |
| 9278 | 96745 | 5 | 9328 | 96979 | 5 | 9378 | 97211 | 5 | 9428 | 97442 | 5 | 9478 | 97672 | 4 |
| 9279 | 96750 | 5 | 9329 | 96984 | 4 | 9379 | 97216 | 4 | 9429 | 97447 | 4 | 9479 | 97676 | 5 |
| 9280 | 96755 | 4 | 9330 | 96988 | 5 | 9380 | 97220 | 5 | 9430 | 97451 | 5 | 9480 | 97681 | 4 |
| | | 5 | | | 4 | | | 5 | | | 4 | | | 5 |
| 9281 | 96759 | 5 | 9331 | 96993 | 4 | 9381 | 97225 | 5 | 9431 | 97456 | 4 | 9481 | 97685 | 5 |
| 9282 | 96764 | 5 | 9332 | 96997 | 5 | 9382 | 97230 | 4 | 9432 | 97460 | 5 | 9482 | 97690 | 5 |
| 9283 | 96769 | 5 | 9333 | 97002 | 5 | 9383 | 97234 | 5 | 9433 | 97465 | 5 | 9483 | 97695 | 4 |
| 9284 | 96774 | 4 | 9334 | 97007 | 4 | 9384 | 97239 | 5 | 9434 | 97470 | 4 | 9484 | 97699 | 5 |
| 9285 | 96778 | 5 | 9335 | 97011 | 5 | 9385 | 97243 | 5 | 9435 | 97474 | 5 | 9485 | 97704 | 5 |
| | | 5 | | | 5 | | | 5 | | | 5 | | | 4 |
| 9286 | 96783 | 5 | 9336 | 97016 | 5 | 9386 | 97248 | 5 | 9436 | 97479 | 4 | 9486 | 97708 | 5 |
| 9287 | 96788 | 4 | 9337 | 97021 | 4 | 9387 | 97253 | 4 | 9437 | 97483 | 5 | 9487 | 97713 | 4 |
| 9288 | 96792 | 5 | 9338 | 97025 | 5 | 9388 | 97257 | 5 | 9438 | 97488 | 5 | 9488 | 97717 | 5 |
| 9289 | 96797 | 5 | 9339 | 97030 | 5 | 9389 | 97262 | 5 | 9439 | 97493 | 4 | 9489 | 97722 | 5 |
| 9290 | 96802 | 5 | 9340 | 97035 | 5 | 9390 | 97267 | 4 | 9440 | 97497 | 5 | 9490 | 97727 | 5 |
| | | 4 | | | 4 | | | 5 | | | 4 | | | 4 |
| 9291 | 96806 | 5 | 9341 | 97039 | 5 | 9391 | 97271 | 5 | 9441 | 97502 | 5 | 9491 | 97731 | 5 |
| 9292 | 96811 | 5 | 9342 | 97044 | 5 | 9392 | 97276 | 4 | 9442 | 97506 | 4 | 9492 | 97736 | 4 |
| 9293 | 96816 | 4 | 9343 | 97049 | 4 | 9393 | 97280 | 5 | 9443 | 97511 | 5 | 9493 | 97740 | 5 |
| 9294 | 96820 | 5 | 9344 | 97053 | 5 | 9394 | 97285 | 5 | 9444 | 97516 | 4 | 9494 | 97745 | 4 |
| 9295 | 96825 | 5 | 9345 | 97058 | 5 | 9395 | 97290 | 5 | 9445 | 97520 | 5 | 9495 | 97749 | 5 |
| | | 5 | | | 5 | | | 4 | | | 5 | | | 5 |
| 9296 | 96830 | 4 | 9346 | 97063 | 4 | 9396 | 97294 | 5 | 9446 | 97525 | 4 | 9496 | 97754 | 5 |
| 9297 | 96834 | 5 | 9347 | 97067 | 5 | 9397 | 97299 | 5 | 9447 | 97529 | 5 | 9497 | 97759 | 4 |
| 9298 | 96839 | 5 | 9348 | 97072 | 5 | 9398 | 97304 | 4 | 9448 | 97534 | 5 | 9498 | 97763 | 5 |
| 9299 | 96844 | 4 | 9349 | 97077 | 4 | 9399 | 97308 | 5 | 9449 | 97539 | 4 | 9499 | 97768 | 4 |
| 9300 | 96848 | 4 | 9350 | 97081 | 5 | 9400 | 97313 | 5 | 9450 | 97543 | 4 | 9500 | 97772 | 4 |

| N. | Log. | D | N. | Log. | D | N. | Log. | D | N. | Log. | D | N. | Log. | D |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 9501 | 97777 | 5 | 9551 | 98005 | 5 | 9601 | 98232 | 5 | 9651 | 98457 | 4 | 9701 | 98682 | 5 |
| 9502 | 97782 | 5 | 9552 | 98009 | 4 | 9602 | 98236 | 4 | 9652 | 98462 | 5 | 9702 | 98686 | 4 |
| 9503 | 97786 | 4 | 9553 | 98014 | 5 | 9603 | 98241 | 5 | 9653 | 98466 | 4 | 9703 | 98691 | 5 |
| 9504 | 97791 | 5 | 9554 | 98019 | 5 | 9604 | 98245 | 4 | 9654 | 98471 | 5 | 9704 | 98695 | 4 |
| 9505 | 97795 | 4 | 9555 | 98023 | 4 | 9605 | 98250 | 5 | 9655 | 98475 | 4 | 9705 | 98700 | 5 |
| | | 5 | | | 5 | | | 4 | | | 5 | | | 4 |
| 9506 | 97800 | | 9556 | 98028 | 4 | 9606 | 98254 | 5 | 9656 | 98480 | 4 | 9706 | 98704 | 5 |
| 9507 | 97804 | 4 | 9557 | 98032 | 5 | 9607 | 98259 | 4 | 9657 | 98484 | 5 | 9707 | 98709 | 4 |
| 9508 | 97809 | 5 | 9558 | 98037 | 5 | 9608 | 98263 | 4 | 9658 | 98489 | 4 | 9708 | 98713 | 4 |
| 9509 | 97813 | 4 | 9559 | 98041 | 4 | 9609 | 98268 | 5 | 9659 | 98493 | 5 | 9709 | 98717 | 5 |
| 9510 | 97818 | 5 | 9560 | 98046 | 5 | 9610 | 98272 | 4 | 9660 | 98498 | 4 | 9710 | 98722 | 5 |
| | | 5 | | | 4 | | | 5 | | | 4 | | | 4 |
| 9511 | 97823 | 4 | 9561 | 98050 | 5 | 9611 | 98277 | 4 | 9661 | 98502 | 5 | 9711 | 98726 | 5 |
| 9512 | 97827 | 5 | 9562 | 98055 | 4 | 9612 | 98281 | 5 | 9662 | 98507 | 4 | 9712 | 98731 | 4 |
| 9513 | 97832 | 4 | 9563 | 98059 | 5 | 9613 | 98286 | 4 | 9663 | 98511 | 5 | 9713 | 98735 | 5 |
| 9514 | 97836 | 5 | 9564 | 98064 | 4 | 9614 | 98290 | 5 | 9664 | 98516 | 4 | 9714 | 98740 | 4 |
| 9515 | 97841 | 4 | 9565 | 98068 | 5 | 9615 | 98295 | 5 | 9665 | 98520 | 5 | 9715 | 98744 | 5 |
| | | 4 | | | 5 | | | 4 | | | 5 | | | 5 |
| 9516 | 97845 | 5 | 9566 | 98073 | 5 | 9616 | 98299 | 5 | 9666 | 98525 | 4 | 9716 | 98749 | 4 |
| 9517 | 97850 | 5 | 9567 | 98078 | 4 | 9617 | 98304 | 4 | 9667 | 98529 | 5 | 9717 | 98753 | 5 |
| 9518 | 97855 | 4 | 9568 | 98082 | 5 | 9618 | 98308 | 5 | 9668 | 98534 | 4 | 9718 | 98758 | 4 |
| 9519 | 97859 | 5 | 9569 | 98087 | 4 | 9619 | 98313 | 5 | 9669 | 98538 | 5 | 9719 | 98762 | 5 |
| 9520 | 97864 | 4 | 9570 | 98091 | 4 | 9620 | 98318 | 5 | 9670 | 98543 | 4 | 9720 | 98767 | 5 |
| | | 4 | | | 5 | | | 4 | | | 4 | | | 4 |
| 9521 | 97868 | 5 | 9571 | 98096 | 4 | 9621 | 98322 | 5 | 9671 | 98547 | 5 | 9721 | 98771 | 5 |
| 9522 | 97873 | 5 | 9572 | 98100 | 5 | 9622 | 98327 | 4 | 9672 | 98552 | 4 | 9722 | 98776 | 4 |
| 9523 | 97877 | 4 | 9573 | 98105 | 4 | 9623 | 98331 | 5 | 9673 | 98556 | 5 | 9723 | 98780 | 5 |
| 9524 | 97882 | 5 | 9574 | 98109 | 5 | 9624 | 98336 | 4 | 9674 | 98561 | 4 | 9724 | 98784 | 4 |
| 9525 | 97886 | 4 | 9575 | 98114 | 4 | 9625 | 98340 | 5 | 9675 | 98565 | 5 | 9725 | 98789 | 5 |
| | | 5 | | | 4 | | | 5 | | | 5 | | | 4 |
| 9526 | 97891 | 5 | 9576 | 98118 | 5 | 9626 | 98345 | 4 | 9676 | 98570 | 4 | 9726 | 98793 | 5 |
| 9527 | 97896 | 4 | 9577 | 98123 | 4 | 9627 | 98349 | 5 | 9677 | 98574 | 5 | 9727 | 98798 | 4 |
| 9528 | 97900 | 5 | 9578 | 98127 | 5 | 9628 | 98354 | 4 | 9678 | 98579 | 4 | 9728 | 98802 | 5 |
| 9529 | 97905 | 4 | 9579 | 98132 | 5 | 9629 | 98358 | 4 | 9679 | 98583 | 5 | 9729 | 98807 | 4 |
| 9530 | 97909 | 5 | 9580 | 98137 | 4 | 9630 | 98363 | 5 | 9680 | 98588 | 4 | 9730 | 98811 | 5 |
| | | 4 | | | 5 | | | 4 | | | 4 | | | 4 |
| 9531 | 97914 | 4 | 9581 | 98141 | 5 | 9631 | 98367 | 5 | 9681 | 98592 | 5 | 9731 | 98816 | 4 |
| 9532 | 97918 | 5 | 9582 | 98146 | 4 | 9632 | 98372 | 4 | 9682 | 98597 | 4 | 9732 | 98820 | 5 |
| 9533 | 97923 | 5 | 9583 | 98150 | 5 | 9633 | 98376 | 5 | 9683 | 98601 | 5 | 9733 | 98825 | 4 |
| 9534 | 97928 | 4 | 9584 | 98155 | 4 | 9634 | 98381 | 4 | 9684 | 98605 | 4 | 9734 | 98829 | 5 |
| 9535 | 97932 | 4 | 9585 | 98159 | 4 | 9635 | 98385 | 5 | 9685 | 98610 | 5 | 9735 | 98834 | 4 |
| | | 5 | | | 5 | | | 4 | | | 4 | | | 4 |
| 9536 | 97937 | 4 | 9586 | 98164 | 4 | 9636 | 98390 | 4 | 9686 | 98614 | 5 | 9736 | 98838 | 5 |
| 9537 | 97941 | 5 | 9587 | 98168 | 5 | 9637 | 98394 | 5 | 9687 | 98619 | 4 | 9737 | 98843 | 4 |
| 9538 | 97946 | 4 | 9588 | 98173 | 4 | 9638 | 98399 | 4 | 9688 | 98623 | 5 | 9738 | 98847 | 4 |
| 9539 | 97950 | 5 | 9589 | 98177 | 5 | 9639 | 98403 | 5 | 9689 | 98628 | 4 | 9739 | 98851 | 5 |
| 9540 | 97955 | 4 | 9590 | 98182 | 4 | 9640 | 98408 | 4 | 9690 | 98632 | 5 | 9740 | 98856 | 4 |
| | | 4 | | | 4 | | | 4 | | | 5 | | | 4 |
| 9541 | 97959 | 5 | 9591 | 98186 | 5 | 9641 | 98412 | 5 | 9691 | 98637 | 4 | 9741 | 98860 | 5 |
| 9542 | 97964 | 4 | 9592 | 98191 | 4 | 9642 | 98417 | 4 | 9692 | 98641 | 5 | 9742 | 98865 | 4 |
| 9543 | 97968 | 5 | 9593 | 98195 | 5 | 9643 | 98421 | 5 | 9693 | 98646 | 4 | 9743 | 98869 | 5 |
| 9544 | 97973 | 5 | 9594 | 98200 | 4 | 9644 | 98426 | 4 | 9694 | 98650 | 5 | 9744 | 98874 | 4 |
| 9545 | 97978 | 4 | 9595 | 98204 | 4 | 9645 | 98430 | 4 | 9696 | 98655 | 4 | 9745 | 98878 | 5 |
| | | 4 | | | 5 | | | 5 | | | 4 | | | 4 |
| 9546 | 97982 | 5 | 9596 | 98209 | 5 | 9646 | 98435 | 4 | 9696 | 98659 | 5 | 9746 | 98883 | 4 |
| 9547 | 97987 | 4 | 9597 | 98214 | 4 | 9647 | 98439 | 5 | 9697 | 98664 | 4 | 9747 | 98887 | 5 |
| 9548 | 97991 | 5 | 9598 | 98218 | 5 | 9648 | 98444 | 4 | 9698 | 98668 | 5 | 9748 | 98892 | 4 |
| 9549 | 97996 | 5 | 9599 | 98223 | 4 | 9649 | 98448 | 5 | 9699 | 98673 | 4 | 9749 | 98896 | 4 |
| 9550 | 98000 | 4 | 9600 | 98227 | 4 | 9650 | 98453 | 5 | 9700 | 98677 | 4 | 9750 | 98900 | 4 |

| N. | Log. | D | N. | Log. | D | N. | Log. | D | N. | Log. | D | N. | Log. | D |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 9751 | 98905 | 5 | 9801 | 99127 | 4 | 9851 | 99348 | 4 | 9901 | 99568 | 4 | 9951 | 99787 | 5 |
| 9752 | 98909 | 4 | 9802 | 99131 | 4 | 9852 | 99352 | 4 | 9902 | 99572 | 5 | 9952 | 99791 | 4 |
| 9753 | 98914 | 5 | 9803 | 99136 | 5 | 9853 | 99357 | 4 | 9903 | 99577 | 4 | 9953 | 99795 | 4 |
| 9754 | 98918 | 4 | 9804 | 99140 | 4 | 9854 | 99361 | 4 | 9904 | 99581 | 4 | 9954 | 99800 | 5 |
| 9755 | 98923 | 5 | 9805 | 99145 | 5 | 9855 | 99366 | 5 | 9905 | 99585 | 4 | 9955 | 99804 | 4 |
| | | 4 | | | 4 | | | 4 | | | 5 | | | 4 |
| 9756 | 98927 | 5 | 9806 | 99149 | 4 | 9856 | 99370 | 4 | 9906 | 99590 | 4 | 9956 | 99808 | 5 |
| 9757 | 98932 | 4 | 9807 | 99154 | 5 | 9857 | 99374 | 5 | 9907 | 99594 | 5 | 9957 | 99813 | 4 |
| 9758 | 98936 | 4 | 9808 | 99158 | 4 | 9858 | 99379 | 4 | 9908 | 99599 | 4 | 9958 | 99817 | 5 |
| 9759 | 98941 | 5 | 9809 | 99162 | 5 | 9859 | 99383 | 4 | 9909 | 99603 | 4 | 9959 | 99822 | 4 |
| 9760 | 98945 | 4 | 9810 | 99167 | 5 | 9860 | 99388 | 5 | 9910 | 99607 | 5 | 9960 | 99826 | 4 |
| | | 4 | | | 4 | | | 4 | | | 4 | | | 5 |
| 9761 | 98949 | 5 | 9811 | 99171 | 5 | 9861 | 99392 | 4 | 9911 | 99612 | 4 | 9961 | 99830 | 5 |
| 9762 | 98954 | 4 | 9812 | 99176 | 4 | 9862 | 99396 | 5 | 9912 | 99616 | 5 | 9962 | 99835 | 4 |
| 9763 | 98958 | 5 | 9813 | 99180 | 5 | 9863 | 99401 | 4 | 9913 | 99621 | 4 | 9963 | 99839 | 4 |
| 9764 | 98963 | 4 | 9814 | 99185 | 4 | 9864 | 99405 | 4 | 9914 | 99625 | 4 | 9964 | 99843 | 5 |
| 9765 | 98967 | 5 | 9815 | 99189 | 4 | 9865 | 99410 | 5 | 9915 | 99629 | 5 | 9965 | 99848 | 4 |
| | | 4 | | | 4 | | | 4 | | | 5 | | | 4 |
| 9766 | 98972 | 4 | 9816 | 99193 | 5 | 9866 | 99414 | 5 | 9916 | 99634 | 4 | 9966 | 99852 | 4 |
| 9767 | 98976 | 5 | 9817 | 99198 | 4 | 9867 | 99419 | 4 | 9917 | 99638 | 4 | 9967 | 99856 | 5 |
| 9768 | 98981 | 4 | 9818 | 99202 | 4 | 9868 | 99423 | 4 | 9918 | 99642 | 5 | 9968 | 99861 | 4 |
| 9769 | 98985 | 4 | 9819 | 99207 | 5 | 9869 | 99427 | 4 | 9919 | 99647 | 4 | 9969 | 99865 | 5 |
| 9770 | 98989 | 5 | 9820 | 99211 | 4 | 9870 | 99432 | 5 | 9920 | 99651 | 5 | 9970 | 99870 | 4 |
| | | 4 | | | 5 | | | 4 | | | 5 | | | 4 |
| 9771 | 98994 | 4 | 9821 | 99216 | 4 | 9871 | 99436 | 5 | 9921 | 99656 | 4 | 9971 | 99874 | 4 |
| 9772 | 98998 | 5 | 9822 | 99220 | 4 | 9872 | 99441 | 4 | 9922 | 99660 | 4 | 9972 | 99878 | 5 |
| 9773 | 99003 | 4 | 9823 | 99224 | 5 | 9873 | 99445 | 4 | 9923 | 99664 | 5 | 9973 | 99883 | 4 |
| 9774 | 99007 | 5 | 9824 | 99229 | 4 | 9874 | 99449 | 5 | 9924 | 99669 | 4 | 9974 | 99887 | 4 |
| 9775 | 99012 | 4 | 9825 | 99233 | 5 | 9875 | 99454 | 4 | 9925 | 99673 | 4 | 9975 | 99891 | 5 |
| | | 4 | | | 5 | | | 4 | | | 4 | | | 4 |
| 9776 | 99016 | 5 | 9826 | 99238 | 4 | 9876 | 99458 | 5 | 9926 | 99677 | 5 | 9976 | 99896 | 4 |
| 9777 | 99021 | 4 | 9827 | 99242 | 5 | 9877 | 99463 | 4 | 9927 | 99682 | 4 | 9977 | 99900 | 4 |
| 9778 | 99025 | 4 | 9828 | 99247 | 4 | 9878 | 99467 | 4 | 9928 | 99686 | 5 | 9978 | 99904 | 5 |
| 9779 | 99029 | 5 | 9829 | 99251 | 4 | 9879 | 99471 | 5 | 9929 | 99691 | 4 | 9979 | 99909 | 4 |
| 9780 | 99034 | 4 | 9830 | 99255 | 5 | 9880 | 99476 | 4 | 9930 | 99695 | 4 | 9980 | 99913 | 4 |
| | | 4 | | | 5 | | | 4 | | | 4 | | | 4 |
| 9781 | 99038 | 5 | 9831 | 99260 | 4 | 9881 | 99480 | 4 | 9931 | 99699 | 5 | 9981 | 99917 | 5 |
| 9782 | 99043 | 4 | 9832 | 99264 | 5 | 9882 | 99484 | 5 | 9932 | 99704 | 4 | 9982 | 99922 | 4 |
| 9783 | 99047 | 5 | 9833 | 99269 | 4 | 9883 | 99489 | 4 | 9933 | 99708 | 4 | 9983 | 99926 | 4 |
| 9784 | 99052 | 4 | 9834 | 99273 | 4 | 9884 | 99493 | 4 | 9934 | 99712 | 5 | 9984 | 99930 | 5 |
| 9785 | 99056 | 5 | 9835 | 99277 | 5 | 9885 | 99498 | 5 | 9935 | 99717 | 4 | 9985 | 99935 | 4 |
| | | 4 | | | 4 | | | 4 | | | 4 | | | 4 |
| 9786 | 99061 | 4 | 9836 | 99282 | 4 | 9886 | 99502 | 4 | 9936 | 99721 | 5 | 9986 | 99939 | 5 |
| 9787 | 99065 | 4 | 9837 | 99286 | 5 | 9887 | 99506 | 5 | 9937 | 99726 | 4 | 9987 | 99944 | 4 |
| 9788 | 99069 | 5 | 9838 | 99291 | 4 | 9888 | 99511 | 4 | 9938 | 99730 | 4 | 9988 | 99948 | 4 |
| 9789 | 99074 | 4 | 9839 | 99295 | 4 | 9889 | 99515 | 5 | 9939 | 99734 | 5 | 9989 | 99952 | 5 |
| 9790 | 99078 | 5 | 9840 | 99300 | 5 | 9890 | 99520 | 4 | 9940 | 99739 | 4 | 9990 | 99957 | 4 |
| | | 4 | | | 4 | | | 4 | | | 4 | | | 4 |
| 9791 | 99083 | 4 | 9841 | 99304 | 4 | 9891 | 99524 | 4 | 9941 | 99743 | 4 | 9991 | 99961 | 4 |
| 9792 | 99087 | 5 | 9842 | 99308 | 5 | 9892 | 99528 | 5 | 9942 | 99747 | 5 | 9992 | 99965 | 5 |
| 9793 | 99092 | 4 | 9843 | 99313 | 4 | 9893 | 99533 | 4 | 9943 | 99752 | 4 | 9993 | 99970 | 4 |
| 9794 | 99096 | 4 | 9844 | 99317 | 5 | 9894 | 99537 | 4 | 9944 | 99756 | 4 | 9994 | 99974 | 4 |
| 9795 | 99100 | 5 | 9845 | 99322 | 4 | 9895 | 99542 | 5 | 9945 | 99760 | 5 | 9995 | 99978 | 4 |
| | | 4 | | | 4 | | | 4 | | | 4 | | | 5 |
| 9796 | 99105 | 4 | 9846 | 99326 | 4 | 9896 | 99546 | 4 | 9946 | 99765 | 4 | 9996 | 99983 | 4 |
| 9797 | 99109 | 5 | 9847 | 99330 | 5 | 9897 | 99550 | 5 | 9947 | 99769 | 5 | 9997 | 99987 | 4 |
| 9798 | 99114 | 4 | 9848 | 99335 | 4 | 9898 | 99555 | 4 | 9948 | 99774 | 4 | 9998 | 99991 | 5 |
| 9799 | 99118 | 5 | 9849 | 99339 | 5 | 9899 | 99559 | 4 | 9949 | 99778 | 4 | 9999 | 99996 | 4 |
| 9800 | 99123 | | 9850 | 99344 | | 9900 | 99564 | 5 | 9950 | 99782 | 4 | 10000 | 00000 | |

FIN.

00051961

Digitized with financial assistance from
Shri Brihad Bhartiya Samaj
on 20 February, 2020